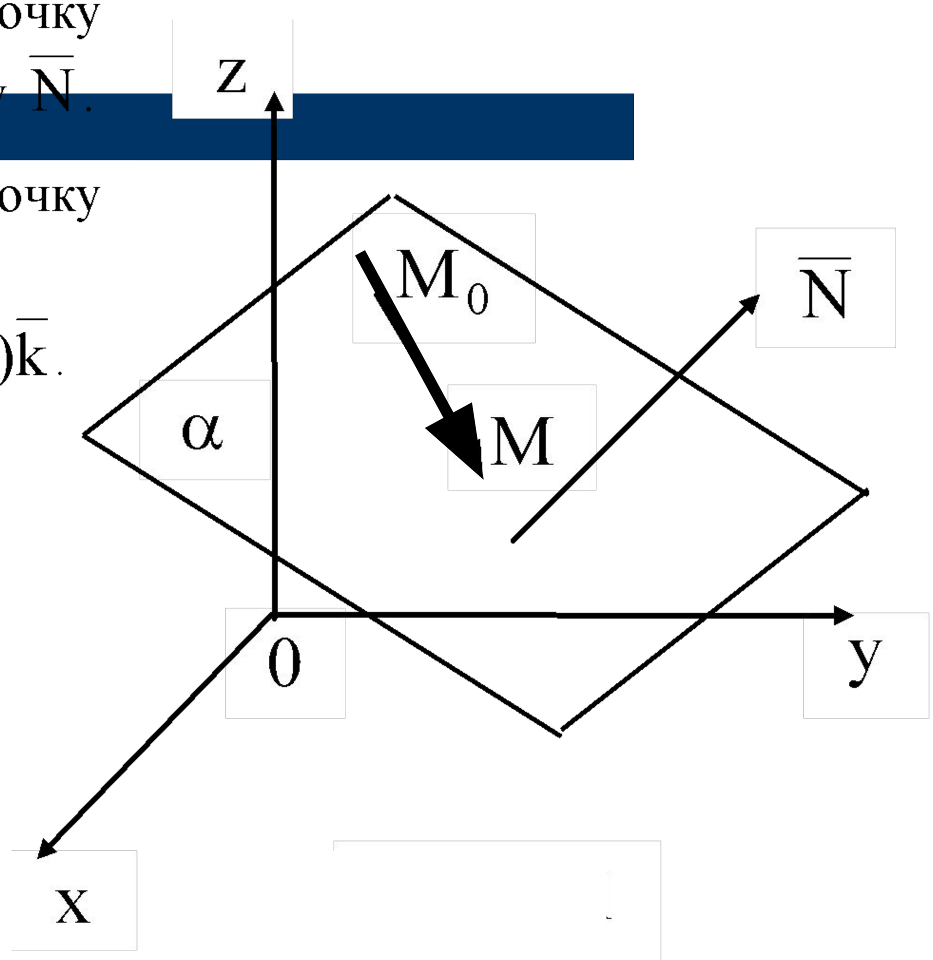
ПЛОСКОСТЬ. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ

- Положение плоскости в пространстве вполне определяется заданием
- **любых трех точек, не лежащих на одной прямой;**
- **точки плоскости и вектора перпендикулярного этой плоскости.**

Пусть в пространстве R^3 дана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и вектор $\overline{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$. Требуется найти уравнение плоскости α, проходящей через точку M_0 перпендикулярно заданному вектору $\overline{N}$.

Выберем в R^3 произвольную точку $M(x;y;z)$ и построим вектор

$$\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}.$$



Рассмотрим два случая:

1) если точка $M \in \alpha$ то

$$\overline{M_0M} \perp \overline{N} \Rightarrow \overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2) если точка $M \notin \alpha$, то вектора $\overline{M_0M}$ и $\overline{N}$ не перпендикулярны.

$$\Rightarrow \overline{N} \cdot \overline{M_0M} \neq 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0$$

Из случаев 1) и 2) и определения уравнения поверхности следует, что уравнение п.1 есть уравнение искомой плоскости α. Данное уравнение называется ***уравнением плоскости по точке и нормальному вектору.*** Вектор $\overline{N}$, перпендикулярный плоскости α, называется ***нормальным вектором*** этой плоскости.

ПРИМЕР. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5;-1;3)$ перпендикулярно вектору $N=\{2;3;4\}$.

Решение. Уравнение искомой плоскости будем искать в форме

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Полагая в уравнении (1.35)

$A=2, B=3, C=4, x_0=5, y_0=-1, z_0=3$ получим

$$2(x-5)+3(y+1)+4(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+3y+4z-19=0.$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПО ТРЕМ ТОЧКАМ

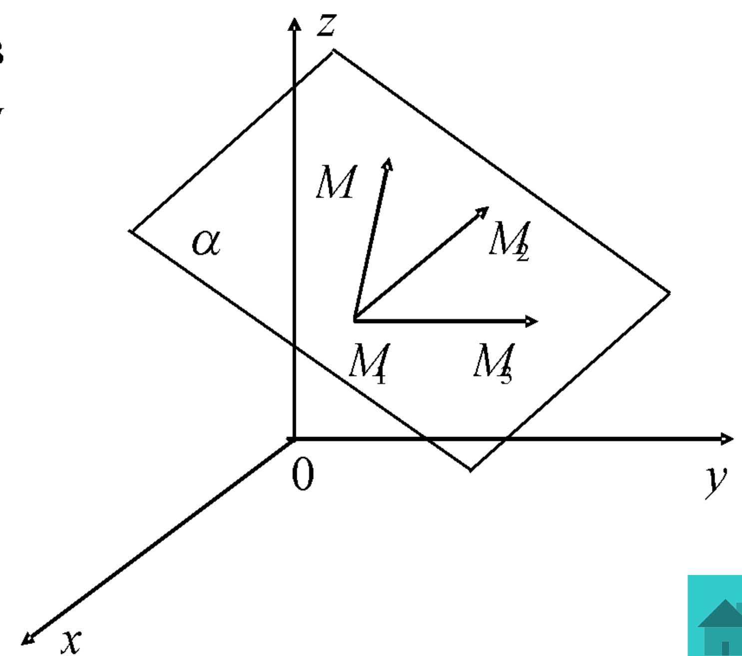
- Пусть в пространстве R^3 даны три

точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2), M_3(x_3;y_3;z_3)$ не лежащие на одной прямой. Выберем в этом пространстве произвольную точку $M(x;y;z)$ и построим три вектора

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$



Предположим, что точка M лежит на плоскости α проходящей через заданные точки M_1, M_2, M_3. Тогда векторы $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ лежат на этой плоскости. Следовательно, $(\overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2}) \cdot \overline{M_1M_3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если же точка $M \notin \alpha$, то векторы $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ не компланарны. Тогда и их смешанное произведение отлично от нуля. Согласно определению, данное уравнение является уравнением искомой плоскости α.

Заметим, что если расписать определитель, то полученное уравнение так же, как и уравнение, будет алгебраическим уравнением первой степени относительно трех переменных x, y, z.

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Уравнение $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ называется

общим уравнением плоскости.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения:

1) $\boxed{D = 0.}$ Тогда, плоскость $Ax + By + Cz = 0$ проходит через начало координат, так как точка $O(0;0;0)$ принадлежит этой плоскости при любых значениях A, B и C;

2) $\boxed{C = 0.}$ Уравнение плоскости запишется в виде $Ax + By + D = 0$. Так как старшие коэффициенты A, B и C являются проекциями нормального к плоскости вектора $\overline{N}$, то вектор $\overline{N} = \{A; B; 0\}$ перпендикулярен этой плоскости. Но вектор $\overline{N}$ перпендикулярен и координатной оси OZ. Следовательно, рассматриваемая плоскость параллельна оси OZ;

3) если $\boxed{B = 0}$, то плоскость $\boxed{Ax + Cz + D = 0 \text{ параллельна оси } OY}$ (доказать самостоятельно);

4) если $\boxed{A = D = 0}$, то плоскость проходит через начало координат и параллельна оси OX. Следовательно, плоскость $\boxed{By + Cz = 0 \text{ проходит через ось } OX}$;

5) если $\boxed{A = B = D = 0}$, то $Cz = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $\boxed{\text{совпадает с плоскостью } XOY}$.

ПРИМЕР. Определить, перпендикулярен ли вектор $\bar{a} = \{3;0;4\}$ плоскости $2x - 5y + z - 1 = 0$.

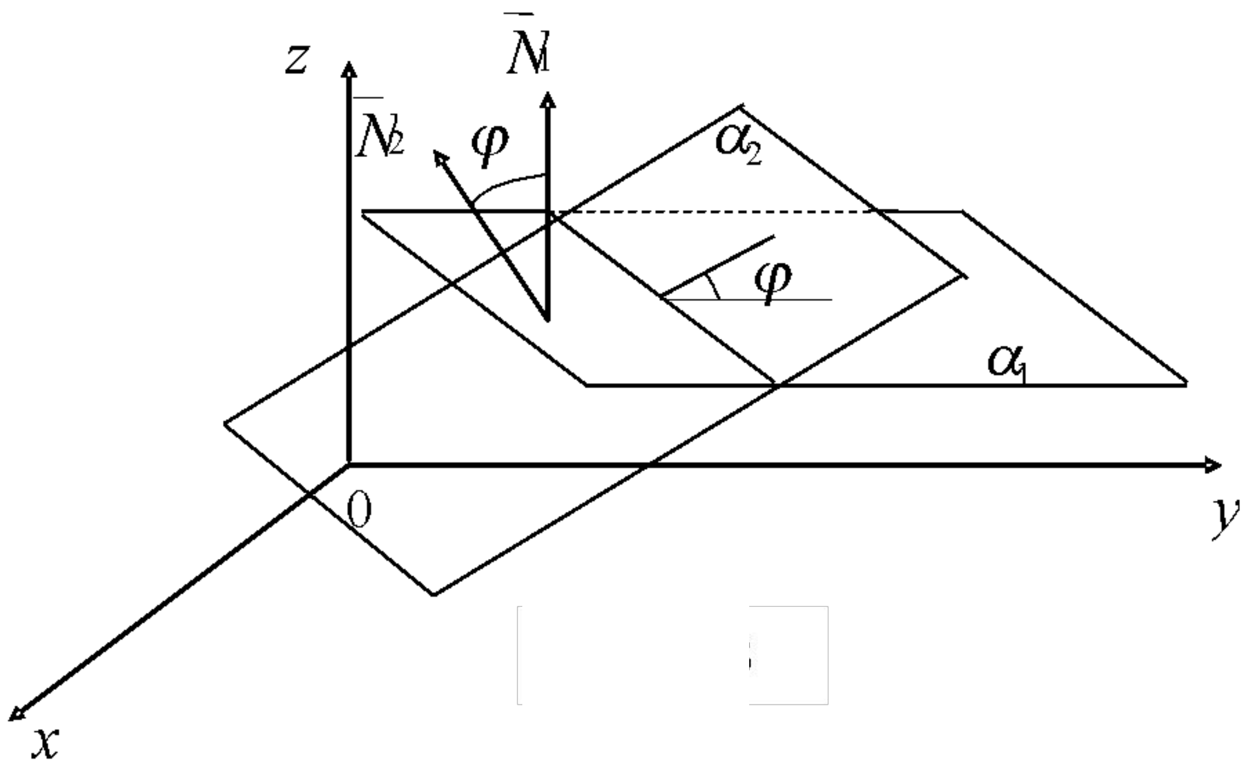
Решение. Коэффициенты $A = 2, B = -5, C = 1$ являются проекциями нормального вектора $\bar{N}$ плоскости. Тогда, если вектор $\bar{a}$ перпендикулярен заданной плоскости, то векторы $\bar{N}$ и $\bar{a}$ должны быть коллинеарными. Согласно условию коллинеарности двух векторов проекции этих векторов должны быть пропорциональными между собой.

Но $\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{0}{(-5)}$, следовательно, вектор $\bar{a}$ не перпендикуля-рен данной плоскости.

УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ

Пусть в R^3 заданы своими уравнениями две плоскости

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$



Коэффициенты A, B и C уравнения плоскости являются проекциями нормального вектора $\overline{N}$ к этой плоскости. Следовательно, один из смежных двугранных углов φ между плоскостями α_1 и α_2 равен углу между нормальными к этим плоскостям векторами

$$\overline{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\} \text{ и } \overline{N_2} = \{A_2; B_2; C_2\}.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right| \cdot \left|\overline{N_2}\right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2} \cdot \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}}.$$

По данной формуле определяется один из смежных двугранных углов между данными плоскостями.

Следствие 1. Если плоскости α_1 и α_2 параллельны, то их нормальные векторы $\overline{N_1}$ и $\overline{N_2}$ коллинеарны. Тогда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Данные условия называются условиями параллельности двух плоскостей.

Следствие 2. Если плоскости α_1 и α_2 перпендикулярны, то в угол $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Тогда $\cos\varphi=0$. Следовательно, и

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Данное условие называется условием перпендикулярности двух плоскостей.

ПРИМЕР. Определить, при каком значении λ плоскость $3x-5y+\lambda z-3=0$ перпендикулярна плоскости $x+3y+2z+5=0$.

<u>Решение.</u> Векторы $\overline{N_1}=\{3;-5;\lambda\}, \overline{N_2}=\{1;3;2\}$ являются нормальными векторами к данным плоскостям. Тогда согласно условию плоскости взаимно перпендикулярны, если

$$3\cdot 1+(-5)\cdot 3+2\lambda=0 \Leftrightarrow 2\lambda=12 \Leftrightarrow \lambda=6.$$ Ответ: 6.

ПРИМЕР. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

<u>Решение.</u> Искомая плоскость проходит через заданную точку M_0, тогда ее уравнение, запишется в виде:

$$A(x-3)+B(y+2)+C(z+7)=0.$$

Искомая плоскость параллельна заданной плоскости. Тогда из условия параллельности двух плоскостей получим $\frac{2}{A}=\frac{0}{B}=\frac{-3}{C}$. Отсюда

$A=2, B=0, C=-3$

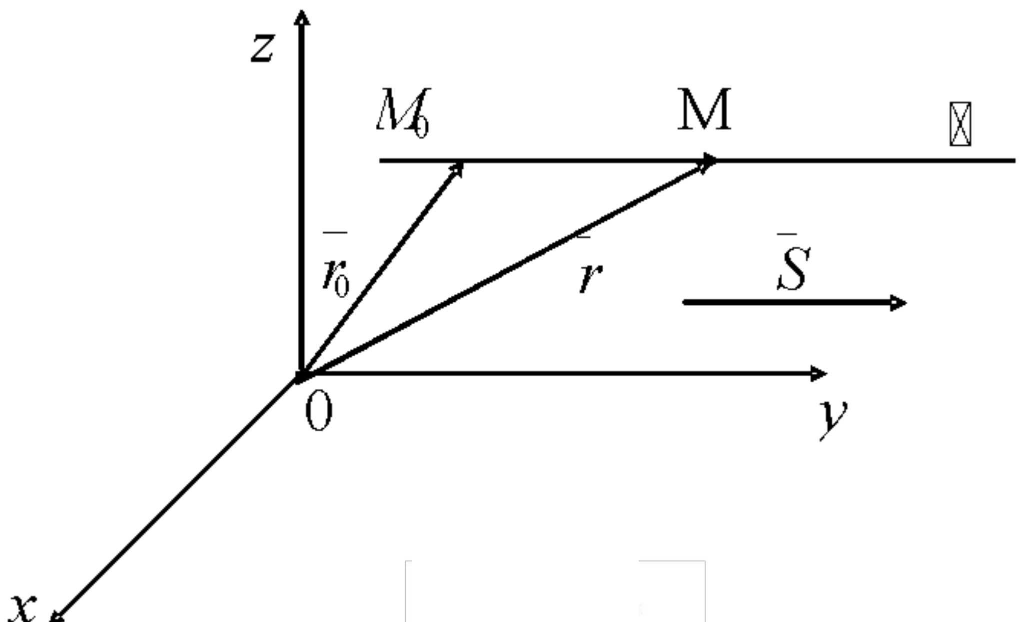
Подставляя найденные коэффициенты A, B, C в предыдущее уравнение найдем уравнение искомой плоскости

$$2(x-3)-3(z+7)=0 \Leftrightarrow 2x-3z-27=0.$$

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ . ВЕКТОРНОЕ, КАНОНИЧЕСКИЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

- Положение прямой в пространстве определяется заданием
- **любых двух точек;**
- **ее точки и вектора параллельного этой прямой;**
- **двух пересекающихся плоскостей**

Пусть в пространстве R^3 дана точка $M_0(x_0;y_0z_0)$ и вектор $\bar{S}=\{m;n;p\}$. Тогда через точку M_0 параллельно вектору $\bar{S}$ проходит единственная прямая ⌧. Для определения ее уравнения выберем в R^3 произвольную точку $M(x;y;z)$ и построим векторы $\bar{r}_0=\overline{OM_0}=\{x_0;y_0;z_0\}$, и $\bar{r}=\overline{OM}=\{x;y;z\}$



Согласно определению суммы векторов получим $\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}$

Пусть точка $M \in \ell$, тогда векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{S}$ коллинеарны. Следовательно, $\overline{M_0M} = t \cdot \bar{S}$, где t - параметр, принимающий любое значение из R в зависимости от положения точки M на прямой ℓ. Тогда для точки $M \in \ell$ имеем

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t \cdot \bar{S}, \quad \text{где } t \in R$$

Если точка $M \notin \ell$, то векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{S}$ не коллинеарны. Следовательно, для таких точек полученное равенство не выполняется ни при каких $t \in R$.. Итак, полученное уравнение является векторным уравнением прямой. Вектор $\bar{S} = \{m; n; p\}$ называется ***направляющим вектором прямой***.

Воспользовавшись координатами векторов $\bar{r}, \bar{r}_0, \bar{S}$, получим

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k} + t(m\bar{i} + n\bar{j} + p\bar{k}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Данные уравнения называются **параметрическими уравнениями** прямой с параметром t в пространстве R^3.

Исключая параметр t из уравнений найдем, что

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Полученные уравнения называются ***канонических уравнениями*** прямой в пространстве R^3.

Замечание. В канонических уравнениях прямой условились считать, что числа m, n и p могут принимать любые значения, кроме одновременного равенства m, n и p нулю. В частности, если данные уравнения имеют вид $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{0}$, то это уравнения есть уравнения прямой перпендикулярной оси OZ. Действительно, при $p=0$ направляющий вектор $\bar{S}=\{m;n;0\}$ перпендикулярен оси OZ. Следовательно, и параллельная вектору $\bar{S}$ прямая перпендикулярна этой оси. Если же уравнения имеют вид $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{0}$,то это уравнение является уравнением прямой перпендикулярной плоскости XOZ.

ПРИМЕР. Определить, лежит ли точка $M_1(8;-7;6)$ на прямой $\boxtimes$, проходящей через точку $M_0(2;1;-4)$ параллельно вектору $\bar{S}=\{3;-4;5\}$.

<u>Решение</u>. Найдем уравнения прямой $\boxtimes$ в канонической форме. Полагая $x_0=2, y_0=1, z_0=-4, m=3, n=-4, p=5,$ получим

$$\boxtimes : \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+4}{5}.$$

Подставляя в эти уравнения координаты точки M_1, найдем

$$\frac{8-2}{3}=\frac{-7-1}{-4}=\frac{6+4}{5}=2.$$

Следовательно, точка M_1 принадлежит прямой $\boxtimes$.

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ ПО ДВУМ ЕЕ ТОЧКАМ

Пусть прямая ℓ проходит через две данные точки

$$M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2).$$

Вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ расположен на самой прямой ℓ. Следовательно, этот вектор является одним из направляющих векторов $\overline{S}$ этой прямой. Тогда, полагая, в канонических уравнениях

$$m = x_2 - x_1, n = y_2 - y_1, p = z_2 - z_1, x_0 = x_1, y_0 = y_1, z_0 = z_1,$$

получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Данные уравнения называются уравнениями прямой ℓ по двум ее точкам

ПРИМЕР. Найти уравнения медианы (AM) треугольника с вершинами в точках $A(1;3;-5), B(0;4;-1), C(6;-2;5)$

Решение. Так как точка M делит отрезок BC пополам, то

$$x_m = \frac{x_b + x_c}{2} = \frac{0+6}{2} = 3, y_m = \frac{y_b + y_c}{2} = \frac{4-2}{2} = 1,$$

$$z_m = \frac{z_b + z_c}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Медиана (AM) проходит через точки A и M, координаты которых известны. Тогда, уравнения этой медианы будут иметь вид

$$\frac{x - x_a}{x_m - x_a} = \frac{y - y_a}{y_m - y_a} = \frac{z - z_a}{z_m - z_a} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z+5}{2+5} \Leftrightarrow$$

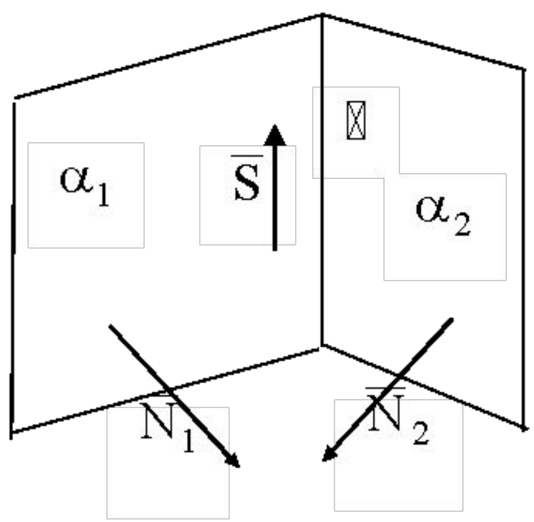
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{7}.$$

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Пусть в пространстве R^3 даны своими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ две плоскости α_1, α_2. Если эти плоскости пересекаются, то система

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

определяет уравнения прямой, являющейся линией пересечения плоскостей α_1 и α_2. Данные уравнения называются общими уравнениями прямой.



Покажем, что если прямая □ задана своими уравнениями в одной из своих форм, то всегда возможно найти любую из оставшихся ее форм уравнений. Например, если прямая □ задана своими каноническими уравнениями

$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, то эти уравнения равносильны системе двух уравнений первой степени

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}, \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nx-my+(my_0-nx_0)=0, \\ py-nz+(nz_0-py_0)=0. \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы не содержит z. Следовательно, оно определяет плоскостью параллельную оси OZ. Второе уравнение не содержит x и определяет плоскость, параллельную оси OX. Тогда эта система составлена из уравнений пересекающихся плоскостей и представляет собой общие уравнения данной прямой □.

Пусть, наоборот, прямая l дана своими общими уравнениями и требуется найти ее канонические уравнения. Для решения этой задачи достаточно указать одну из бесконечного множества точек $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащих прямой, и найти направляющий вектор $\bar{S}=\{m;n;p\}$.

Координаты такой точки M_0 проще всего определить из системы [redacted] равными какому угодно числу (например, нулю). Для определения одного из возможных направляющих векторов $\bar{S}$ прямой l построим нормальные векторы $\bar{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\bar{N}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$ данных плоскостей.

Вектор $\bar{S}$ перпендикулярен векторам $\bar{N}_1, \bar{N}_2$, тогда

$$\bar{S}=\bar{N}_1\times\bar{N}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}.$$

Подставляя найденные координаты точки M_0 и проекции вектора $\bar{S}$ в канонические уравнения найдем искомую каноническую форму уравнений заданной прямой.

ПРИМЕР. Привести общие уравнения прямой

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$ к каноническому виду.

Решение. Уравнения прямой ⊠ ищем в виде $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Для определения координат точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$в общих уравнениях положим, например, $z=0$. Тогда получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ 4x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Итак, точка $M_0(2;-1;0)$ является одной из точек данной прямой. Для определения одного из направляющих векторов $\overline{S}=\{m;n;p\}$прямой введем два нормальных вектора $\overline{N}_1=\{1;-2;3\}$ и $\overline{N}_2=\{3;2;-5\}$. Тогда

$$\overline{S}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=4\overline{i}+14\overline{j}+8\overline{k}.$$

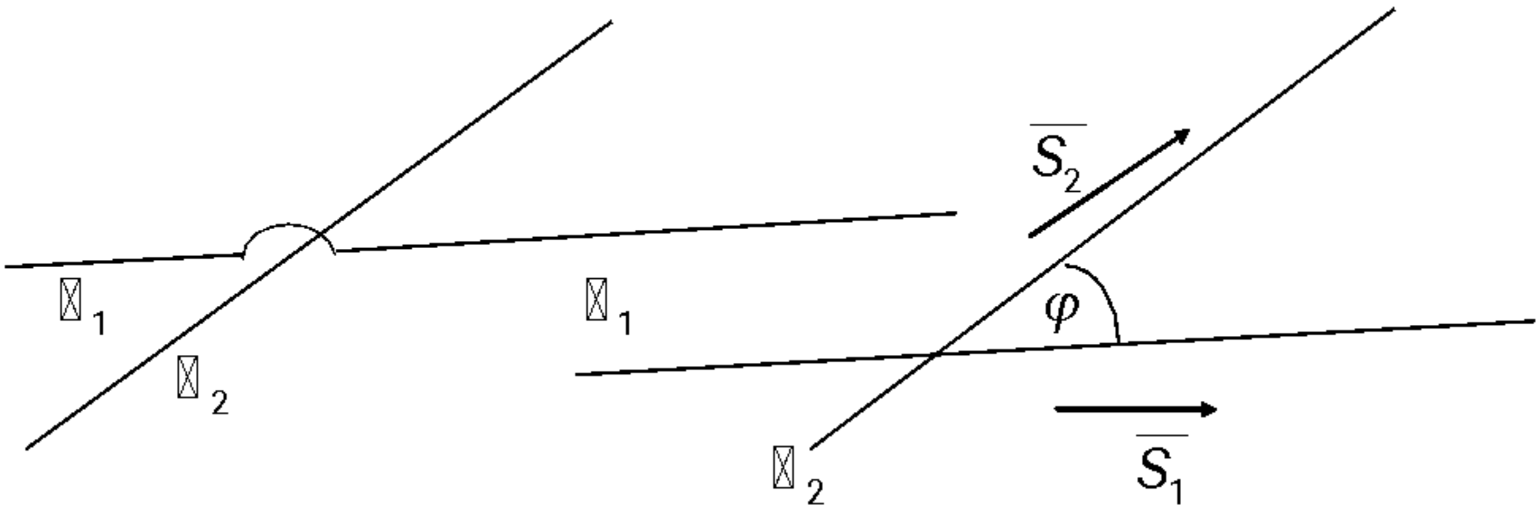
Отсюда $m=4, n=14, p=8$. Подставляя найденные величины в канонические уравнения, получим искомую каноническую форму уравнения прямой

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{14}=\frac{z}{8} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}.$$

УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Пусть в пространстве R^3 даны две прямые

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1};\quad l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$



Под углом между двумя прямыми в пространстве понимают любой из углов, образованных двумя прямыми, проведенными из одной точки параллельно данным прямым. Обозначим угол между направляющими векторами $\bar{S}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$и $\bar{S}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ данных прямых через φ. Тогда один из смежных углов между прямыми l_1 и l_2 также равен φ.

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}}{\left|\overline{S_1}\right|\left|\overline{S_2}\right|} = \frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^{\,2}+n_1^{\,2}+p_1^{\,2}}\cdot\sqrt{m_2^{\,2}+n_2^{\,2}+p_2^{\,2}}}.$$

Заметим, что если $\square_1 \parallel \square_2$, то векторы $\overline{S_1}, \overline{S_2}$ коллинеарны. Тогда

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Данные условия называются ***условиями параллельности двух прямых в пространстве*** $\mathbf{R}^3$.

Если же $\square_1 \perp \square_2$, то и $\overline{S_1} \perp \overline{S_2}$. Тогда $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2 = 0.$$

Данное условие называется ***условием перпендикулярности двух прямых в пространстве*** $\mathbf{R}^3$.

ПРИМЕР. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-3;4)$ перпендикулярно двум прямым ℓ_1 и ℓ_2.

$$\ell_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-2}; \quad \ell_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-2}{3}.$$

<u>Решение.</u> Так как искомая прямая проходит через данную точку M_0, то ее уравнения будем искать в виде $\frac{x-2}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z-4}{p}$, где $\bar{S} = \{m;n;p\}$ ее неизвестный направляющий вектор.

По условию искомая прямая перпендикулярна прямым ℓ_1, ℓ_2. Тогда $\bar{S} \perp \overline{S_1}, \bar{S} \perp \overline{S_2}$, где $\overline{S_1} = \{3;4;-2\}, \overline{S_2} = \{1;5;3\}$ есть направляющие векторы данных прямых. Следовательно, за направляющий вектор $\bar{S}$ можно принять вектор

$$\bar{S} = \overline{S_1} \times \overline{S_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 22\bar{i} - 11\bar{j} + 11\bar{k}.$$

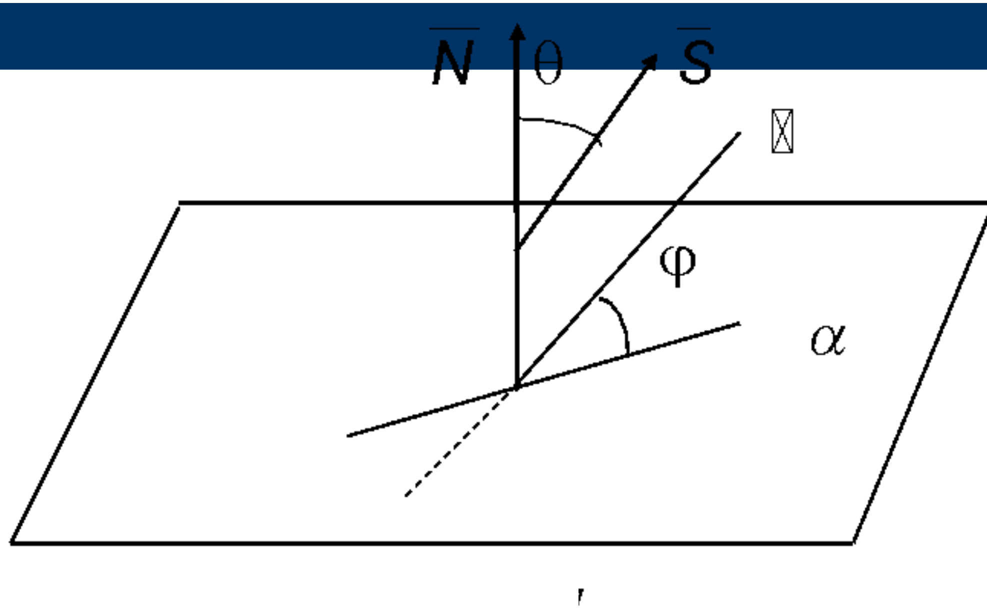
Тогда $m = 22, n = -11, p = 11$, а уравнениями искомой прямой являются уравнения

$$\frac{x-2}{22} = \frac{y+3}{-11} = \frac{z-4}{11} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{1}.$$

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

В ПРОСТРАНСТВЕ R^3

Угол между прямой и плоскостью



Под углом между прямой и плоскостью понимают любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

Обозначим один из смежных углов между прямой и ее проекцией на плоскость через φ, а угол между нормальным вектором $\overline{N}\{A;B;C\}$ плоскости α и направляющим вектором $\overline{S}=\{m;n;p\}$ прямой □ через θ. Тогда либо $\varphi+\theta=\frac{\pi}{2}$, либо $\varphi+\theta=\frac{3\pi}{2}$.

Отсюда $\sin\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ или

$$\sin\varphi=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta.$$

Следовательно, $\sin\varphi=\pm\cos\theta=\pm\frac{\overline{N}\cdot\overline{S}}{\left|\overline{N}\right|\cdot\left|\overline{S}\right|}$.

Тогда, в координатной форме:

$$\sin\varphi=\pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Частные случаи. Если прямая перпендикулярна плоскости α, то векторы $\bar{S}$ и $\bar{N}$ коллинеарны. Тогда

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Если же $\parallel \alpha$, то $\varphi = 0$.

Следовательно и $\sin\varphi = 0$. Тогда

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Таким образом, нами получены ***условия перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости.***

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

Пусть прямая l пересекает плоскость α в некоторой точке $M_1(x_1;y_1;z_1)$. Тогда для определения координат этой точки достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}. \end{cases}$$

Проще всего решить эту систему переходя от канонической формы задания уравнения прямой к ее заданию в параметрической форме, т.е. к форме

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где t – параметр.

Подставляя вместо x, y, z их выражения в первое уравнение системы для определения значения параметра t для точки пересечения, получим

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (Am + Bn + Cp)t = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 - D.$$

Так как по условию прямая пересекает плоскость, то $Am + Bn + Cp \neq 0$. Следовательно, значение параметра t для точки пересечения найдется по формуле

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в каждое из уравнений для переменных, вычислим координаты x_1, y_1, z_1 искомой точки M_1.

ПРИМЕР. Найти проекцию точки M(9;-13;-18) на плоскость $9x - 17y - 15z + 23 = 0$.

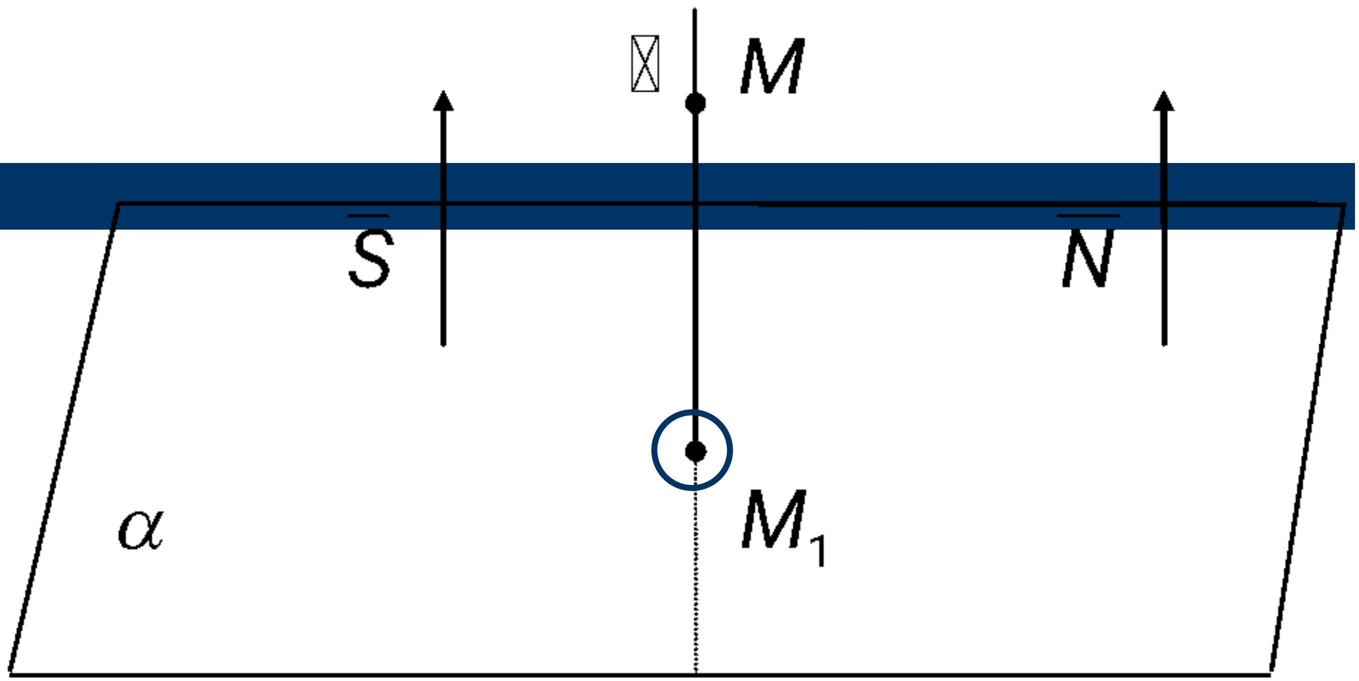
Решение. Проведем через точку M прямую □ перпендикулярно заданной плоскости. Уравнения этой прямой будем искать в форме

$$\frac{x-9}{m} = \frac{y+13}{n} = \frac{z+18}{p}.$$

Из условия перпендикулярности прямой и плоскости при

$A = 19$, $B = -17, C = -15$ получим, что $\dfrac{9}{m} = \dfrac{-17}{n} = \dfrac{-15}{p}$.

Тогда, за проекции m, n, p направляющего вектора $\bar{S}$ прямой □ можно принять числа $m = 9, n = -17, p = -15$.


M
S
N
α
M1

Подставляя их, найдем уравнения перпендикуляра :

$$\frac{x-9}{9}=\frac{y+13}{-17}=\frac{z+18}{-15}$$

Запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 9+9t, \\ y = -13-17t, \\ z = -18-15t. \end{cases}$$

Вычислим значение параметра t для точки пересечения прямой с плоскостью:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}=-\frac{9\cdot 9+(-17)(-13)+(-15)(-18)+23}{9\cdot 9+(-17)\cdot(-17)+(-15)\cdot(-15)}=-1$$

Подставляя значение $t=-1$ в уравнения для переменных, найдем координаты искомой точки

$$M_1: \quad x_1=9-9=0, y_1=-13+17=4, z_1=-18+15=-3.$$

Ответ: $M_1(0;4;-3)$.