

Производная степенной функции

Производная
и её геометрический смысл



Сегодня на уроке

1. Вспомним определение производной функции.
2. Познакомимся с формулой производной степенной функции.

Чему равна производная функции $f(x) = 9x + 1$?

А 1

В 9

Б $9x + 1$

Г $9x$

Чему равна производная функции $f(x) = 9x + 1$?

А 1

В 9

Б $9x + 1$

Г $9x$

Чему равна производная функции $f(x) = C$, где C – заданное число?

А 1

В -1

Б 0

Г C

Чему равна производная функции $f(x) = C$, где C – заданное число?

А 1

В -1

Б 0

Г C

Чему равна производная функции $f(x) = x^2$?

А $2x$

В x^2

Б x

Г 2

Чему равна производная функции $f(x) = x^2$?

А $2x$

В x^2

Б x

Г 2

Чему равна производная функции $f(x) = x^3$?

А $3x$

В x^3

Б 3

Г $3x^2$

Чему равна производная функции $f(x) = x^3$?

А $3x$

В x^3

Б 3

Г $3x^2$

Вспомним

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x + h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \rightarrow 0$ (если этот предел существует) называется производной функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Докажем, что $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Пусть $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} = \frac{x - x - h}{(x+h)x} = -\frac{h}{(x+h)x},$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-\frac{h}{(x+h)x}}{h} = -\frac{\cancel{h}^1}{(x+h)x\cancel{h}_1} = -\frac{1}{(x+h)x}.$$

Если $h \rightarrow 0$, то $x+h \rightarrow x$, поэтому $(x+h)x \rightarrow x^2$.

$$\text{Тогда } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{(x+h)x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Формула $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ справедлива при $x \neq 0$.

Если $x > 0$, то и $x+h > 0$,
а если $x < 0$, то и $x+h < 0$.

Докажем, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, $x + h > 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{\cancel{h}^1}{\cancel{h}_1(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

Если $h \rightarrow 0$, то $\sqrt{x+h} \rightarrow \sqrt{x}$, поэтому $\sqrt{x+h} + \sqrt{x} \rightarrow 2\sqrt{x}$.

$$\text{Тогда } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Следовательно, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ справедлива при $x > 0$.

Формулы производных

$$(x^2)' = 2x,$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Для любого действительного показателя справедлива формула производной степенной функции:

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

Формулы производных

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$(x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

$$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(x^{\sqrt{5}}\right)' = \sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1}$$

Формулы производных

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$(x^6)' = 6x^{6-1} = 6x^5,$$

$$(5x + 9)' = 5,$$

$$((5x + 9)^6)' = 6 \cdot 5 \cdot (5x + 9)^{6-1} = 30(5x + 9)^5.$$

$$k = 5, b = 9, p = 6.$$

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$$

Задание № 1

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

Найдите производные функций:

а) x^{15} ; б) x^{-9} ; в) $x^{-\frac{1}{5}}$; г) $\frac{1}{x^7}$; д) $\sqrt[5]{x}$; е) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение:

а) x^{15} ,

$$(x^{15})' = 15x^{15-1} = 15x^{14};$$

б) x^{-9} ,

$$(x^{-9})' = -9x^{-9-1} = -9x^{-10};$$

в) $x^{-\frac{1}{5}}$,

$$(x^{-\frac{1}{5}})' = -\frac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}-1} = -\frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}};$$

г) $\frac{1}{x^7}$,

$$\left(\frac{1}{x^7}\right)' = (x^{-7})' = -7x^{-7-1} = -7x^{-8};$$

д) $\sqrt[5]{x}$,

$$(\sqrt[5]{x})' = (x^{\frac{1}{5}})' = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}};$$

е) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$$

Задание № 2

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$$

Найдите производные функций:

а) $(3x - 10)^5$; б) $(2 - 9x)^7$; в) $(-5x)^3$; г) $\sqrt[5]{3x + 7}$; д) $\sqrt[4]{3x}$.

Решение:

а) $(3x - 10)^5$,

$$\left((3x - 10)^5\right)' = 5 \cdot 3 \cdot (3x - 10)^{5-1} = 15(3x - 10)^4;$$

б) $(2 - 9x)^7$,

$$\left((2 - 9x)^7\right)' = 7 \cdot (-9) \cdot (2 - 9x)^{7-1} = -63(2 - 9x)^6;$$

в) $(-5x)^3$,

$$\left((-5x)^3\right)' = 3 \cdot (-5) \cdot (-5x)^{3-1} = -15(-5x)^2 = -15 \cdot 25x^2 = -375x^2;$$

Задание № 2

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$$

Найдите производные функций:

а) $(3x - 10)^5$; б) $(2 - 9x)^7$; в) $(-5x)^3$; г) $\sqrt[5]{3x + 7}$; д) $\sqrt[4]{3x}$.

Решение:

г) $\sqrt[5]{3x + 7}$,

д) $\sqrt[4]{3x}$,

Домашнее задание найти производные

Задание № 3

Найдите $f'(x_0)$, если

а) $f(x) = x^4, x_0 = 3$; б) $f(x) = x^{-3}, x_0 = 2$; в) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, x_0 = 1$.

Решение:

а) $f(x) = x^4, x_0 = 3,$

$$f'(x) = (x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3,$$

$$f'(3) = 4 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108;$$

б) $f(x) = x^{-3}, x_0 = 2,$

$$f'(x) = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4},$$

$$f'(2) = -3 \cdot 2^{-4} = -\frac{3}{2^4} = -\frac{3}{16};$$

в) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}, x_0 = 1,$

$$((kx + b)^p)' = \frac{(x^p)'}{(kx + b)^{p-1}} = pk(kx + b)^{p-1}$$

Домашнее задание

Задание № 4

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$$

При каких значениях x производная функции $f(x) = (2x - 1)^2$ равна 4.

Решение:

$$f(x) = (2x - 1)^2,$$

$$f'(x) = ((2x - 1)^2)' = 2 \cdot 2 \cdot (2x - 1)^{2-1} = 4(2x - 1),$$

$$4(2x - 1) = 4,$$

$$2x - 1 = 1,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$

При $x = 1$ производная функции $f(x) = (2x - 1)^2$ равна 4.

Итоги урока

Вспомним

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x + h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \rightarrow 0$

Формулы производных

$$(x^2)' = 2x,$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$$

Формулы производных

$$(x^6)' = 6x^{6-1} = 6x^5,$$

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$$

$$(5x + 9)' = 5,$$

$$((5x + 9)^6)' = 6 \cdot 5 \cdot (5x + 9)^{6-1} = 30(5x + 9)^5.$$

$$k = 5, b = 9, p = 6.$$

Результат

Формулы производных

$$(x^6)' = 6x^{6-1} = 6x^5,$$

$$(5x + 9)' = 5,$$

$$((5x + 9)^6)' = 6 \cdot 5 \cdot (5x + 9)^{6-1} = 30(5x + 9)^5.$$

$$k = 5, b = 9, p = 6.$$

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}$$