Пример 2. В игре принимают участие два игрока. Каждый из игроков может записать независимо от другого число 4, 5 или 6. Если разность между числами, записанными игроками A и B, положительна, то игрок A выигрывает количество очков, равное этой разности. Если разность отрицательна, то выигрывает игрок B. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

Необходимо составить платежную матрицу игры.

Решение

У игрока A имеется три стратегии:

- A_1 – записать число 4;
- A_2 – записать число 5;
- A_3 – записать число 6.

Поэтому платежная матрица будет иметь три строки:

Платежная матрица для примера 2

Стратегии	B_1 (4)	B_2 (5)	B_3 (6)
A_1 (4)	0	–1	–2
A_2 (5)	1	0	–1
A_3 (6)	2	1	0

Игрок B также имеет три стратегии: B_1, B_2, B_3 (записать число 4, 5 или 6). Платежная матрица имеет три столбца

Пример 3. Конструкторские бюро КБ-1 и КБ-2 участвуют в конкурсе проектов двух бытовых приборов. В КБ-1 этим заняты четыре, а в КБ-2 – три отдела. Комиссия, оценивающая эти проекты, лучшим признает тот, которым в конструкторском бюро занималось большее количество отделов. При равенстве задействованных отделов баллы не начисляются. Кроме одного балла, получаемого за лучший проект, конструкторскому бюро дополнительно начисляется столько баллов, сколько отделов было занято аналогичным проектом в конкурирующем КБ. Общее количество баллов каждого бюро равняется сумме баллов, набранных по обоим проектам.

Необходимо придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу (матрицу баллов, начисляемых КБ-1).

Решение

Под игроком A будем понимать КБ-1, а под игроком B – КБ-2. Запишем стратегии игроков в виде: (k_1, k_2), где k_1 и k_2 – количества отделов, которые занимались первым проектом и вторым проектом, соответственно.

Поскольку у игрока A имеется четыре отдела, их можно распределить по проектам следующими способами: $A_1 = (4, 0)$; $A_2 = (3, 1)$; $A_3 = (2, 2)$; $A_4 = (1, 3)$; $A_5 = (0, 4)$, т. е. игрок A имеет пять различных стратегий. Стратегия A_1 состоит в том, чтобы все четыре отдела занять первым проектом, стратегия A_2 – в том, чтобы три отдела занять первым проектом, а один отдел – вторым, и т. д.

Аналогично игрок B имеет три отдела и четыре стратегии: $B_1 = (3, 0)$; $B_2 = (2, 1)$; $B_3 = (1, 2)$; $B_4 = (0, 3)$.

Платежная матрица этой игры:

Платежная матрица для примера 3

Стратегии	$B_1 = (3, 0)$	$B_2 = (2, 1)$	$B_3 = (1, 2)$	$B_4 = (0, 3)$
$A_1 = (4, 0)$	4	2	1	0
$A_2 = (3, 1)$	1	3	0	–1
$A_3 = (2, 2)$	–2	2	2	–2
$A_4 = (1, 3)$	–1	0	3	1
$A_5 = (0, 4)$	0	1	2	4

Приведем рассуждения при расчете элементов этой платежной матрицы.

2. Решение матричных игр. Принцип минимакса

Пусть дана парная игра с нулевой суммой, заданная платежной матрицей размерности $m \times n$. *Решить* матричную игру означает определить наилучшие стратегии игроков A и B. Если рассматривается стратегическая игра, то предполагается, что противники одинаково разумны, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели. Поэтому каждый игрок должен рассчитывать на самое неблагоприятное для себя поведение противника.

Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока A. Выбирая стратегию A_i, мы должны рассчитывать, что игрок B ответит на нее той из своих стратегий B_j, для которой выигрыш игрока A будет минимальным. Поэтому для каждой стратегии A_i найдем α_i – минимальный гарантированный выигрыш игрока A при применении стратегии A_i – по следующей формуле:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \ (i = \overline{1, m}). \qquad (1)$$

(т.е. находим минимальный элемент по каждой строке платежной матрицы)

Очевидно, что желающий перестраховаться игрок A должен предпочесть ту стратегию, для которой гарантированный выигрыш α_i максимален, т. е. лучшая, с его точки зрения, стратегия имеет следующий вид:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (2)$$

(т.е. среди минимальных элементов по каждой строке платежной матрицы находим наибольший)

Величина α называется *нижней ценой игры* или *максимином.*

Стратегия, обеспечивающая игроку A получение нижней цены игры, называется *максиминной стратегией.* Если игрок A будет придерживаться своей максиминной стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры при любом поведении игрока B.

Аналогичным способом определим наилучшую стратегию игрока B. С его точки зрения, в платежной матрице записаны проигрыши. Он заинтересован уменьшить свой проигрыш. Поэтому в каждом из столбцов (соответствующем определенной стратегии) он должен найти максимальное значение проигрыша при выборе стратегии B_j по следующей формуле:

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (3)$$

Выбирать стратегию игроку B следует так, чтобы минимизировать величину проигрыша при любых действиях соперника, т. е. обеспечить $\beta = \min_j \beta_j$.

Величина

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (4)$$

называется *верхней ценой игры* (*минимаксом*), а соответствующая ей чистая стратегия B_j – *минимаксной*. Если игрок B будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то ему гарантировано, что в любом случае он проиграет не больше верхней цены игры. Можно показать, что всегда максимин не превосходит минимакс, т. е. $\alpha \leq \beta$.

Если нижняя цена игры равна верхней ($\alpha = \beta$), то говорят, что игра имеет *седловую точку* и чистую цену игры $\gamma = \alpha = \beta$. Стратегии A_i^* и B_j^*, позволяющие достичь этого значения, называются оптимальными, а пара оптимальных стратегий (A_i^*, B_j^*) называется седловой точкой матричной игры.

Игра, которая имеет седловую точку, решается в *чистых стратегиях*, т. е. рекомендуется каждому игроку применять одну свою стратегию A_i^* и B_j^*. Тогда игроку A гарантировано, что он получит выигрыш, не меньший чистой цены игры (γ). А игроку B гарантировано, что он получит проигрыш, не больший чистой цены игры (γ).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Найдем решение игры для примера 2. Будем записывать величины α_i в дополнительном столбце справа, а величины β_j – в дополнительной строке внизу платежной матрицы:

Решение игры для примера 2

Стратегии	B_1 (4)	B_2 (5)	B_3 (6)	α_i
A_1 (4)	0	–1	–2	–2
A_2 (5)	1	0	–1	–1
A_3 (6)	2	1	0^*	0
β_j	2	1	0	

Если игрок A выбирает чистую стратегию A_1 (записывает число 4), то его минимальный выигрыш составит

$$\alpha_1 = min\,(0; -1; -2) = -2.$$

Аналогично находятся значения α_i для каждой строки (см. последний столбец в табл. 3.4). Наибольший из минимальных выигрышей стратегий (нижняя цена игры) имеет следующий вид:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = 0.$$

Нижней цене игры соответствует стратегия A_3. Таким образом, если игрок A выбирает стратегию A_3 (записывает число 6), то ему гарантирован выигрыш, не меньший $\alpha = 0$.

Если игрок B выбирает чистую стратегию B_1 (записывает 4), то его максимальный проигрыш будет выглядеть следующим образом:

$$\beta_1 = max\ (0; 1; 2) = 2.$$

Аналогично находим максимальный проигрыш для каждого столбца (см. последнюю строку в таблице). Наименьший из максимальных проигрышей (верхняя цена игры) имеет следующий вид:

$$\beta = \min_j \beta_j = 0.$$

Верхней цене игры соответствует стратегия B_3. Таким образом, если игрок B выбирает стратегию B_3 (записывает число 6), то ему гарантирован проигрыш, не больший $\beta = 0$.

Поскольку $\alpha = \beta$, то игра имеет седловую точку и решение в чистых стратегиях. Чистая цена игры $\gamma = 0$. Оптимальная стратегия игрока A – A_3. Оптимальная стратегия игрока B – B_3. Игрокам рекомендуется выбирать свои оптимальные стратегии.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т. е. $\alpha<\beta$, то решением игры для каждого игрока будет смешанная стратегия, состоящая в применении им двух и более чистых стратегий с определенными частотами. Однако, применение игроками смешанных стратегий имеет смысл только тогда, когда данная игра проводится ими многократно. В случае однократно проводимой игры, не имеющей седловой точки, дать какие-либо содержательные рекомендации игрокам не представляется возможным.

Смешанной стратегией игрока A называется вектор

$$\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

где p_i – вероятность, с которой игрок A выбирает свою чистую стратегию A_i. Компоненты вектора p удовлетворяют следующим условиям:

$$p_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Смешанной стратегией игрока B называют вектор

$$\bar{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

где q_j – вероятность (частота) применения игроком B его чистой стратегии B_j. При этом

$$q_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Решить задачу в смешанных стратегиях означает найти такие оптимальные смешанные стратегии $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$, которые доставляют игроку A максимальный средний выигрыш, а игроку B – минимальный средний проигрыш. *Ценой игры* (γ) при этом называется величина среднего выигрыша игрока A (среднего проигрыша B), приходящегося на одну партию.

Можно показать, что цена игры всегда удовлетворяет условию $\alpha \leq \gamma \leq \beta$.

Следовательно, если каждый игрок придерживается своих смешанных стратегий при многократном повторении игры, то он получает более выгодный для себя результат, чем применяя «перестраховочные» стратегии, соответствующие α и β. Каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, так как ему это невыгодно.

Чистые стратегии игроков, имеющие ненулевые вероятности в его смешанной стратегии, называются *активными*.

Пример 5. Применим принцип минимакса к платежной матрице из примера 3, рассчитав нижнюю и верхнюю цены игры.

Расчет нижней и верхней цены игры для примера 3

Стратегии	$B_1 = (3, 0)$	$B_2 = (2, 1)$	$B_3 = (1, 2)$	$B_4 = (0, 3)$	α_i
$A_1 = (4, 0)$	4	2	1	0	0
$A_2 = (3, 1)$	1	3	0	–1	–1
$A_3 = (2, 2)$	–2	2	2	–2	–2
$A_4 = (1, 3)$	–1	0	3	1	–1
$A_5 = (0, 4)$	0	1	2	4	0
β_j	4	3	3	4	

Минимальный выигрыш игрока A при применении им стратегии A_1 составит $\alpha_1 = min\ (4;\ 2;\ 1;\ 0) = 0$ (минимум в первой строке). Аналогично находятся величины α_i для остальных строк.

Нижняя цена игры будет равна:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = max\ (0; -1; -2; -1; 0) = 0.$$

Таким образом, игроку A гарантирован выигрыш не меньший нуля, если он будет придерживаться стратегии A_1 (все отделы на первый проект) или стратегии A_5 (все отделы на второй проект).

Максимальный проигрыш игрока B при применении им стратегии B_1 будет равен:

$$\beta_1 = max\ (4;\ 1;\ -2;\ -1;\ 0) = 4$$

(максимум в первом столбце). Аналогично находятся значения β_j для остальных столбцов.

Верхняя цена игры будет равна:

$$\beta = \min_j \beta_j = min\ (4;\ 3;\ 3;\ 4) = 3.$$

Игроку B гарантировано, что он проиграет не больше 3 баллов, если будет придерживаться стратегии B_2 (два отдела на первый проект и один на второй) или B_3 (один отдел на первый проект и два на второй).

Поскольку в данном примере нижняя цена игры не равна верхней: ($\alpha = 0 < \beta = 3$), то игра в чистых стратегиях решения не имеет. Ее следует искать в смешанных стратегиях, если известно, что она реализуется не один раз, а многократно. Тогда для игрока A следует найти вектор

$$\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5).$$

Каждая компонента такого вектора p_i есть вероятность (частота), с которой нужно выбирать стратегию A_i. Для игрока B нужно найти вектор

$$\bar{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

вероятностей применения его чистых стратегий.

3. Решение игры в смешанных стратегиях путем сведения к задаче линейного программирования

Пусть платежная матрица игры не содержит седловой точки, следовательно, игра решается в смешанных стратегиях.

Будем считать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны. Если это не так, то можно ко всем элементам матрицы добавить некоторое достаточно большое число L, переводящее платежи в область неотрицательных значений. При этом цена игры увеличится на L, а смешанные стратегии игроков не изменятся. Если все выигрыши игрока A неотрицательны, то можно принять, что средний выигрыш $\gamma > 0$.

Применение игроком A оптимальной смешанной стратегии $\overline{p^*} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ гарантирует ему, независимо от поведения игрока B, средний выигрыш, не меньший цены игры (γ).

Допустим, что игрок A применяет свою оптимальную стратегию $\overline{p^*}$, а игрок B – свою чистую стратегию B_j. Тогда средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша) игрока A можно рассчитать по формуле

$$\gamma_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + \ldots + a_{ij}p_i + a_{mj}p_m, \quad j = \overline{1, n}.$$

Учитывая, что γ_j не может быть меньше цены игры γ, можем записать условия:

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{ij}p_i + a_{mj}p_m \ge \gamma, \quad j = \overline{1, n}.$$

Разделив левую и правую части этого неравенства на $\gamma > 0$, получим следующее:

$$a_{1j}\frac{p_1}{\gamma} + a_{2j}\frac{p_2}{\gamma} + ... + a_{ij}\frac{p_i}{\gamma} + a_{mj}\frac{p_m}{\gamma} \ge 1, \quad j = \overline{1, n} \qquad (5)$$

В (5): a_{ij} – элементы матрицы игры; p_i (i = 1, 2, …, m) – вероятности, с которыми игрок А выбирает одну из своих стратегий; γ – средняя цена игры.

Введем новые обозначения:

$$x_i = \frac{p_i}{\gamma}, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (6)$$

Тогда неравенства (5) можно записать в следующем виде:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{ij}x_i + a_{mj}x_m \geq 1, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (7)$$

где все $x_i \geq 0$ ($i = \overline{1, m}$), так как $p_i \geq 0$, $\gamma > 0$.

Компоненты вектора p являются вероятностями событий, образующих полную группу. Поэтому они удовлетворяют следующему условию:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Учитывая соотношение (6), получим следующее равенство:

$$x_1\gamma + x_2\gamma + \ldots + x_m\gamma = 1,$$

т. е. переменные x_i удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\gamma}.$$

Поскольку игрок A стремится максимизировать свой средний выигрыш γ, обратная ему сумма переменных x_i должна быть наименьшей. Получаем целевую функцию задачи:

$$F(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min . \qquad (8)$$

Таким образом, задача решения матричной игры сводится к задаче линейного программирования, в которой требуется найти неотрицательные значения переменных x_i $(i=\overline{1,m})$, минимизирующие линейную функцию (8) и удовлетворяющие ограничениям (7):

$$F=\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min; \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j=\overline{1,n}); \\ x_i \geq 0 \quad (i=\overline{1,m}). \end{cases}$$

$$x_i=\frac{p_i}{\gamma}, \quad i=\overline{1,m}$$

p_i – вероятности, с которыми игрок А выбирает одну из своих стратегий;
γ – средняя цена игры.

Решив данную задачу, найдем цену игры по формуле

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}. \qquad (9)$$

Вероятности применения игроком A его чистых стратегий рассчитаем по следующей формуле:

$$p_i = x_i \gamma = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i} \quad (i = \overline{1, m}). \qquad (10)$$

Для определения смешанной стратегии игрока B нужно решить двойственную задачу:

$$F_Д = \sum_{j=1}^{n} z_j \to \max\,; \qquad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le 1 \quad (i = \overline{1, m}); \\ z_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Решив двойственную задачу, найдем оптимальные значения переменных z_j. Поскольку рассматривается игра с нулевой суммой, средний проигрыш игрока B, приходящийся на одну партию, равен выигрышу игрока A, т. е. удовлетворяет следующему равенству:

$$\gamma = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_j} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i}.$$

Вероятности применения игроком B его чистых стратегий определяются по формуле

$$q_j = z_j \gamma = \frac{z_j}{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \frac{z_j}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (11)$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 6. Решим в смешанных стратегиях игру о двух КБ, платежная матрица которой была составлена в примере 3. Прежде всего, прибавим ко всем элементам платежной матрицы число 2, чтобы перевести их в область неотрицательных значений.

Платежная матрица для примера 3

Стратегии	$B_1 = (3, 0)$	$B_2 = (2, 1)$	$B_3 = (1, 2)$	$B_4 = (0, 3)$
$A_1 = (4, 0)$	4	2	1	0
$A_2 = (3, 1)$	1	3	0	–1
$A_3 = (2, 2)$	–2	2	2	–2
$A_4 = (1, 3)$	–1	0	3	1
$A_5 = (0, 4)$	0	1	2	4

Цена игры при этом увеличится на 2. Получим платежную матрицу:

Преобразованная платежная матрица

Стратегии	$B_1 = (3, 0)$	$B_2 = (2, 1)$	$B_3 = (1, 2)$	$B_4 = (0, 3)$
$A_1 = (4, 0)$	6	4	3	2
$A_2 = (3, 1)$	3	5	2	1
$A_3 = (2, 2)$	0	4	4	0
$A_4 = (1, 3)$	1	2	5	3
$A_5 = (0, 4)$	2	3	4	6

Составим задачу линейного программирования, чтобы решить игру для игрока A:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + \quad\quad x_4 + 2x_5 \geq 1; \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 \geq 1; \\ 2x_1 + x_2 + \quad\quad 3x_4 + 6x_5 \geq 1; \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

Двойственная к ней задача даст решение для игрока B:

$$F_Д = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 6z_1 + 4z_2 + 3z_3 + 2z_4 \le 1; \\ 3z_1 + 5z_2 + 2z_3 + z_4 \le 1; \\ 4z_2 + 4z_3 \le 1; \\ z_1 + 2z_2 + 5z_3 + 3z_4 \le 1; \\ 2z_1 + 3z_2 + 4z_3 + 6z_4 \le 1; \\ z_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Решим исходную задачу с помощью надстройки *Поиск решения* и получим отчет по устойчивости. Значения в графе *Теневая цена* (*Лагранжа множитель*) отчета по устойчивости есть оптимальные значения двойственных переменных. Оптимальные значения переменных: $x_1^* = 0{,}125$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 0{,}03125$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 0{,}125$. Из отчета по устойчивости – $z_1^* = 0{,}009375$; $z_2^* = 0{,}15$; $z_3^* = 0{,}1$; $z_4^* = 0{,}021875$. Значение целевой функции будет равно

$$F^* = \sum_{i=1}^{5} x_i^* = 0{,}28125.$$

Найдем вероятности применения игроком A своих чистых стратегий, используя формулу (3.10):

$$p_1 = \frac{x_1^*}{\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}125}{0{,}28125} \approx 0{,}445; \qquad p_2 = \frac{x_2^*}{\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0}{0{,}28125} = 0;$$

$$p_3 = \frac{x_3^*}{\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}03125}{0{,}28125} \approx 0{,}11; \qquad p_4 = 0; \qquad p_5 \approx 0{,}445.$$

Таким образом, у игрока A активными являются первая, третья и пятая стратегии. Причем первую стратегию нужно выбирать в 44,5% случаев, третью стратегию – в 11% случаев, а пятую стратегию – также в 44,5% случаев.

Рассчитаем теперь вероятности применения стратегий для игрока B, используя формулу (3.11):

$$q_1 = \frac{z_1^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}009375}{0{,}28125} = 0{,}033; \quad q_2 = \frac{z_2^*}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{0{,}15}{0{,}28125} = 0{,}533$$

;

$$q_3 = \frac{0{,}1}{0{,}28125} = 0{,}356; \qquad q_4 = \frac{0{,}021875}{0{,}28125} = 0{,}078.$$

У игрока B все стратегии являются активными, т. е. все их нужно применять с соответствующими частотами.

Цена игры: $\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{4} z_j^*} = \frac{1}{0,28125} = 3,556$. Но эта цена игры – для преобразованной платежной матрицы. Чтобы вернуться к исходной игре, следует отнять число 2, которое было прибавлено ко всем элементам платежной матрицы. Итак, цена игры $\gamma = 1,556$. Таким образом, если игрок A будет придерживаться своей смешанной стратегии, ему гарантирован средний выигрыш не меньше, чем 1,556. Очевидно, что это лучший результат, чем при применении перестраховочной стратегии, которая дает гарантированный выигрыш $\alpha = 0$ (см. пример 3.4).