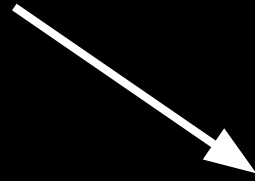


§23. Непрерывность функции

п.1. Непрерывность функции в точке

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке.

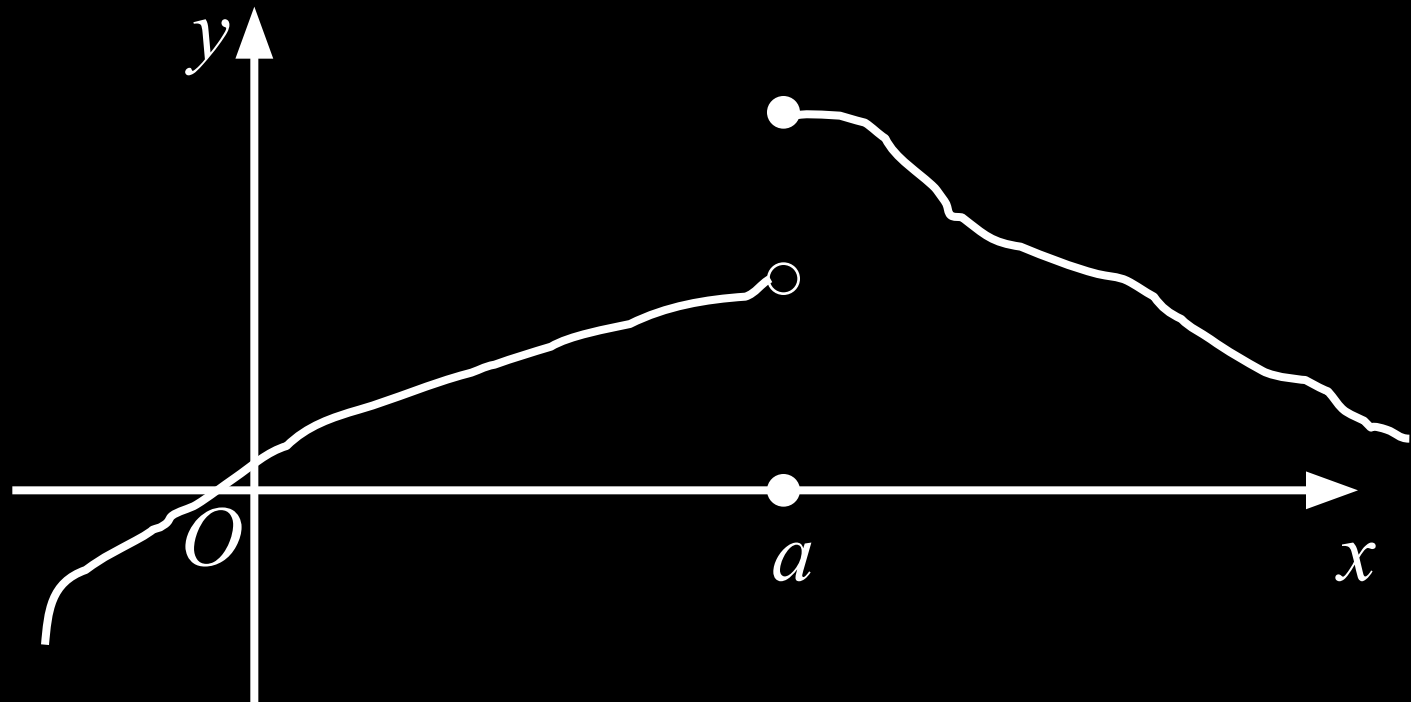


Пример.

Самостоятельно: вычислить указанный предел; привести еще 2 аналогичных примера.

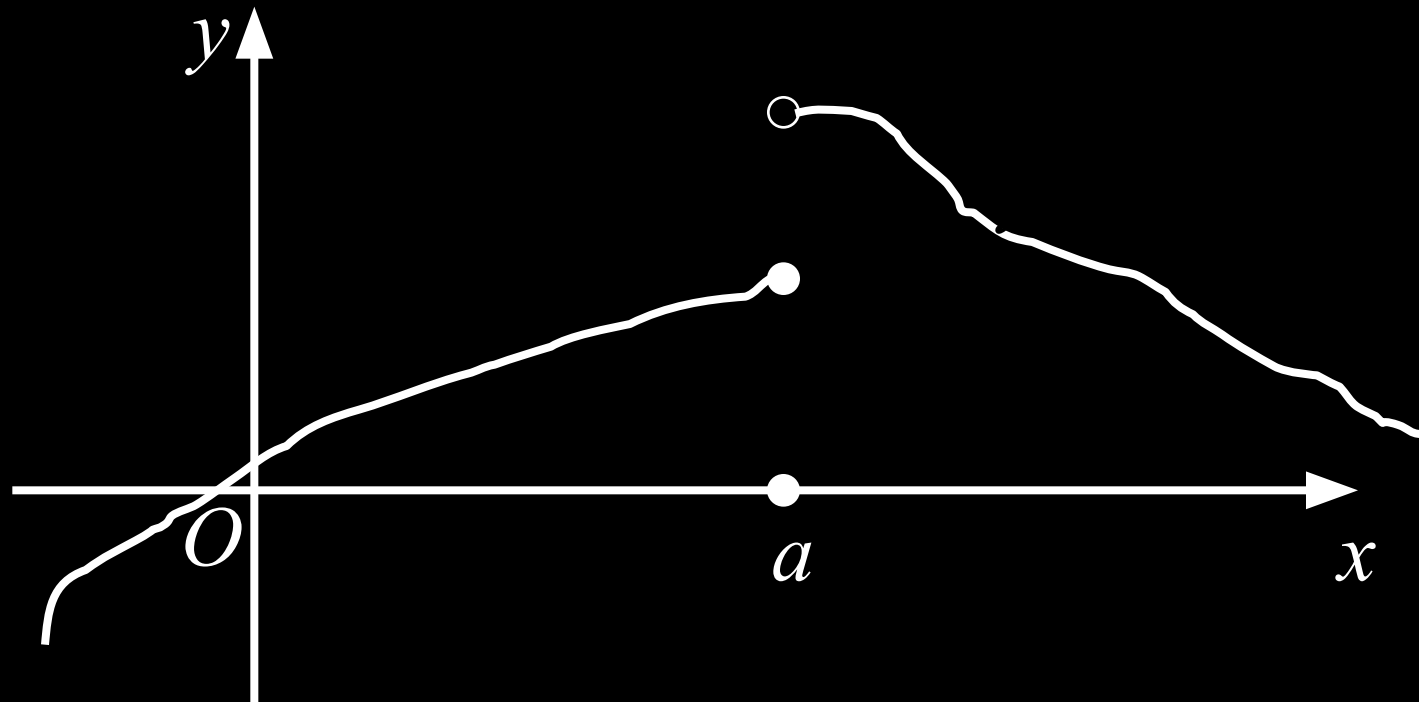
Функция называется *непрерывной справа* в точке a , если

Пример.

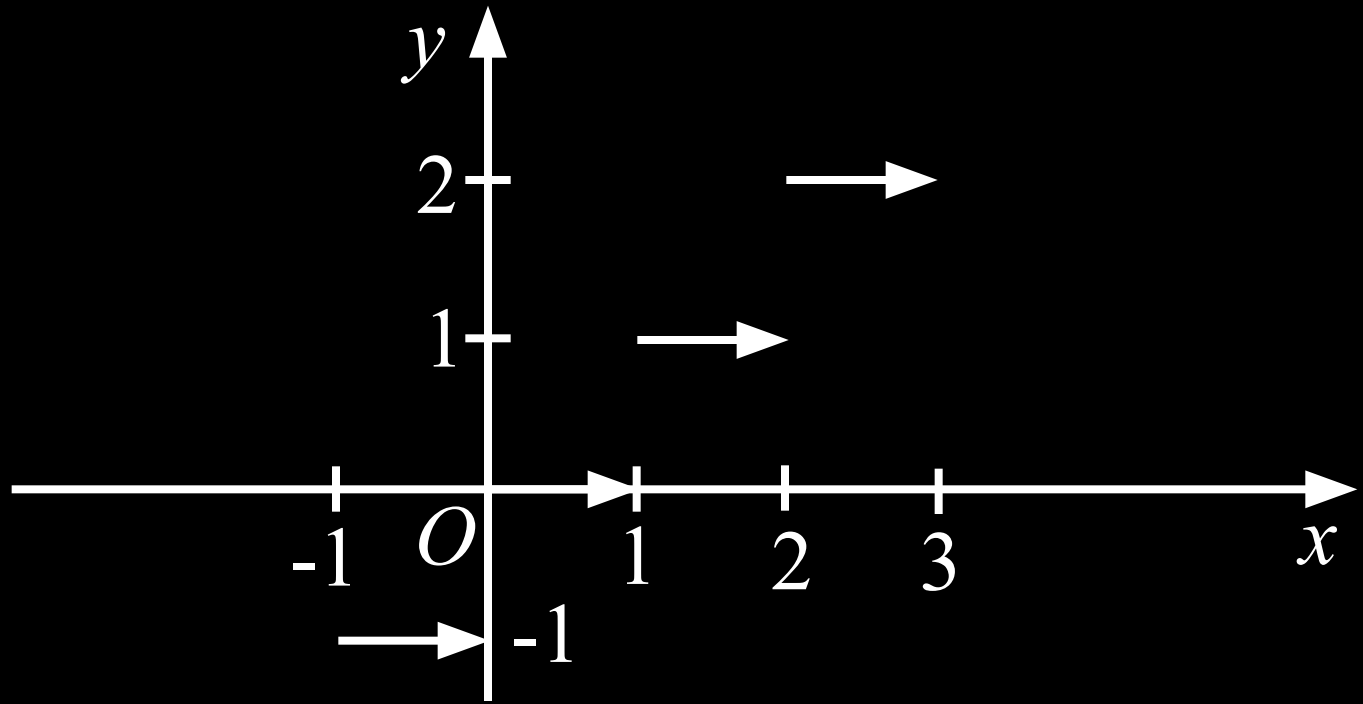


Функция называется *непрерывной слева* в точке a , если

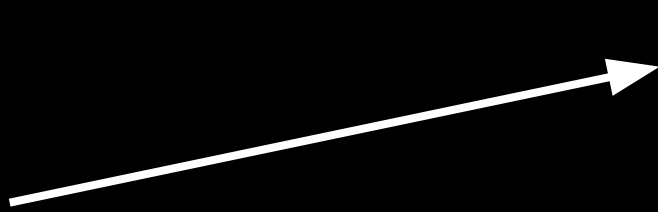
Пример.



Пример.



Теорема 1. Для того, чтобы функция f была непрерывной в точке a необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной в точке a справа и слева.



— приращение
аргумента



— приращение
функции

Функция f является непрерывной в точке a ,
если ее приращение в этой точке есть БМФ.

п.2. Основные теоремы о непрерывных в точке функций

Теорема 2. (Алгебраические свойства непрерывных функций)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a .

Тогда, функции

также непрерывны в точке a .

Теорема 3. (О непрерывности сложной функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0

функция $g(y)$ непрерывна в точке y_0

Тогда, сложная функция $h(x) = g(f(x))$

непрерывна в точке x_0

Теорема 4. (О непрерывности обратной функции)

Пусть функция f непрерывна в точке x_0

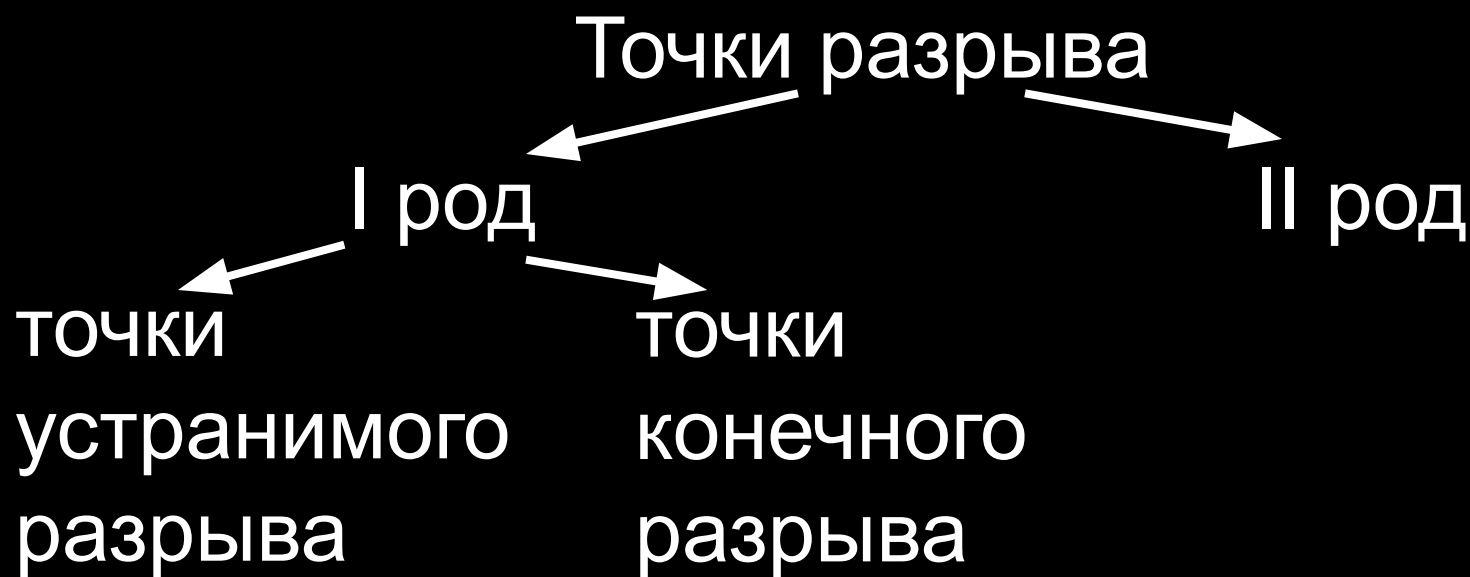
Тогда, если для функции f существует

обратная функция f^{-1} , то она

непрерывна в точке y_0

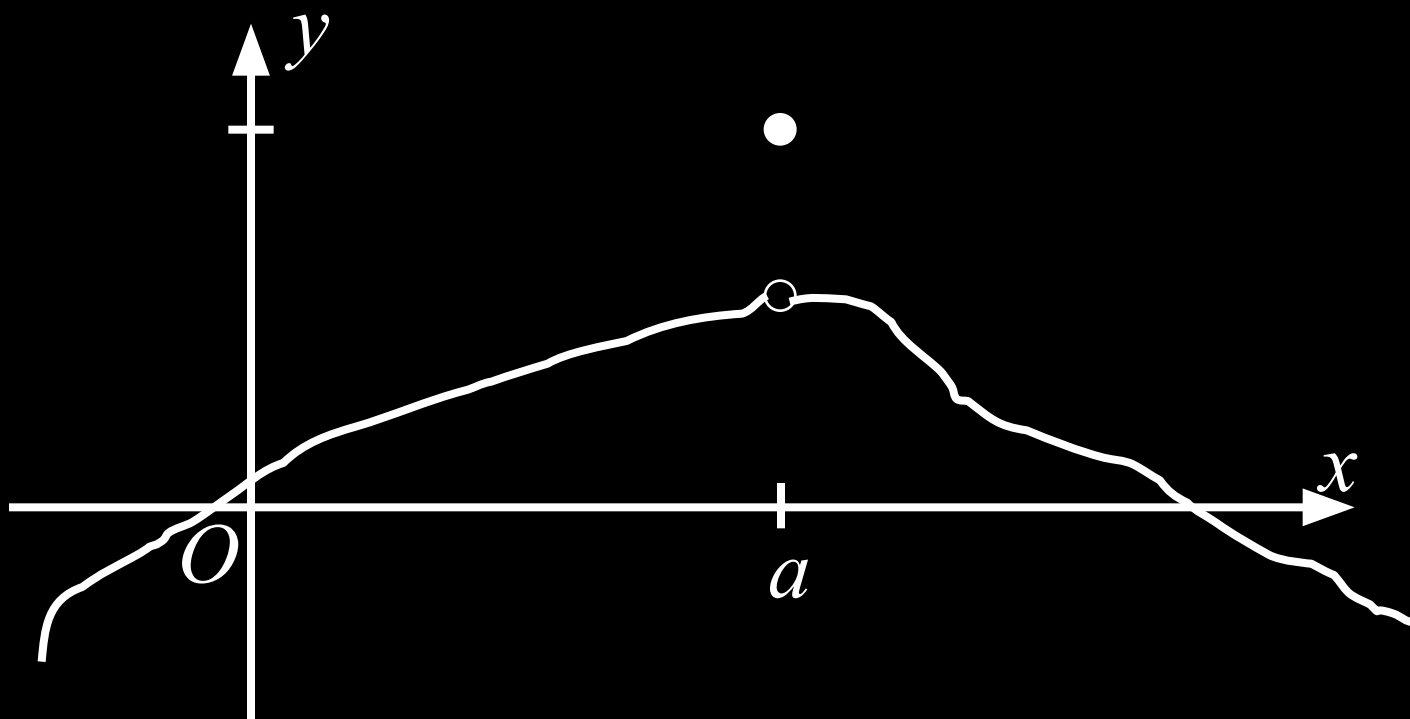
п.3. Точки разрыва и их классификация

Точками разрыва функции f называются те точки, в которых функция f не является непрерывной.



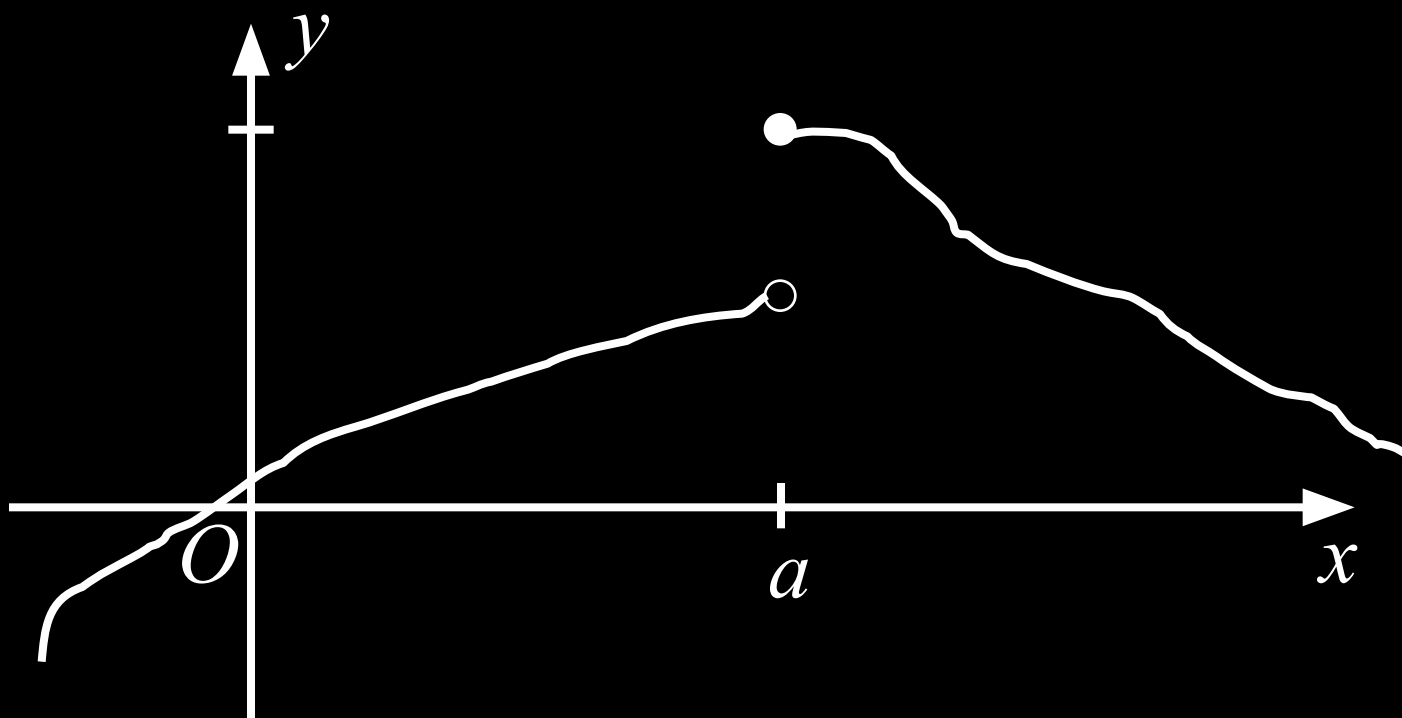
Точка называется *точкой разрыва I рода* функции , если в этой точке существуют конечные (не равные ∞) односторонние пределы:

— точка устранимого разрыва

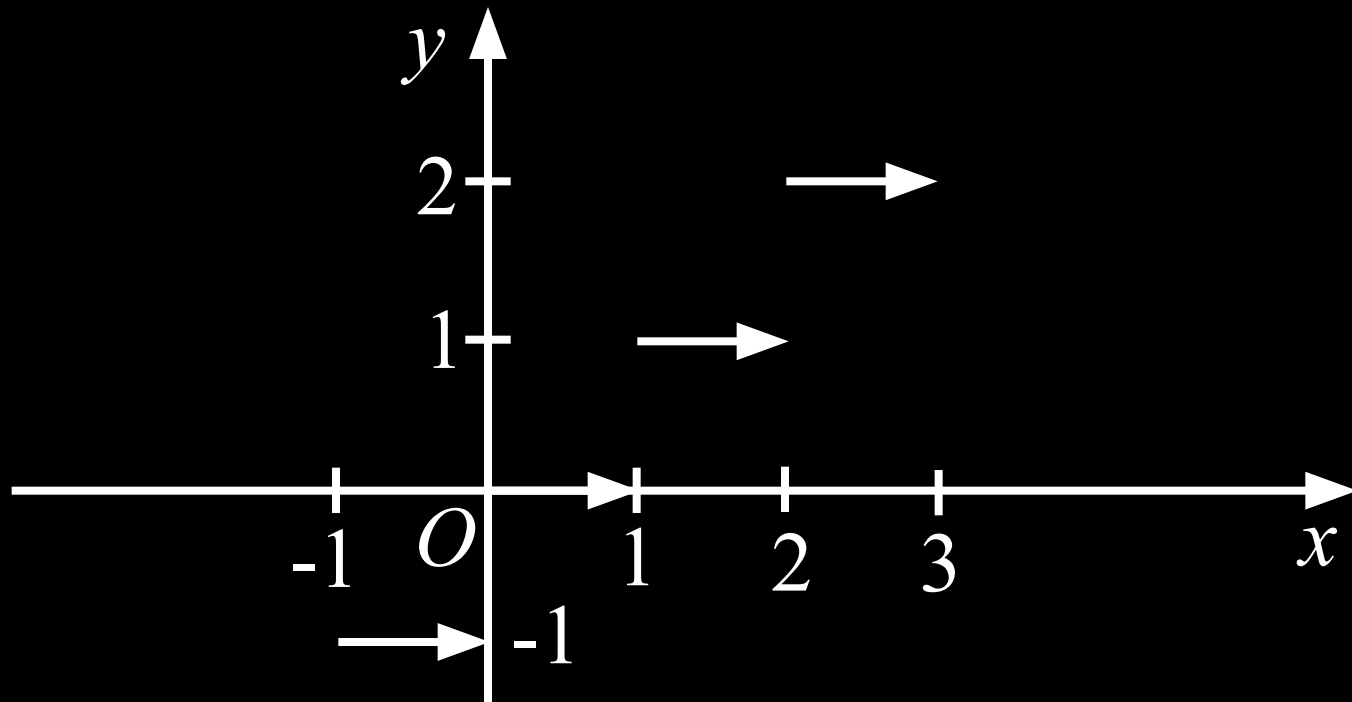


— точка конечного разрыва

— скачок функции



Пример.

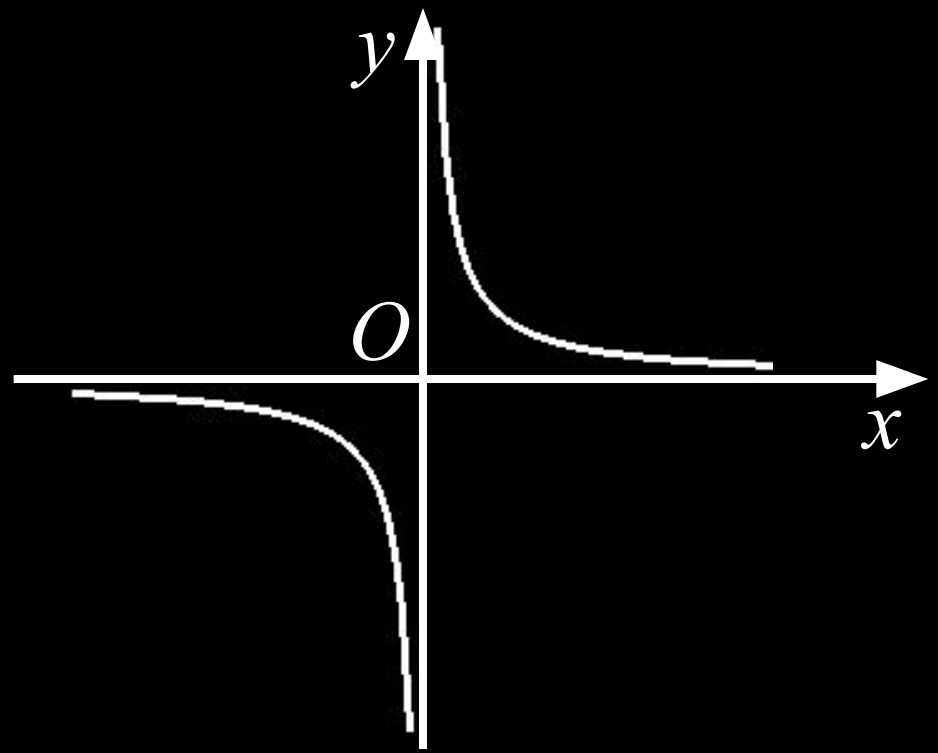


— точка конечного
разрыва

— скачок
функции

Точка называется *точкой разрыва II* рода функции , если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример.



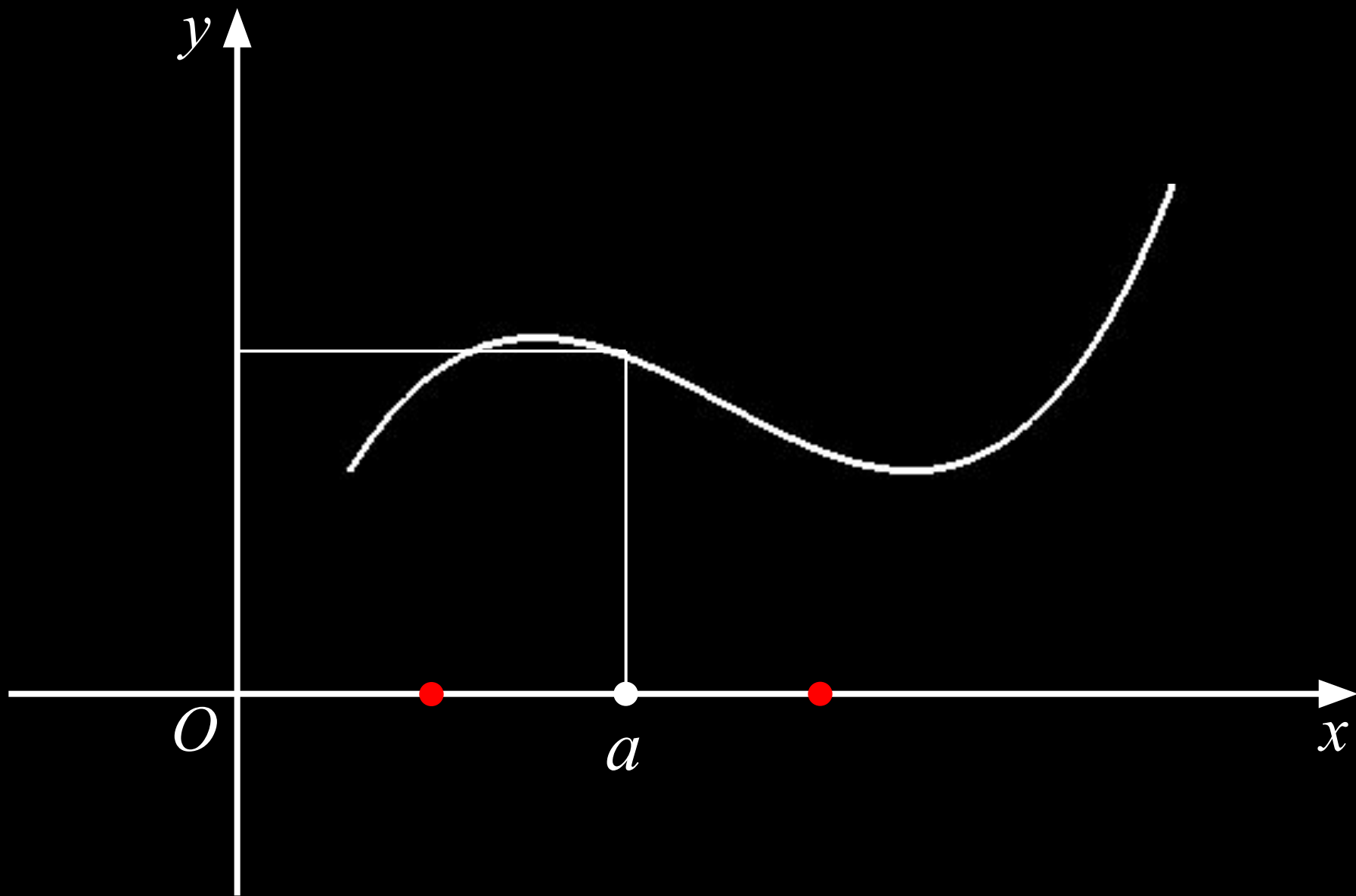
— точка разрыва
II рода

п.4. Основные теоремы о непрерывных на отрезке функциях

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) , в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Теорема 5. (Об устойчивости знака)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$. Тогда существует δ -окрестность точки a такая, что в этой окрестности функция имеет тот же знак, что и $f(a)$.



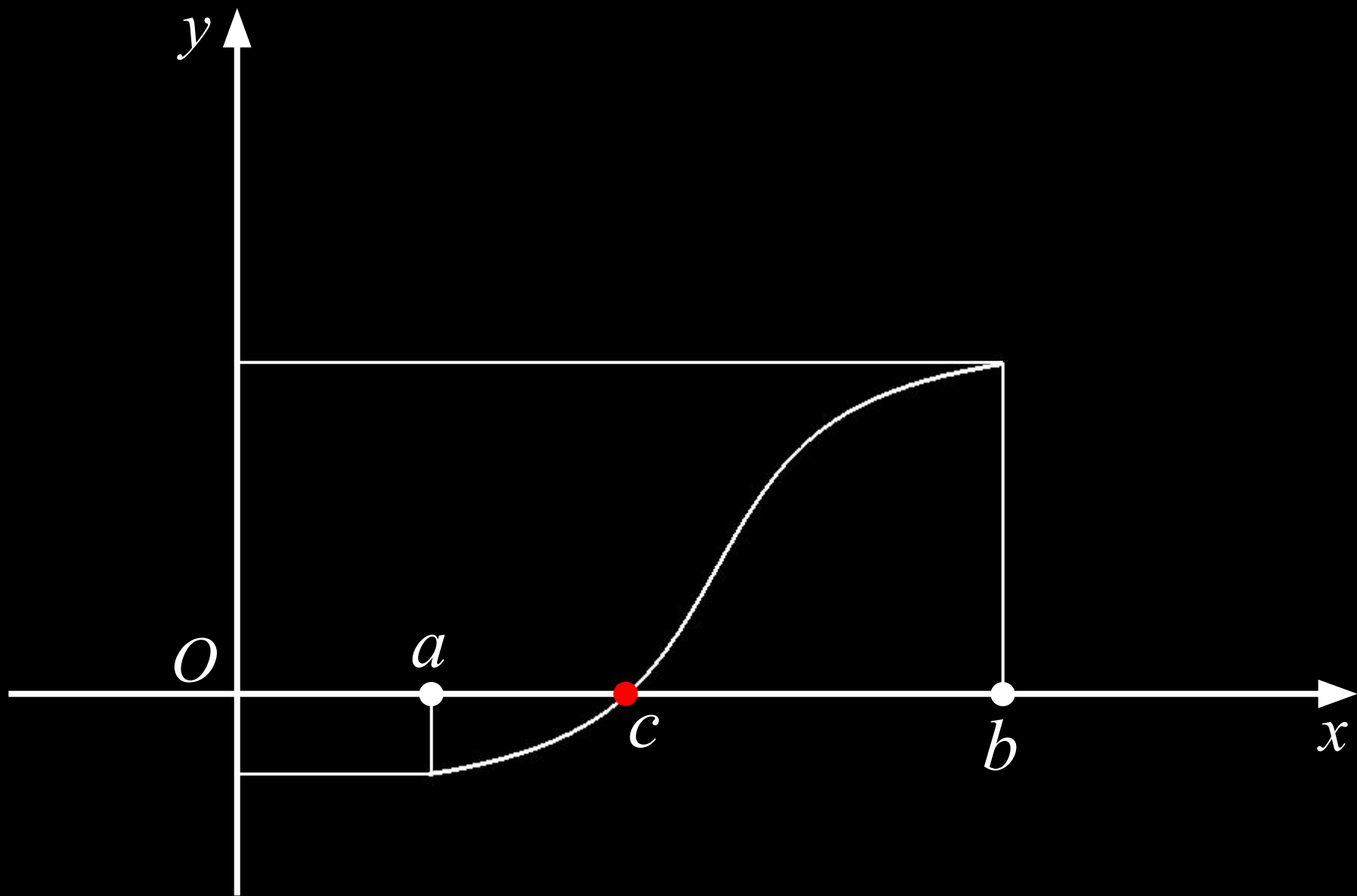
Теорема 6. (Первая теорема Больцано–Коши)

Пусть

функция непрерывна на отрезке

на концах отрезка принимает значения
разных знаков:

Тогда

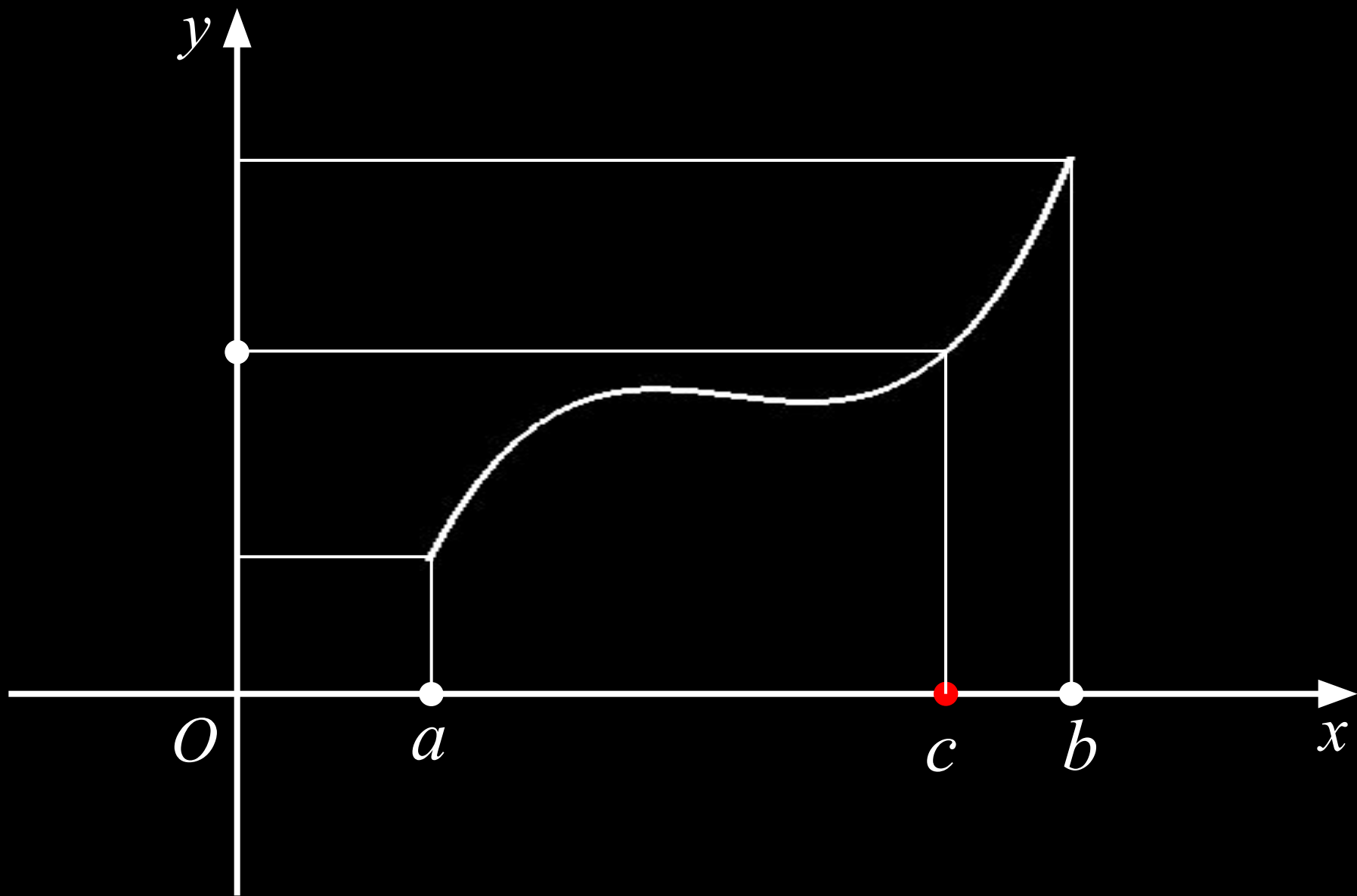


Теорема 7. (Вторая теорема Больцано–Коши)

Пусть

функция непрерывна на отрезке

Тогда



Теорема 8. (Первая теорема Вейерштрасса)

Пусть

функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

Тогда

она ограничена на этом отрезке.

Теорема 9. (Вторая теорема Вейерштрасса)

Пусть

функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

Тогда

в некоторых точках этого отрезка она достигает своего максимума и минимума.