

Центральная симметрия

Математик любит
прежде всего
симметрию.
Джеймс Максвелл

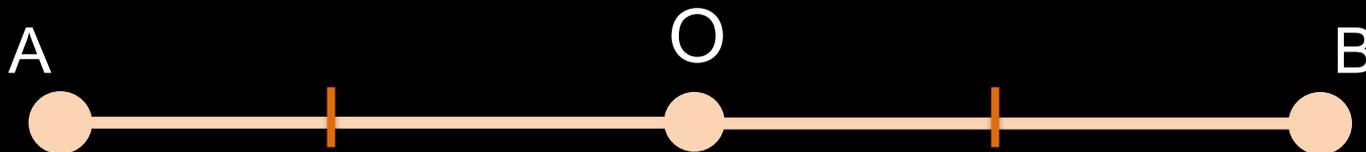


Центральная симметрия.

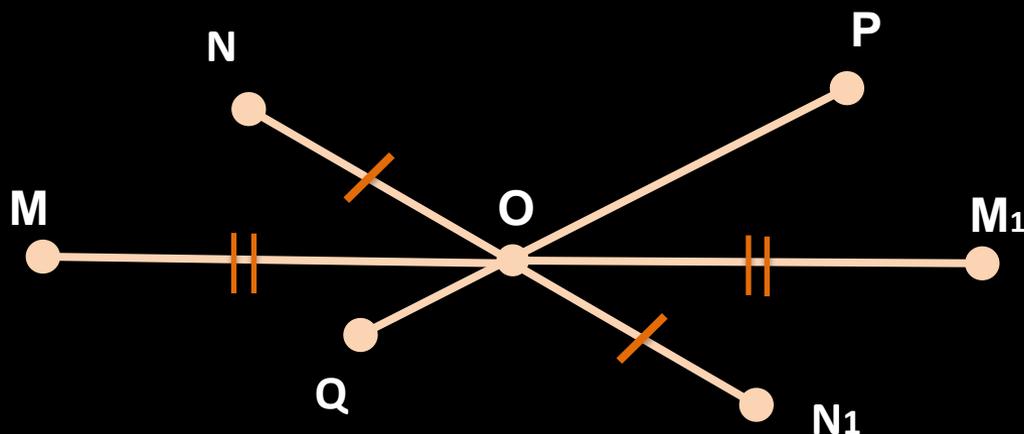
Центральная симметрия – это отображение пространства на себя, при котором любая точка переходит в симметричную ей точку, относительно центра O .

Точка O называется *центром симметрии фигуры*.

Две точки A и B называются симметричными относительно точки O , если O – середина отрезка AB . Точка O считается симметричной самой себе.



На рисунке точки M и M_1 , N и N_1 симметричны относительно точки O , а точки P и Q не симметричны относительно этой точки.



Теорема. Центральная симметрия – движение.

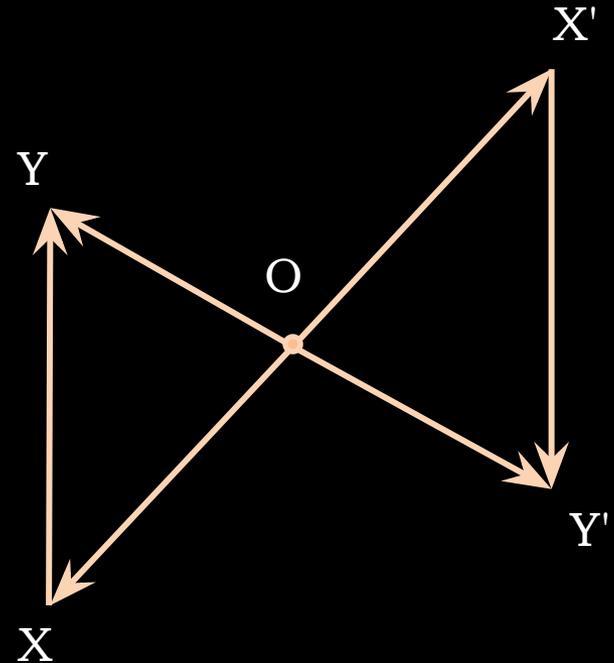
Доказательство:

Пусть при центральной симметрии с центром в точке O точки X и Y отобразились на X' и Y' . Тогда, как ясно из определения центральной симметрии, $OX' = -OX$, $OY' = -OY$.

Вместе с тем $X'Y' = OY' - OX$, $X'Y' = OY' - OX$

Поэтому имеем: $X'Y' = -OY + OX = -XY$

Отсюда выходит, что центральная симметрия является движением, изменяющим направление на противоположное и наоборот, движение, изменяющее направление на противоположное, есть центральная симметрия.



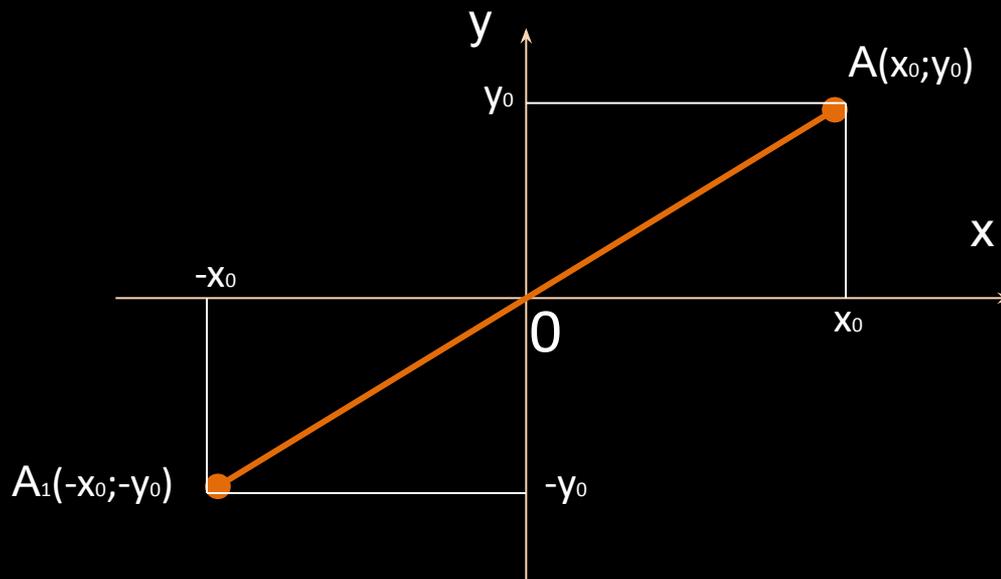
Свойство центральной симметрии: центральная симметрия переводит прямую (плоскость) в себя или в параллельную ей прямую (плоскость).

Центральная симметрия в прямоугольной системе координат.

Если в прямоугольной системе координат точка A имеет координаты $(x_0; y_0)$, то координаты $(-x_0; -y_0)$ точки A_1 , симметричной точке A относительно начала координат, выражаются формулами:

$$x_1 = -x_0$$

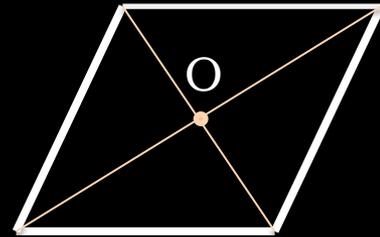
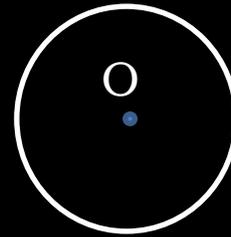
$$y_1 = -y_0$$



Примеры из жизни.

- Простейшими фигурами, обладающими центральной симметрией, является *окружность* и *параллелограмм*.

Центром симметрии окружности является центр окружности, а центром симметрии параллелограмма точка пересечения его диагоналей.



- Центральная симметрия встречается в форме воздушного и подводного транспорта (воздушный шар, парашют), архитектуре, технике, искусстве и быту.

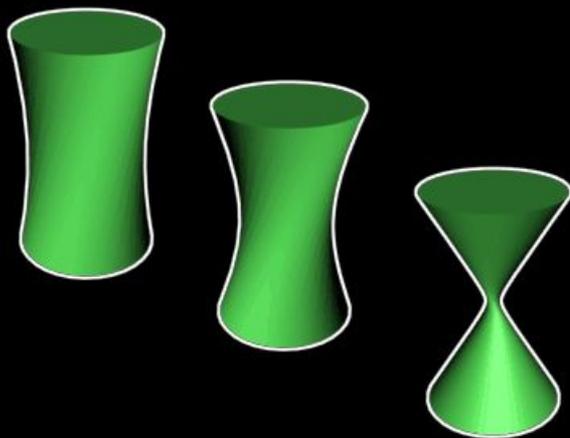


- Центральная симметрия наиболее характерна для плодов растений и некоторых цветов (голубика, черника, вишня, цветок мать-и-мачехи, цветок кувшинки), а также для животных, ведущих подводный образ жизни (амёба).



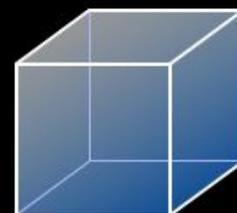
Примеры из жизни.

- Одним из самых красивых примеров центральной симметрии является снежинка.
- Центральную симметрию имеют многие геометрические тела. К ним следует отнести все правильные многогранники (за исключением тетраэдра), все правильные призмы с четным числом боковых граней, некоторые тела вращения (эллипсоид, цилиндр, гиперболоид, тор, шар).



Три различных гиперболоида

Октаэдр



Куб

Додекаэдр



Икосаэдр

Примеры решения задач.

Дано: ABCD - параллелограмм, треугольники АВМ, ВСК, СРD, ДАН - правильные

Доказать: КРНМ - параллелограмм

Решение:

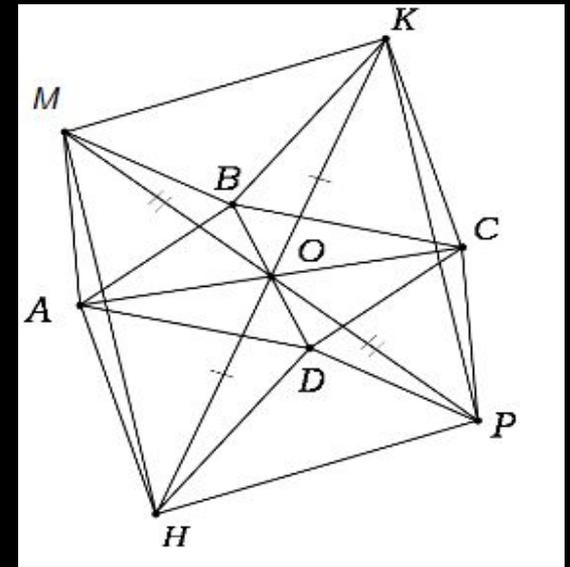
Рассмотрим центральную симметрию (поворот на 180 градусов) относительно точки О. Пусть f - центральная симметрия.

$f(B) = D$, $f(A) = C$, $f(D) = B$, $f(C) = A$.

При центральной симметрии f треугольник ВСК (правильный) перейдет в равный ему треугольник ДАН (правильный), по свойствам осевой симметрии (углы сохраняются).

Аналогично треугольник АМВ переходит в треугольник СРD.

$f(M) = P$, $f(K) = H$, отсюда $KO = OH$, $MO = OP$, по признаку параллелограмма, КРНМ – параллелограмм.



Дано: угол ABC , точка D

Построить отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в точке D

Решение:

Построим точку B' симметричную точке B . Пусть D - центр симметрии, $BD = DB'$.

Проведём прямую $A'B'$, параллельную прямой BC и прямую $B'C'$, параллельную прямой AB . Прямые $A'B'$ и $B'C'$ симметричны прямым BC и AB соответственно относительно точки D .

Значит, точка A' симметрична точке C' относительно точки D . Отсюда следует, что $A'D = DC'$.

