Производная степенной функции

Производная
и её геометрический смысл

Сегодня на уроке

1. Вспомним определение производной функции.

2. Познакомимся с формулой производной степенной функции.

Чему равна производная функции $f(x) = 9x + 1$?

А 1

В 9

Б $9x + 1$

Г $9x$

Чему равна производная функции $f(x) = 9x + 1$?

А 1

В 9

Б $9x + 1$

Г $9x$

Чему равна производная функции $f(x) = C$, где C – заданное число?

А 1

В -1

Б 0

Г C

Чему равна производная функции $f(x) = C$, где C – заданное число?

А 1

В -1

Б 0

Г C

Чему равна производная функции $f(x) = x^2$?

А $2x$

В x^2

Б x

Г 2

Чему равна производная функции $f(x) = x^2$?

А $2x$

В x^2

Б x

Г 2

Чему равна производная функции $f(x) = x^3$?

А $3x$

Б 3

В x^3

Г $3x^2$

Чему равна производная функции $f(x) = x^3$?

А $3x$

В x^3

Б 3

Г $3x^2$

Вспомним

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x + h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \to 0$ (если этот предел существует) называется производной функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Докажем, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Пусть $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

$$f(x + h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} = \frac{x - x - h}{(x+h)x} = -\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-\frac{h}{(x+h)x}}{h} = -\frac{\cancel{h}^{1}}{(x+h)x\cancel{h}_{1}} = -\frac{1}{(x+h)x}.$$

Если $h \to 0$, то $x + h \to x$, поэтому $(x + h)x \to x^2$.

Тогда $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{(x+h)x}\right) = -\frac{1}{x^2}$.

Следовательно, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Формула $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ справедлива при $x \neq 0$.

Если $x > 0$, то и $x + h > 0$,
а если $x < 0$, то и $x + h < 0$.

Докажем, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пусть $f(x) = \sqrt{x},\ x > 0,\ x + h > 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\cancel{h}^{1}}{\cancel{h}_{1}\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

Если $h \to 0$, то $\sqrt{x\ +\ h} \to \sqrt{x}$, поэтому $\sqrt{x\ +\ h} + \sqrt{x} \to 2\sqrt{x}$.

Тогда $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Следовательно, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ справедлива при $x > 0$.

Формулы производных

$(C)' = 0$

$(x)' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0)$

Формулы производной степенной функции $f(x) = x^p$ для
$p = 2$,
$p = 3$,
$p = -1$,
$p = \frac{1}{2}$.

Формулы производных

$(x^2)' = 2x,$

$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$

$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0)$

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Для любого действительного показателя справедлива формула производной степенной функции:

$$\boxed{(x^p)' = px^{p-1}}$$

Формулы производных

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$(x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

$$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(x^{\sqrt{5}}\right)' = \sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1}$$

Формулы производных

$(x^p)' = px^{p-1}$

$(kx + b)' = k$

$$(x^6)' = 6x^{6-1} = 6x^5,$$

$$\boxed{\left((kx + b)^p\right)' = pk(kx + b)^{p-1}}$$

$$(5x + 9)' = 5,$$

$$\left((5x + 9)^6\right)' = 6 \cdot 5 \cdot (5x + 9)^{6-1} = 30(5x + 9)^5.$$

$k = 5,\ b = 9,\ p = 6.$

Задание № 1

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

Найдите производные функций:

а) x^{15}; б) x^{-9}; в) $x^{-\frac{1}{5}}$; г) $\frac{1}{x^7}$; д) $\sqrt[5]{x}$; е) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение:

а) x^{15},

$$(x^{15})' = 15x^{15-1} = 15x^{14};$$

б) x^{-9},

$$(x^{-9})' = -9x^{-9-1} = -9x^{-10};$$

в) $x^{-\frac{1}{5}}$,

$$\left(x^{-\frac{1}{5}}\right)' = -\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}};$$

г) $\frac{1}{x^7}$,

$$\left(\frac{1}{x^7}\right)' = (x^{-7})' = -7x^{-7-1} = -7x^{-8};$$

д) $\sqrt[5]{x}$,

$$(\sqrt[5]{x})' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}};$$

г) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$$

Задание № 2

$$((kx+b)^p)' = pk(kx+b)^{p-1}$$

Найдите производные функций:

а) $(3x-10)^5$; б) $(2-9x)^7$; в) $(-5x)^3$; г) $\sqrt[5]{3x+7}$; д) $\sqrt[4]{3x}$.

Решение:

а) $(3x-10)^5$,

$$\left((3x-10)^5\right)' = 5\cdot 3\cdot (3x-10)^{5-1} = 15(3x-10)^4;$$

б) $(2-9x)^7$,

$$((2-9x)^7)' = 7\cdot(-9)\cdot(2-9x)^{7-1} = -63(2-9x)^6;$$

в) $(-5x)^3$,

$$((-5x)^3)' = 3\cdot(-5)\cdot(-5x)^{3-1} = -15(-5x)^2 = -15\cdot 25x^2 = -375x^2;$$

Задание № 2

$$\left((kx+b)^p\right)' = pk(kx+b)^{p-1}$$

Найдите производные функций:

а) $(3x-10)^5$; б) $(2-9x)^7$; в) $(-5x)^3$; г) $\sqrt[5]{3x+7}$; д) $\sqrt[4]{3x}$.

Решение:

г) $\sqrt[5]{3x+7}$,

д) $\sqrt[4]{3x}$,

Домашнее задание найти производные

Задание № 3

$\left((kx+b)^p\right)' = pk(kx+b)^{p-1}$

$(x^p)' = px^{p-1}$

Найдите $f'(x_0)$, если

а) $f(x) = x^4, x_0 = 3$; б) $f(x) = x^{-3}, x_0 = 2$; в) $f(x) = \sqrt{5-4x}, x_0 = 1$.

Решение:

а) $f(x) = x^4, x_0 = 3,$

$f'(x) = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3,$

$f'(3) = 4 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108;$

б) $f(x) = x^{-3}, x_0 = 2,$

$f'(x) = (x^{-3}) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4},$

$f'(2) = -3 \cdot 2^{-4} = -\frac{3}{2^4} = -\frac{3}{16};$

в) $f(x) = \sqrt{5-4x}, x_0 = 1,$

Домашнее задание

Задание № 4

$$\left((kx+b)^p\right)' = pk(kx+b)^{p-1}$$

При каких значениях x производная функции $f(x) = (2x-1)^2$ равна 4.

Решение:

$f(x) = (2x-1)^2$,

$f'(x) = \left((2x-1)^2\right)' = 2 \cdot 2 \cdot (2x-1)^{2-1} = 4(2x-1)$,

$4(2x-1) = 4$,

$2x - 1 = 1$,

$2x = 2$,

$x = 1$.

При $x = 1$ производная функции $f(x) = (2x-1)^2$ равна 4.

Итоги урока

Вспомним

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x + h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$

Формулы производных

$(x^2)' = 2x,$ $\quad (x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$

$(x^3)' = 3x^2$ $\quad (x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$

Формулы производных

$(x^6)' = 6x^{6-1} = 6x^5,$

$(5x+9)' = 5,$

$\big((5x+9)^6\big)' = 6 \cdot 5 \cdot (5x+9)^{6-1} = 30(5x+9)^5.$

$\boxed{\big((kx+b)^p\big)' = pk(kx+b)^{p-1}}$

$k = 5,\ b = 9,\ p = 6.$

Формулы производных

$(x^6)' = 6x^{6-1} = 6x^5,$

$(5x+9)' = 5,$

$\big((5x+9)^6\big)' = 6 \cdot 5 \cdot (5x+9)^{6-1} = 30(5x+9)^5.$

$\boxed{\big((kx+b)^p\big)' = pk(kx+b)^{p-1}}$

$k = 5,\ b = 9,\ p = 6.$