§23. Непрерывность функции

п.1. Непрерывность функции в точке

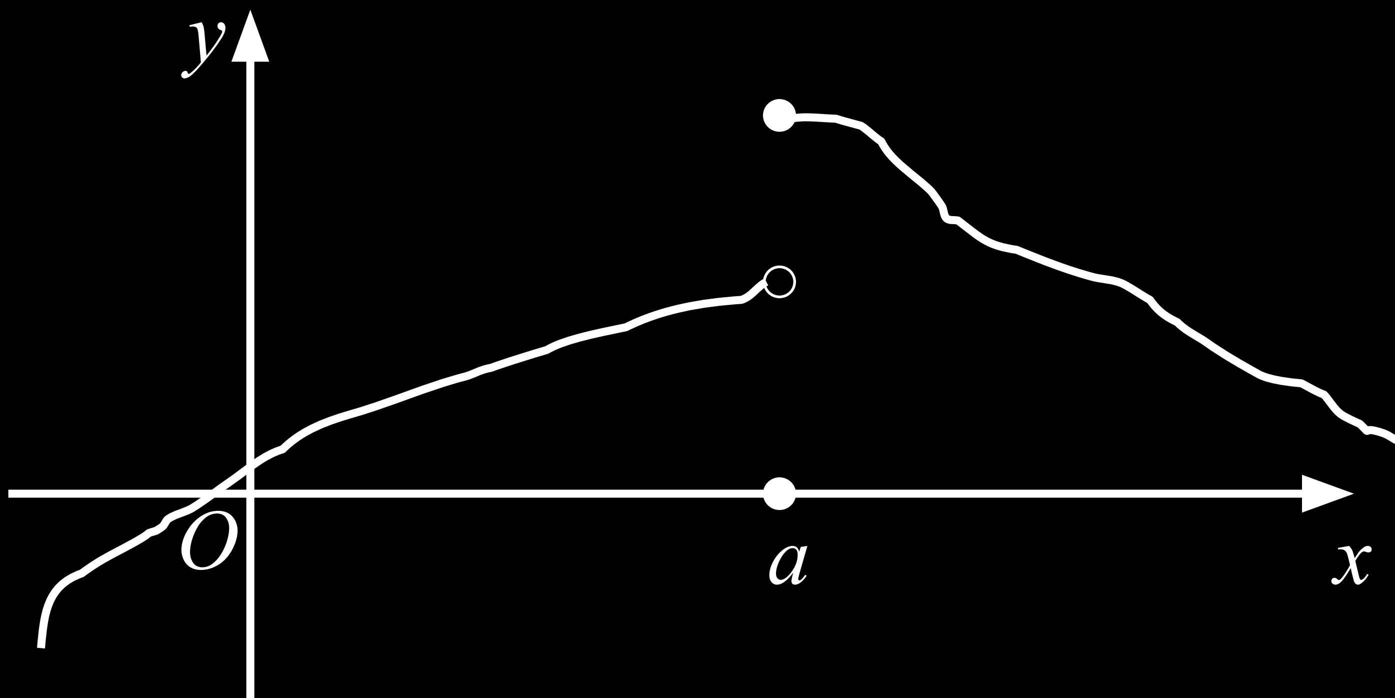
Функция называется *непрерывной* в точке a, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке.

Пример.

Самостоятельно: вычислить указанный предел; привести еще 2 аналогичных примера.

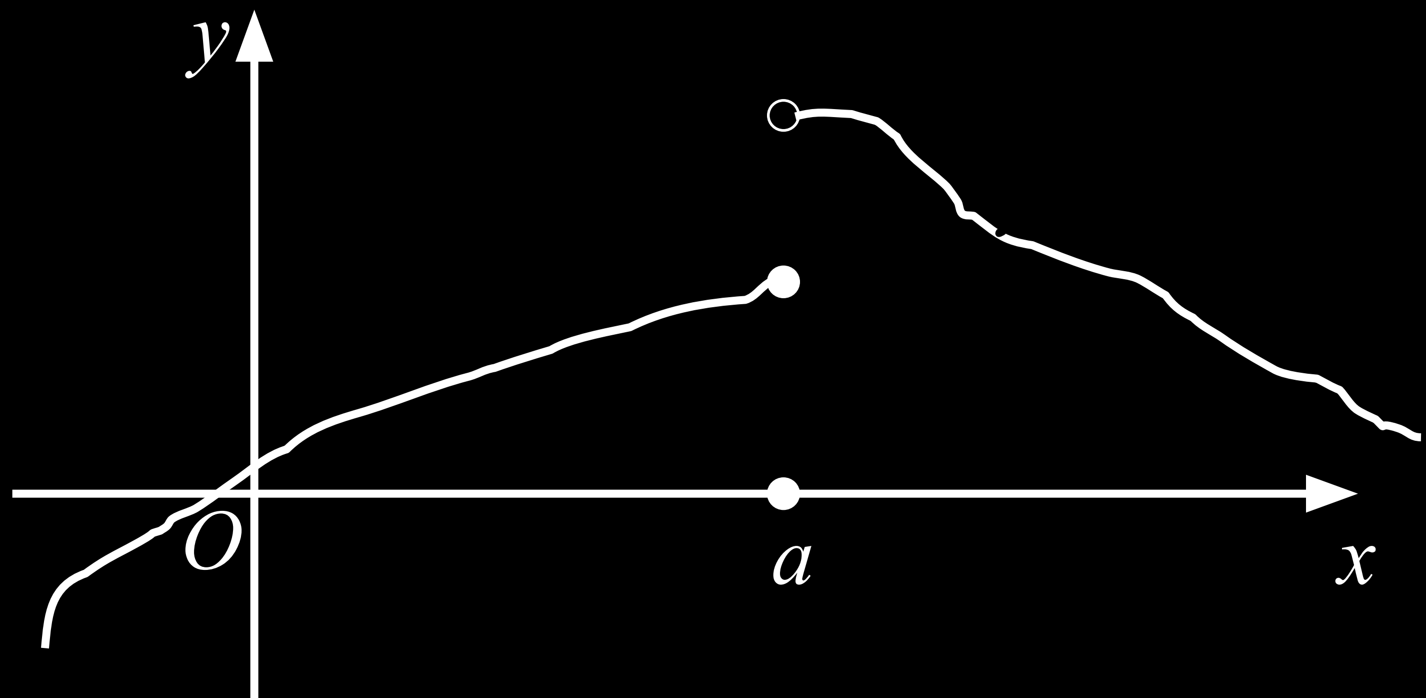
Функция называется *непрерывной справа* в точке a, если

Пример.

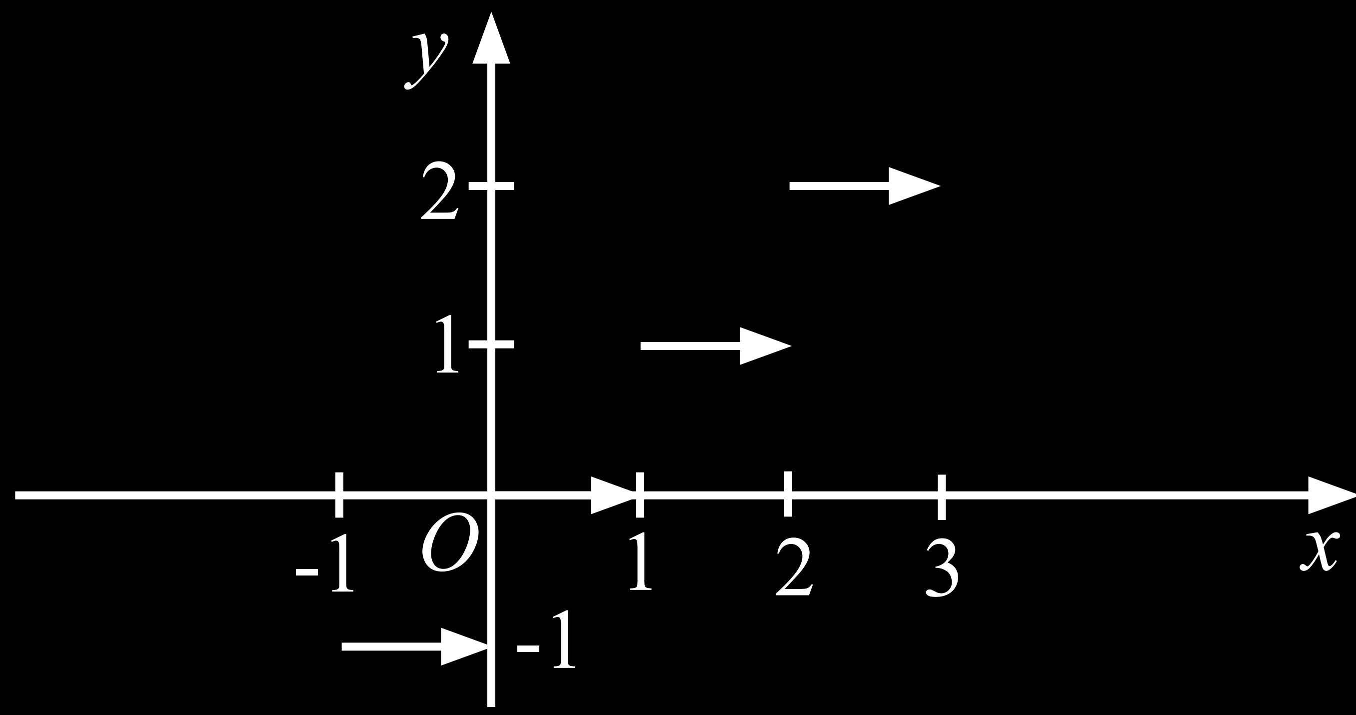


Функция называется *непрерывной слева* в точке a, если

Пример.



Пример.



<u>Теорема 1.</u> Для того, чтобы функция f была непрерывной в точке a необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной в точке a справа и слева.

— приращение аргумента

— приращение функции

Функция f является непрерывной в точке *a*, если ее приращение в этой точке есть БМФ.

п.2. Основные теоремы о непрерывных в точке функций

Теорема 2. (Алгебраические свойства непрерывных функций)

Пусть функции и непрерывны в точке a.

Тогда, функции

также непрерывны в точке a.

Теорема 3. (О непрерывности сложной функции)

Пусть функция непрерывна в точке

функция непрерывна в точке

Тогда, сложная функция

непрерывна в точке

Теорема 4. (О непрерывности обратной функции)

Пусть функция непрерывна в точке

Тогда, если для функции f существует

обратная функция , то она

непрерывна в точке

п.3. Точки разрыва и их классификация

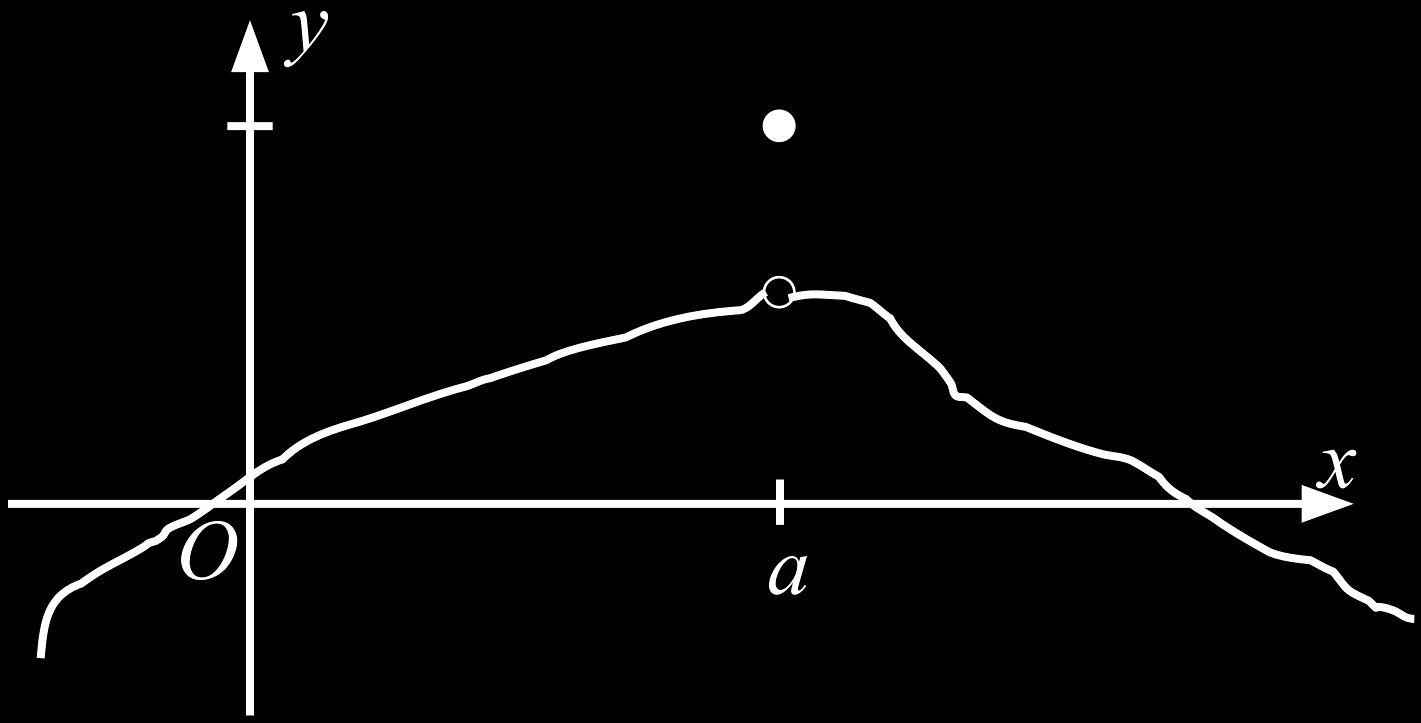
Точками разрыва функции f называются те точки, в которых функция f не является непрерывной.

Точки разрыва

- I род
  - точки устранимого разрыва
  - точки конечного разрыва
- II род

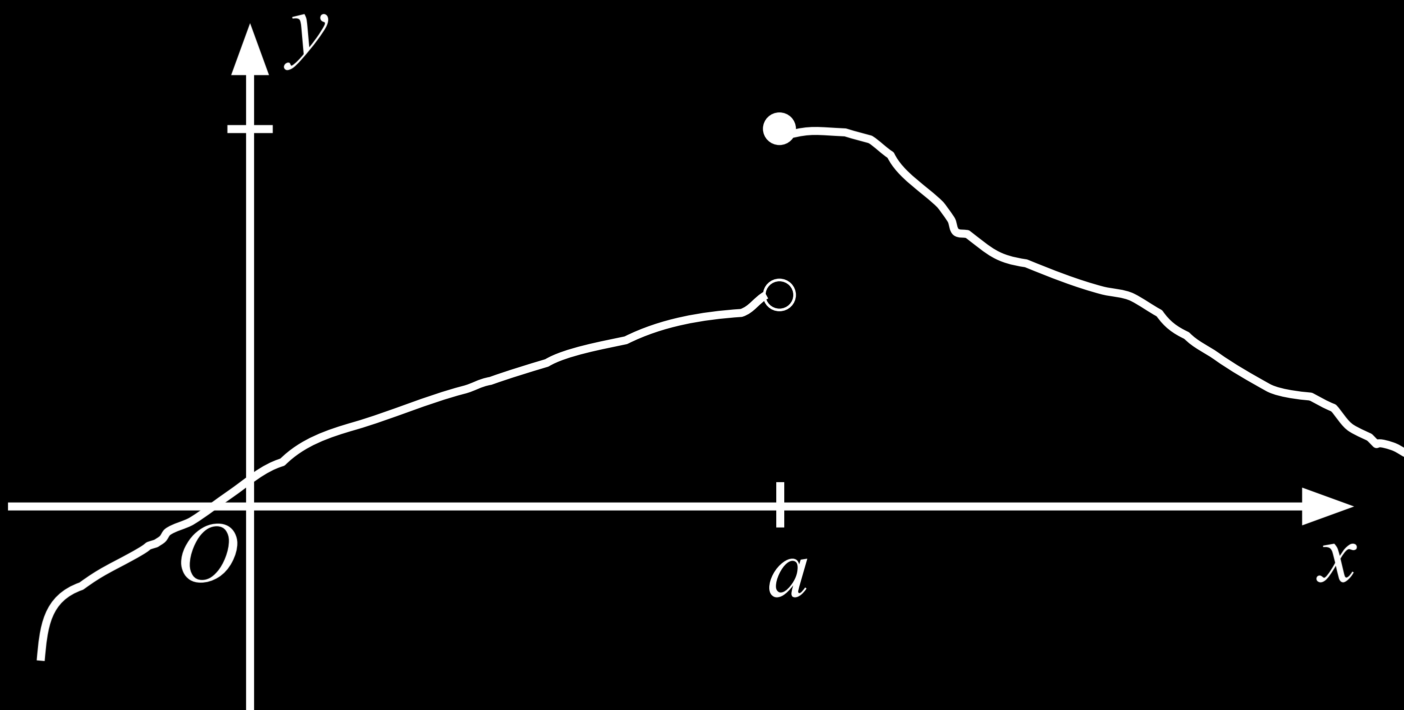
Точка назывется *точкой разрыва I рода* функции , если в этой точке существуют конечные (не равные ∞) односторонние пределы:

— точка устранимого разрыва

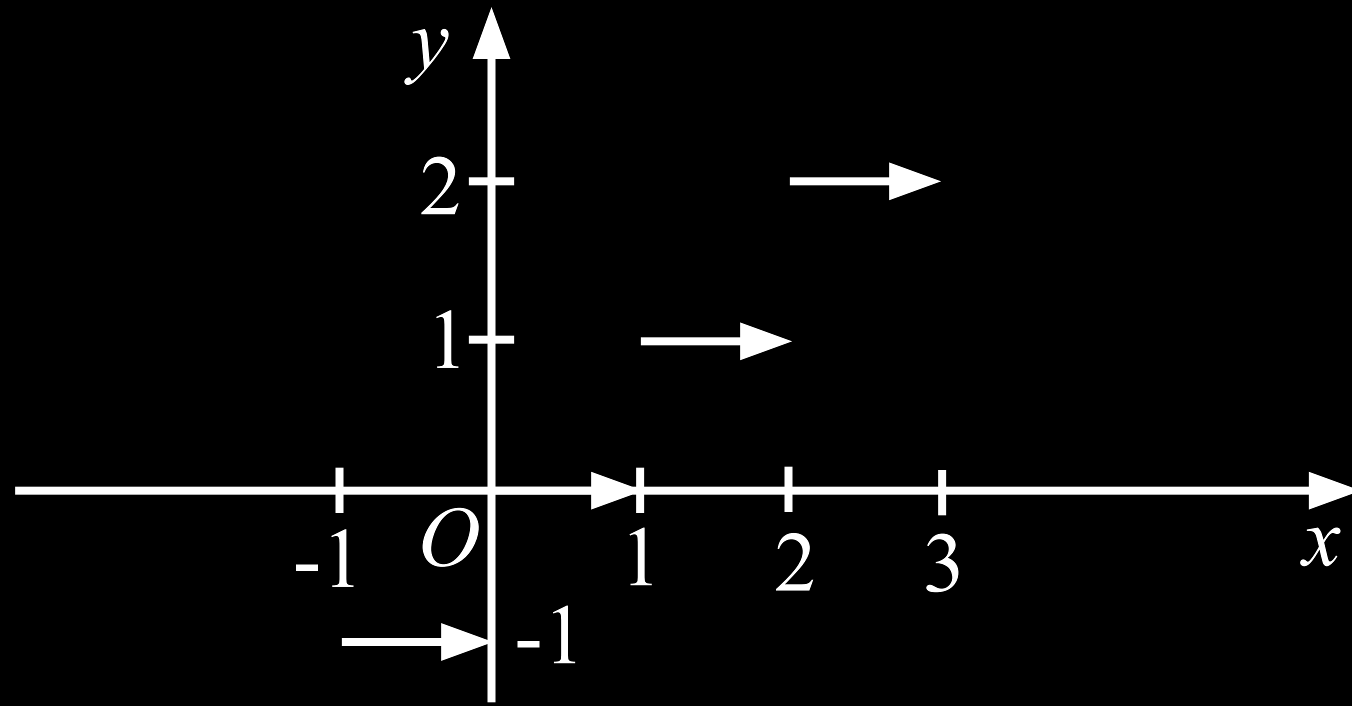


— точка конечного разрыва

— скачок функции



Пример.

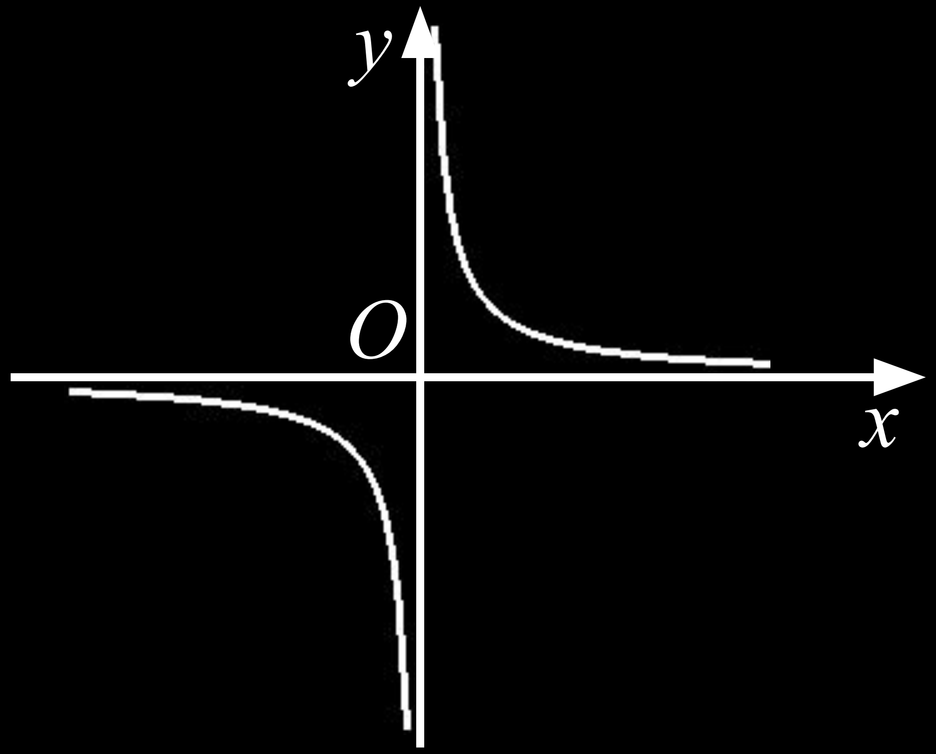


— точка конечного разрыва

— скачок функции

Точка называется *точкой разрыва II рода* функции , если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример.



— точка разрыва
II рода

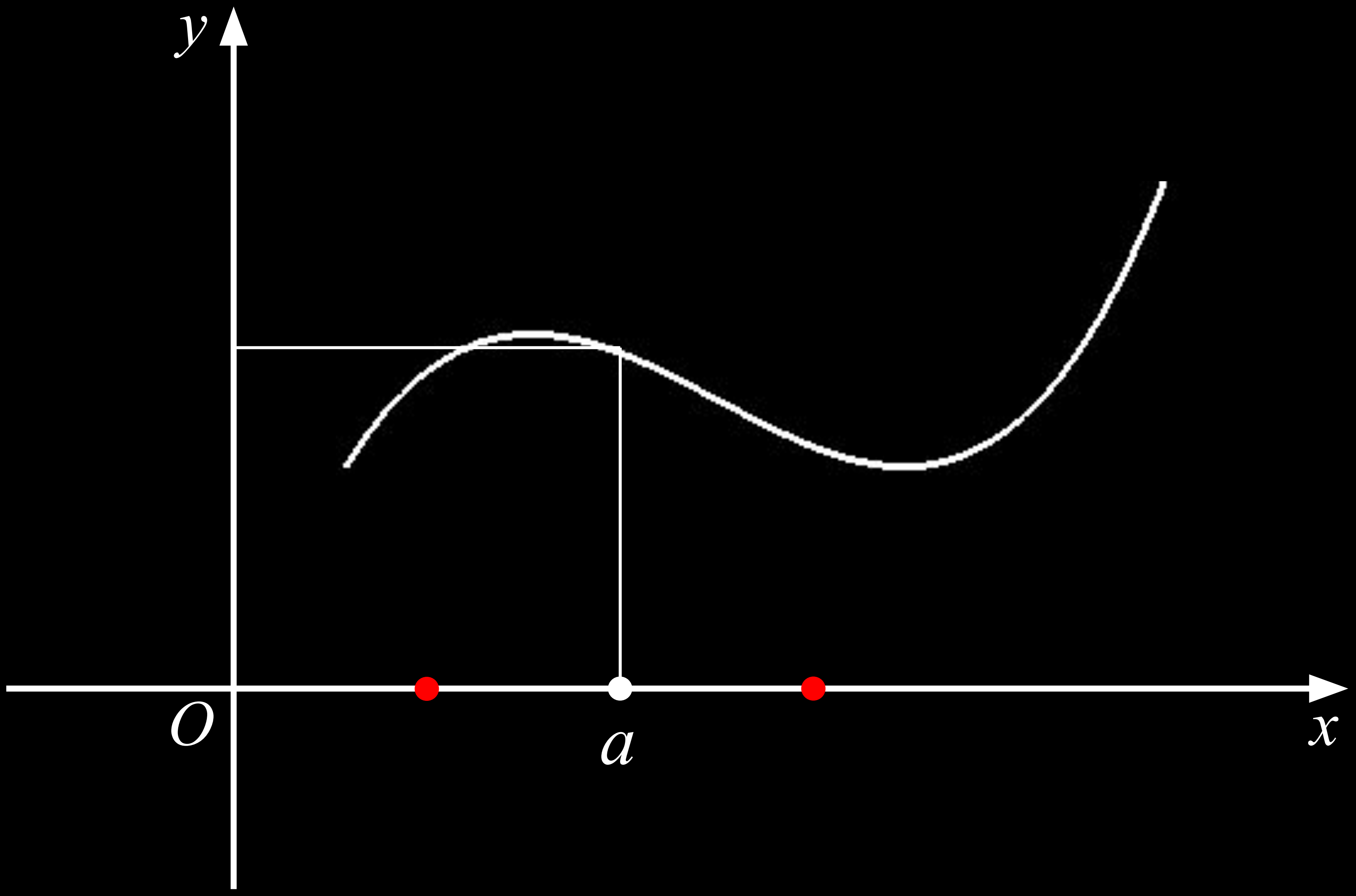
п.4. Основные теоремы о непрерывных на отрезке функциях

Функция называется *непрерывной на отрезке* , если она непрерывна в каждой точке интервала , в точке непрерывна справа, а в точке непрерывна слева.

Теорема 5. (Об устойчивости знака)

Пусть функция непрерывна в точке a и . Тогда существует δ-окрестность
и .
точки a такая, что в этой окрестности функция

имеет тот же знак, что и


y
O
a
x

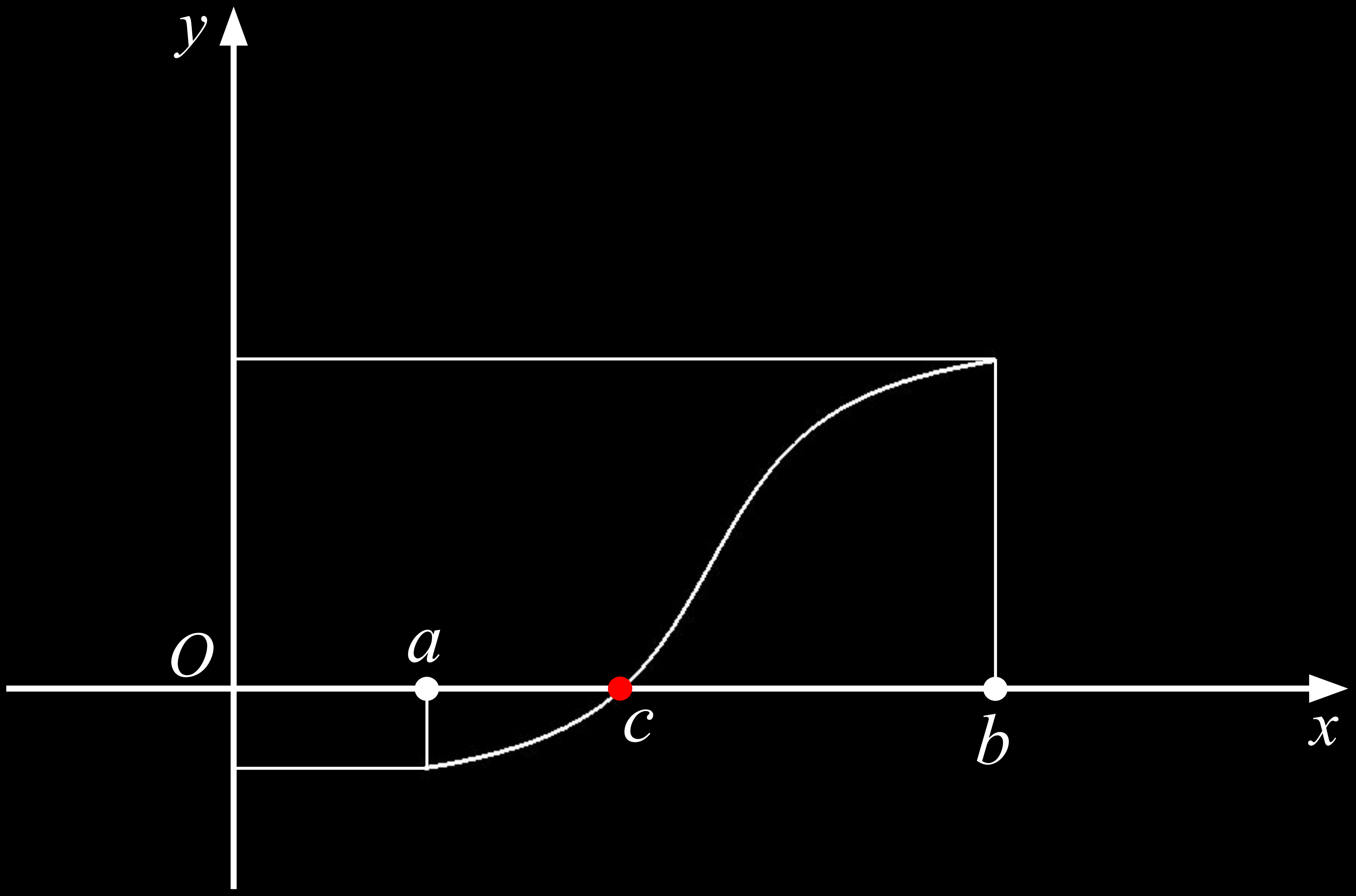
<u>Теорема 6.</u> (Первая теорема Больцано–Коши)

Пусть

функция непрерывна на отрезке

на концах отрезка принимает значения разных знаков:

Тогда



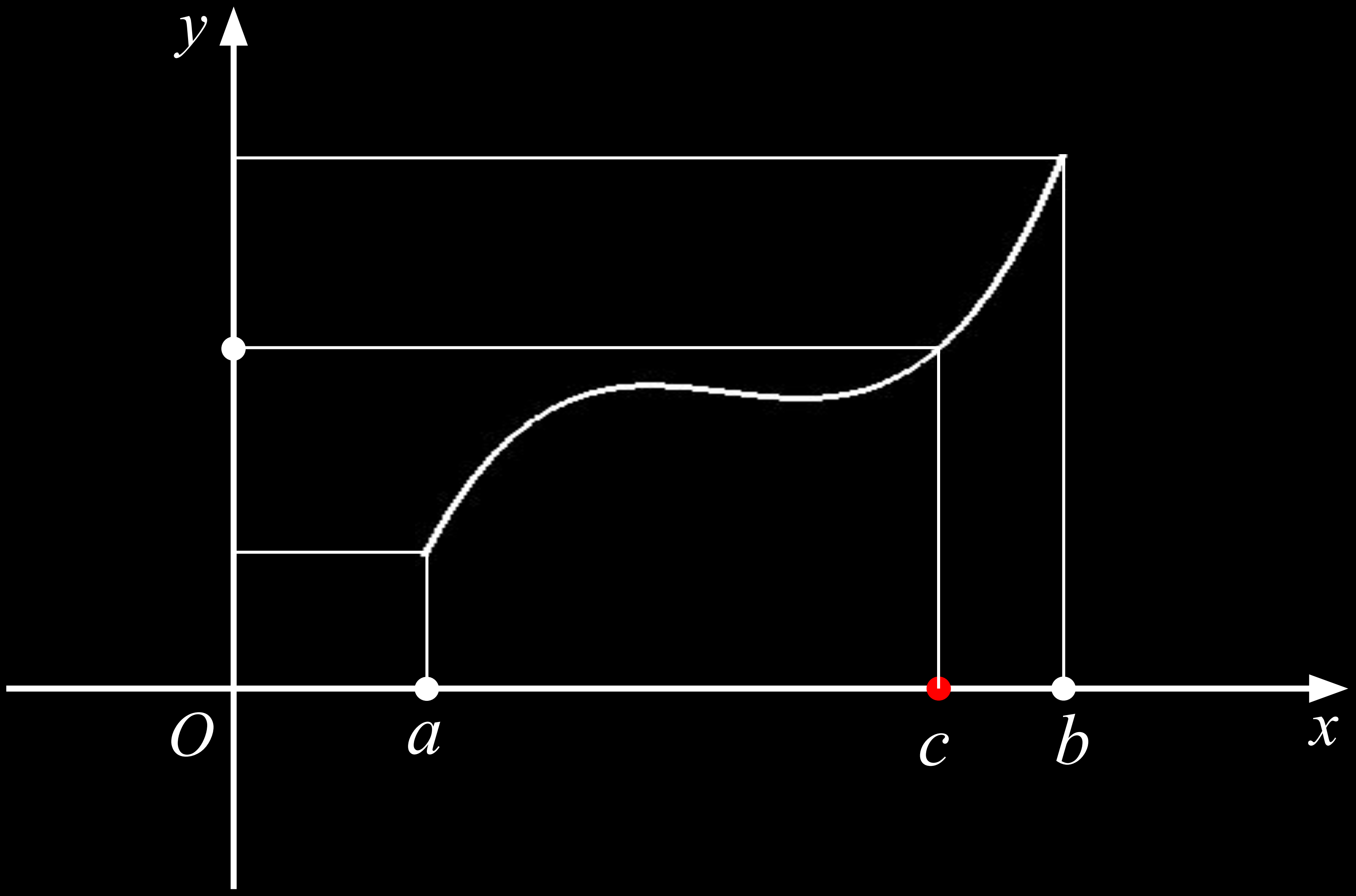
y
O
a
c
b
x

Теорема 7. (Вторая теорема Больцано–Коши)

Пусть

функция непрерывна на отрезке

Тогда



y
O
a
c
b
x

Теорема 8. (Первая теорема Вейерштрасса)

Пусть

функция непрерывна на отрезке

Тогда

она ограничена на этом отрезке.

Теорема 9. (Вторая теорема Вейерштрасса)

Пусть

функция непрерывна на отрезке

Тогда

в некоторых точках этого отрезка она достигает своего максимума и минимума.