

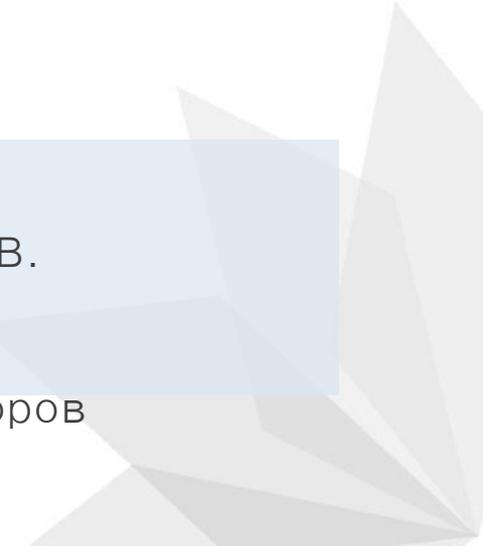
Алгебраические структуры,
порожденные отношением причинности
на пространствах–временах

В.А. Столбова, ФН1–81

Научный руководитель: А.В.

Филиновский

Консультант: А.М. Никифоров

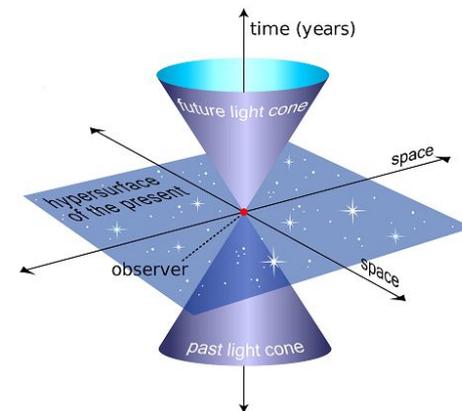
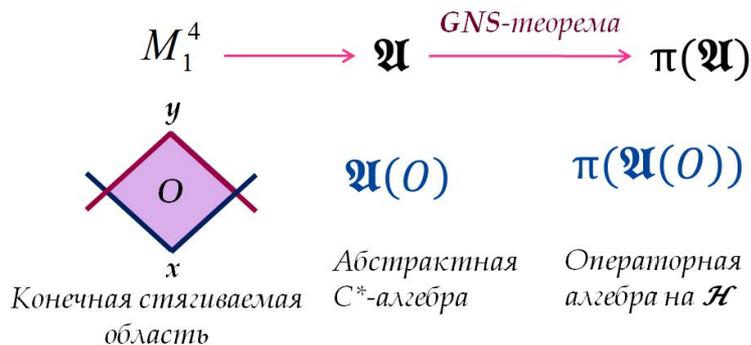


Цели и задачи

- ❖ организация **причинных подмножеств** пространственно-временных многообразий в **алгебраические структуры** (решетки [1]);
 - ❖ **изучение свойств** полученных классических конструкций
 - ❖ **сопоставление** с квантовомеханическими аналогами

Мотивировки

- ❖ Алгебраическая квантовая теория поля (АКТП) [2],[3]
- ❖ Общая теория относительности [4]



Структура пространства-времени –

структура дифференцируемого многообразия с заданной на нем Лоренцевой метрикой и ассоциированной с ней аффинной связностью

[1] Grätzer, G. (2002). *General lattice theory*. Springer Science & Business Media.

[2] Baumgärtel H., Wollenberg M. *Causal nets of operator algebras: Mathematical aspects of algebraic quantum field theory*. – 1992.

[3] Haag R., Kastler D. *An algebraic approach to quantum field theory //Journal of Mathematical Physics*. – 1964. – Т. 5. – №. 7. – С. 848-861.

[4] Hawking S. W., Ellis G. F. R. *The large scale structure of space-time*. – Cambridge university press, 1973. – Т. 1

Решетки (алгебраические системы). Определение

$$A = (\{a\}, \wedge, \vee)$$

$$\wedge: A^{\times 2} \rightarrow A \quad \vee: A^{\times 2} \rightarrow A$$

$$(\forall a, a) \boxtimes a \wedge a \quad (\forall a, a) \boxtimes a \vee a$$



Решеткой называется множество с двумя введенными на нем операциями

такими, что выполняются следующие свойства:

идемпотентность

$$a \wedge a = a$$

$$a \vee a = a$$

коммутативность

$$a \wedge a = a \wedge a$$

$$a \vee a = a \vee a$$

ассоциативность

$$a \wedge (a \wedge a) = (a \wedge a) \wedge a$$

$$a \vee (a \vee a) = (a \vee a) \vee a$$

тождества

поглощения

$$a \wedge a = a$$

$$a \vee a = a$$

$$\forall a, a, a, a \in A$$

Виды решеток

Модулярная решетка

$$a \wedge (a \vee b) = (a \wedge b) \vee a$$

$$\forall a, a, a \in A$$

Ограниченная решетка

$$0_A \leq a \leq 1_A \quad \forall a \in A$$

Ортодополнением

называется морфизм

$${}^{\perp}: A \rightarrow A$$

$$a \boxtimes a^{\perp}$$

такой, что:

$$\forall a \in A \quad \exists a^{\perp} \Rightarrow$$

Решетка с ортодополнениями

$$a \wedge a^{\perp} = 0_A$$

$$a \vee a^{\perp} = 1_A$$

$$a \leq a \Rightarrow a^{\perp} \leq a^{\perp}$$

$$\overline{(a^{\perp})^{\perp}} = a$$

Дополнением

элемента $a \in A$ называется элемент $a^N \in A$:

$$a \wedge a^N = 0_A$$

$$a \vee a^N = 1_A$$

$\forall a \in A \quad \exists a^N \Rightarrow$ Решетка с дополнениями

Дистрибутивная решетка

$$a \vee (a \wedge b) = (a \vee a) \wedge (a \vee b)$$

$$a \wedge (a \vee b) = (a \wedge a) \vee (a \wedge b)$$

Булева алгебра B_{∞}

дистрибутивная решетка с ортодополнениями

Причинное дополнение. Отношение причинной несвязанности

CS-дополнением, или **причинным дополнением**, подмножества $s \subseteq X$ называется отображение

$$s \overset{cs}{\perp} : 2^X \rightarrow 2^X$$

такое, что

$$\begin{cases} s \subseteq s \\ \bigcup_j s_j = \bigcup_j s_j \\ s \cap s = \emptyset \end{cases}$$

CS-замыкание, или **причинное замыкание**, подмножества $s \subseteq X$

$$s \overset{2}{\overset{cs}{\perp}} = s \overset{cs}{\perp} \equiv s \overset{cm}{\perp}$$

Семейство **причинно замкнутых подмножеств** множества X

$${}^{cs}Cm(X) \equiv \left\{ \begin{array}{l} cm_s \in 2^X \\ cm_s = cm_s \end{array} \right\}$$

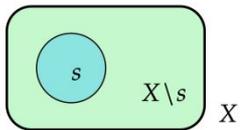
Отношение **CS-несвязанности**, или **причинной несвязанности**

$$s \overset{cs}{\perp} s \leftrightarrow s \subseteq s$$

Примеры задания причинного дополнения

На множестве

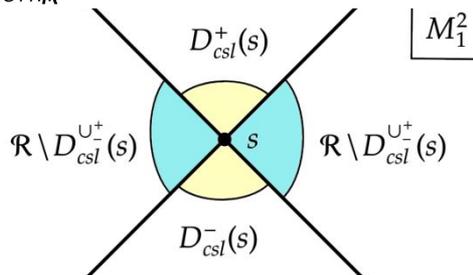
$$s \overset{cs}{\perp} : 2^X \rightarrow 2^X$$



На глобально-гиперболическом пространстве-времени \mathbb{R}

$$s \overset{cs}{\perp} : 2^{\mathbb{R}} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$$

$$s \overset{cs}{\perp} s \equiv s \overset{csl}{\perp} s \equiv \mathbb{R} \setminus D_{csl}^{\cup \pm}(s)$$



На множестве подпространств \mathbb{R}_λ бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства

$$H, \dim(H) = \infty$$

$$h_\lambda \overset{cs}{\perp} h_\lambda \equiv h_\lambda^\perp = \left\{ \begin{array}{l} \phi \in H \mid \langle \phi, \psi_{\lambda_j} \rangle = 0 \\ \forall \psi_{\lambda_j} \in h_\lambda \end{array} \right\}$$

Булева алгебра **причинно замкнутых подмножеств** некоторого множества

$$B \overset{oo}{=} {}^{cs}Cm(X) \equiv A \overset{cs}{\perp} Cm(X) \equiv \left({}^{cs}Cm(X), \wedge, \vee, O_{A \overset{cs}{\perp} Cm(X)}, 1_{A \overset{cs}{\perp} Cm(X)}, \overset{cs}{\perp} \right)$$

$$\begin{aligned} cm_{s''} \overset{cm}{\wedge} cm_{s'} &\equiv cm_{s''} \cap cm_{s'} \\ cm_{s''} \overset{cm}{\vee} cm_{s'} &\equiv \overset{cs}{\perp} \frac{cm_{s''} \cup cm_{s'}}{\overset{cm}{\perp}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O_{A \overset{cs}{\perp} Cm(X)} &= \emptyset \\ 1_{A \overset{cs}{\perp} Cm(X)} &= X \end{aligned}$$

Классические решетки

1. Решетки **конусов** M_1^D

на

$$\underline{ACon}(M_1^D) \equiv \left(\underline{Con}(M_1^D), \wedge, \vee \right)$$

$$\underline{ACon}(M_1^D) \equiv \left(\underline{Con}(M_1^D), \wedge, \vee, \mathbf{0}_{\underline{ACon}(M_1^D)}, \mathbf{1}_{\underline{ACon}(M_1^D)} \right)$$

2. Решетки **диамантов** M_1^D

на

$$\underline{ADmd}(M_1^D)_V \equiv \left(\underline{Dmd}(M_1^D)_V, \wedge, \vee \right)$$

$$\underline{ADmd}(M_1^D)_V \equiv \left(\underline{Dmd}(M_1^D)_V, \wedge, \vee, \mathbf{0}_{\underline{ADmd}(M_1^D)_V}, \mathbf{1}_{\underline{ADmd}(M_1^D)_V} \right)$$

3. Решетка **времениподобных выпуклых подмножеств**

$$M_1^D \underline{ACnv}(M_1^D) \equiv \left(\underline{Cnv}(M_1^D), \wedge, \vee \right)$$

Квантовомеханические решетки

1. Гильбертова решетка

$$\underline{A-Cm}(H)_\perp \equiv \left(\underline{Cm}(H), \wedge, \vee, \mathbf{0}_{\underline{A-Cm}(H)}, \mathbf{1}_{\underline{A-Cm}(H)}, \underline{\perp} \right)$$

2. Проекторная решетка

$$\underline{AP}(H)_\perp \equiv \left(\underline{P}(H), \wedge, \vee, \mathbf{0}_{\underline{AP}(H)}, \mathbf{1}_{\underline{AP}(H)}, \underline{\perp} \right)$$

3. Решетка **алгебр фон Нойманна**

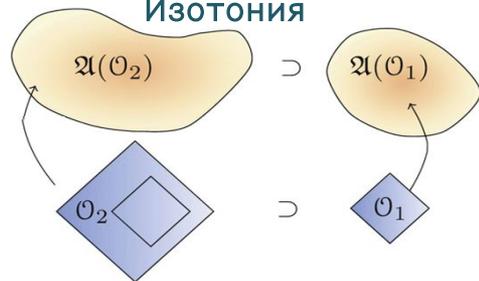
$$\underline{AV}(H) \equiv \left(\underline{N}, \wedge, \vee, \mathbf{0}_{\underline{AV}(H)}, \mathbf{1}_{\underline{AV}(H)} \right)$$

Решетка
причинно замкнутых
подмножеств

$$\underline{A^{cs}Cm}(X)_\perp \equiv$$

$$\left(\underline{Cm}(X), \wedge, \vee, \mathbf{0}_{\underline{A^{cs}Cm}(X)_\perp}, \mathbf{1}_{\underline{A^{cs}Cm}(X)_\perp}, \underline{\perp} \right)$$

1. Изотония



$$O_1 \Subset O_2 \implies A(O_1) \Subset A(O_2)$$

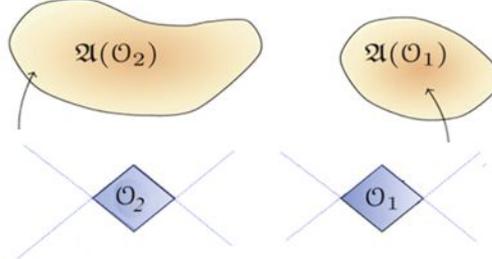
$$\forall U, V: U \subseteq V \implies \exists \text{in}_U^V: A(U) \rightarrow A(V)$$

$$U \subseteq V \subseteq W \implies \text{in}_U^W \circ \text{in}_V^W = \text{in}_U^W$$

$$\text{in}_U^W \circ \text{in}_V^W = \text{in}_U^W$$

$$A(U) \rightarrow A(V) \rightarrow A(W)$$

2. Микропричинность



$$[A(O_1), A(O_2)] = 0$$

3. Ковариантность

$$\rho_{(\Lambda, a)}(A(O)) = A(\Lambda O + a)$$

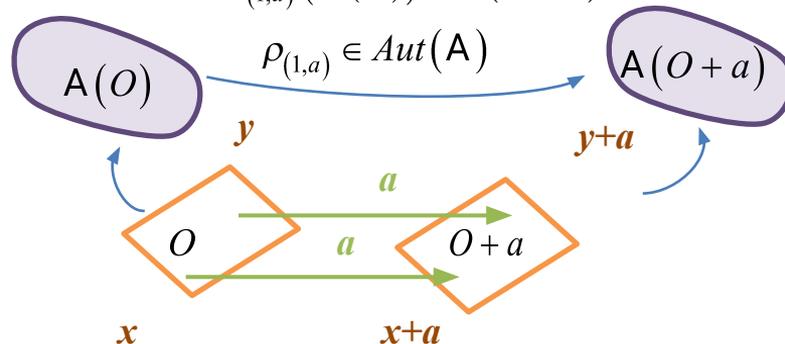
$$\forall (\Lambda, a) \in \Pi_+^\uparrow,$$

$$\rho_{(\Lambda, a)} \in \text{Aut}(A).$$

Трансляционная ковариантность

$$\rho_{(1, a)}(A(O)) = A(O + a)$$

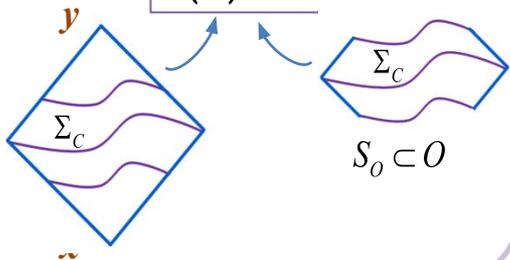
$$\rho_{(1, a)} \in \text{Aut}(A)$$



Аксиомы Хаага–Кастлера

4. Аксиома временного слоя

$$A(O) = A(S_\wedge)$$



5. Спектральное условие

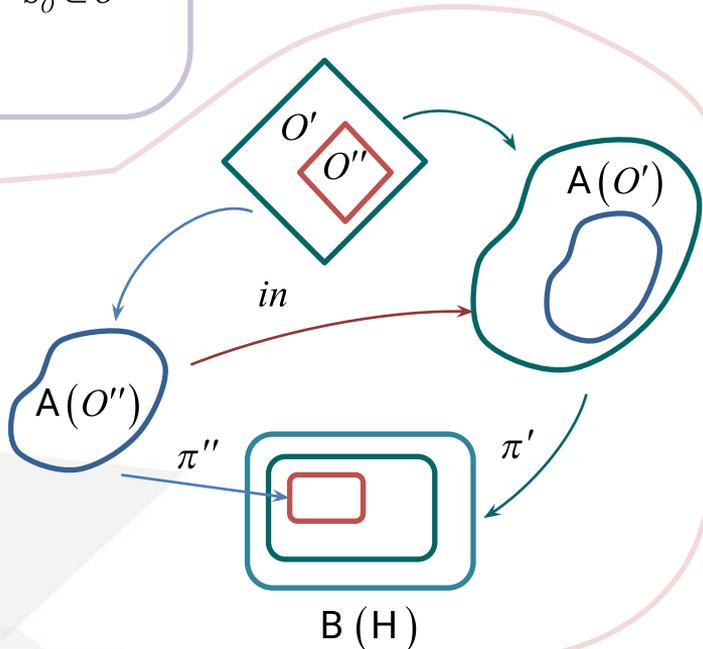
$$\text{spec}(P_\beta) \subset \bar{V}_+$$

$$O' \supseteq O''$$

$$\pi' : A(O') \rightarrow B(H)$$

$$\pi'' : A(O'') \rightarrow B(H)$$

$$\pi'|_{in(A(O''))} = \pi''$$



Локально ковариантная квантовая теория поля [5]

$$\boxed{Loc} \xrightarrow{F \equiv (A, \rho)} \boxed{Obs}$$

$$Ob(Loc) \ni (R, g)$$

– глобально-гиперболическое пространство-время

$$Mor(Loc) \ni$$

$$\iota : (R_1^4, g) \rightarrow (R_2^4, g)$$

– изометрия, сохраняющая ориентацию и причинную структуру

$$Ob(Obs) \ni A$$

– C^* -алгебры с единицей

$$Mor(Obs) \ni \rho$$

– точные \dagger -гомоморфизмы, сохраняющие единицу

[5] Brunetti R., Fredenhagen K., Verch R. The generally covariant locality principle—a new paradigm for local quantum field theory // Communications in Mathematical Physics. – 2003. – Т. 237. – №. 1-2. – С. 31-68.

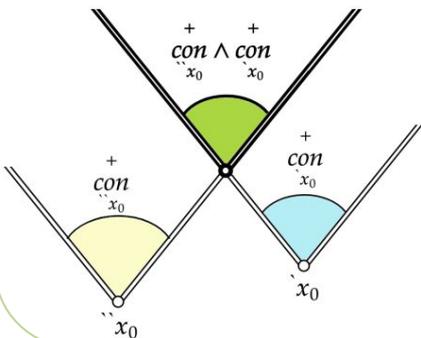
Классические решетки

$$\underline{A}_{Con}(M_1^D) \equiv \left(\underline{Con}(M_1^D), \wedge, \vee \right)$$

– дистрибутивна
я

Операция пересечения $+tl_0$
 \wedge

$$\begin{matrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ con \wedge con \equiv con \cap con \\ \overset{+}{x_0} & \overset{+}{x_0} & \overset{+}{x_0} & \overset{+}{x_0} & \overset{+}{x_0} \end{matrix}$$



Решетки конусов на M_1^D

$$\underline{A}_{Con}(M_1^D) \equiv \left(\overset{\infty}{Con}(M_1^D), \wedge, \vee, 0_{\underline{A}_{Con}(M_1^D)}, 1_{\underline{A}_{Con}(M_1^D)} \right)$$

– ограниченная

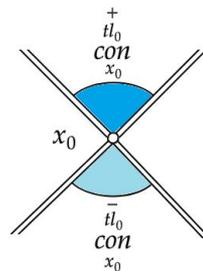
$$0_{\underline{A}_{Con}(M_1^D)} \equiv \emptyset, 1_{\underline{A}_{Con}(M_1^D)} = M_1^D$$

Семейства конусов на M_1^D

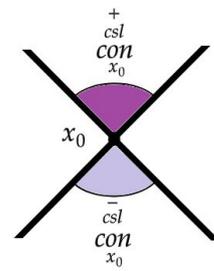
Времениподобные

Причинные

Верхние

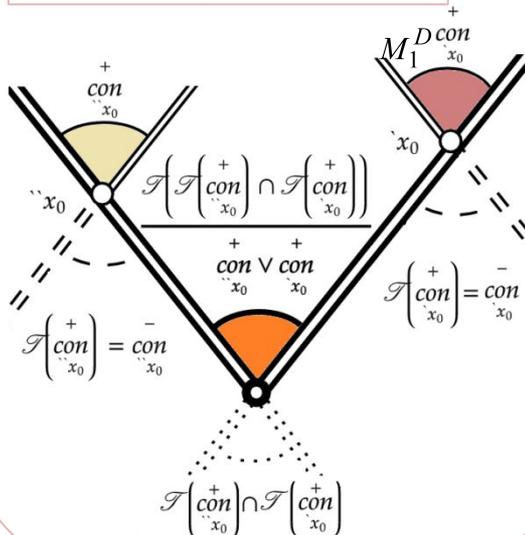


Нижние

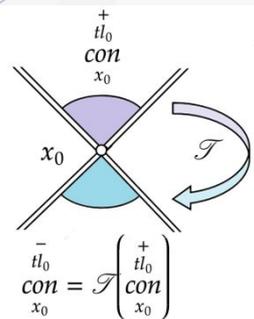


Операция объединения $+tl_0$
 \vee

$$\begin{matrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ con \vee con \equiv T \left(T con \cap T con \right) \\ \overset{+}{x_0} & \overset{+}{x_0} & \overset{+}{x_0} & \overset{+}{x_0} & \overset{+}{x_0} \end{matrix}$$



Биекция T



$$T \begin{pmatrix} sgn_{\boxtimes l} \\ con \\ x_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -sgn_{\boxtimes l} \\ con \\ x_0 \end{pmatrix}$$

$sgn \in \{+, -\}$

$$\overset{+}{tl_0} Con(M_1^D) = \left\{ \begin{matrix} \overset{+}{tl_0} \\ con \\ x_0 \end{matrix} \right\}, \overset{+}{tl_0} con \circ \left\{ x \hat{=} M_1^D \mid q_h(x - x_0) > 0, (x - x_0)^0 > 0 \right\}$$

$$\overset{-}{tl_0} Con(M_1^D) = \left\{ \begin{matrix} \overset{-}{tl_0} \\ con \\ x_0 \end{matrix} \right\}, \overset{-}{tl_0} con \circ \left\{ x \hat{=} M_1^D \mid q_h(x - x_0) > 0, (x - x_0)^0 > 0 \right\}$$

$$\overset{+}{csl} Con(M_1^D) = \left\{ \begin{matrix} \overset{+}{csl} \\ con \\ x_0 \end{matrix} \right\}, \overset{+}{csl} con \circ \left\{ x \hat{=} M_1^D \mid q_h(x - x_0) \geq 0, (x - x_0)^0 > 0 \right\}$$

$$\overset{-}{csl} Con(M_1^D) = \left\{ \begin{matrix} \overset{-}{csl} \\ con \\ x_0 \end{matrix} \right\}, \overset{-}{csl} con \circ \left\{ x \hat{=} M_1^D \mid q_h(x - x_0) \geq 0, (x - x_0)^0 < 0 \right\}$$

Классические решетки

$$\underline{A Dmd(M_1^D)}_V \equiv \left(Dmd(M_1^D)_V, \wedge, \vee \right)$$

–
дистрибутивна
я

Решетки **диамантов** на M_1^D

$$\underline{A Dmd(M_1^D)}_V \equiv \left(Dmd(M_1^D)_V, \wedge, \vee, 0, 1 \right)$$

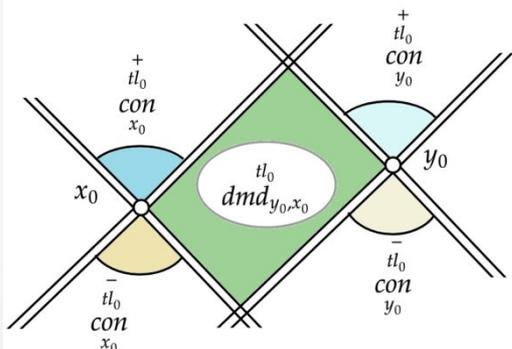
–
ограниченная

$$0_{\underline{A Con(M_1^D)}} \equiv \emptyset, 1_{\underline{A Con(M_1^D)}} = M_1^D$$

Семейства диамантов M_1^D

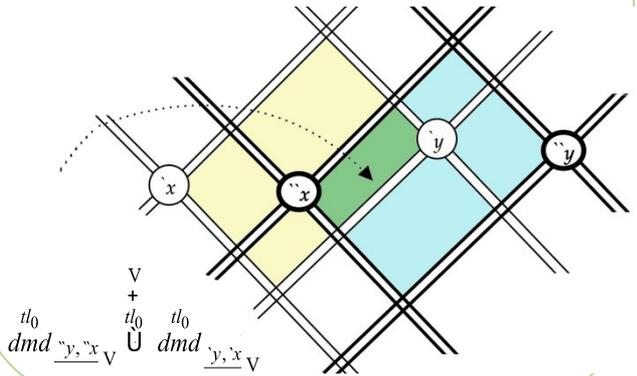
$$dmd \underline{y, x}_V \circ con \hat{U} con \zeta con \hat{U} con$$

$$con, con \hat{I} Con(M_1^D); l: \hat{I} \{tl_0, csl\}$$



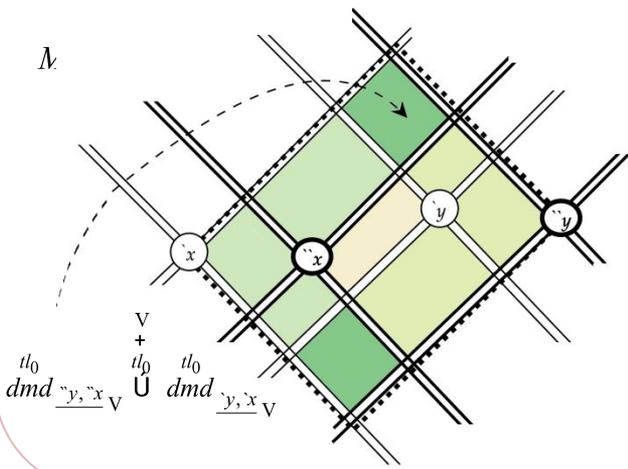
Операция пересечения

$$dmd \underline{y, x}_V \hat{U} dmd \underline{y, x}_V$$



Операция объединения

$$dmd \underline{y, x}_V \hat{U} dmd \underline{y, x}_V$$



$$\underline{Cnv}^{tl}(M_1^D) \equiv \left(Cnv^{tl}(M_1^D), \wedge, \vee \right)$$

$$\frac{tl''}{cnv} \wedge \frac{tl'}{cnv} \equiv \frac{tl''}{cnv} \cap \frac{tl'}{cnv}$$

$$\frac{\frac{tl''}{cnv} \vee \frac{tl'}{cnv} \equiv \text{span}_{dmd}^{tl} \left(\frac{tl''}{cnv} \cup \frac{tl'}{cnv} \right)}{\cup_{y, x \in cnv \cup cnv}^{tl'' \quad tl'} dmd(y, x)} \quad \frac{tl''}{cnv} \cup \frac{tl'}{cnv} \cup \boxtimes_{y \in cnv}^{tl''} dmd(y, x)}{x \in cnv}^{tl'}$$

Времяподобно выпуклым подмножеством

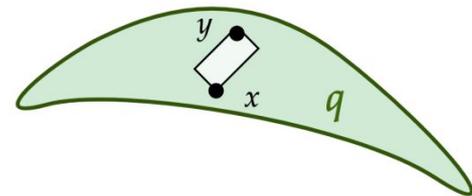
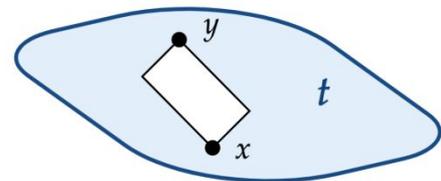
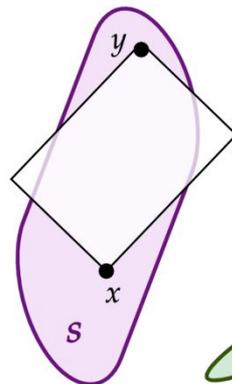
пространства-времени $\frac{tl}{cnv} \in Cnv$ называется подмножество пространства-времени cnv , такое, что

$$\frac{tl}{cnv} \in Cnv : \quad \frac{dnd(\cdot, \cdot) \subseteq cnv}{(x'', x') - \text{timelike}} \quad \left(\begin{array}{l} (x, x) \in cnv^{tl \times 2} \\ (x'' - x') - \text{timelike} \end{array} \right)$$

то есть, такое подмножество пространства-времени, которое вместе со всякой парой времяподобно отстоящих $\frac{tl}{\{x, x'\}} \equiv \frac{tl}{dnd(x, x')}$ их времяподобное замыкание

Примеры

$$\begin{array}{l} t, q \in Cnv^{tl}(M_1^D) \\ s \notin Cnv^{tl}(M_1^D) \end{array}$$



1. Ограниченная решетка с ортодополнениями замкнутых по норме подпространств гильбертова пространства

$$\underline{A}_{\underline{Cm}(H)} \equiv \left(\underline{Cm}(H), \wedge, \vee, \mathbf{0}_{\underline{A}_{\underline{Cm}(H)}}, \mathbf{1}_{\underline{A}_{\underline{Cm}(H)}}, \perp \right)$$

$$\underline{h}'' \wedge \underline{h}' \equiv \underline{h}'' \cap \underline{h}'$$

$$\mathbf{1}_{\underline{A}_{\underline{Cm}(H)}} = H$$

$$\perp: \underline{A}_{\underline{Cm}(H)} \rightarrow \underline{A}_{\underline{Cm}(H)} \perp$$

$$\underline{h}'' \vee \underline{h}' \equiv \overline{\underline{h}'' + \underline{h}'}$$

$$\mathbf{0}_{\underline{A}_{\underline{Cm}(H)}} = \emptyset$$

$$\underline{h} \boxtimes \overline{\underline{h}^\perp} \equiv \underline{h}^\perp \quad \text{-ортогональное дополнение}$$

2. Ограниченная решетка с ортодополнениями операторов проектирования на гильбертовом пространстве

$$\underline{A}^P(H) \equiv \left(P(H), \wedge, \vee, \mathbf{0}_{\underline{A}^P(H)}, \mathbf{1}_{\underline{A}^P(H)}, \overset{P}{\perp} \right)$$

$$P(\underline{h}'') \overset{P}{\wedge} P(\underline{h}') \equiv P(\underline{h}'' \overset{\perp}{\wedge} \underline{h}')$$

$$\mathbf{1}_{\underline{A}^P(H)} = P(\mathbf{1}_{\underline{A}_{\underline{Cm}(H)}})$$

$$\overset{P}{\perp}: \underline{A}^P(H) \rightarrow \underline{A}^P(H) \overset{P}{\perp}$$

$$P(\underline{h}'') \overset{P}{\vee} P(\underline{h}') \equiv P(\underline{h}'' \overset{\perp}{\vee} \underline{h}')$$

$$\mathbf{0}_{\underline{A}^P(H)} = P(\mathbf{0}_{\underline{A}_{\underline{Cm}(H)}})$$

$$P(\underline{h}) \boxtimes \overset{P}{\overline{P(\underline{h})^\perp}} \equiv P(\underline{h}^\perp)$$

3. Ограниченная решетка с дополнениями алгебр фон Нойманна

$$\underline{A}^B(H) \equiv \left(\{N\}, \overset{H}{\wedge}, \overset{H}{\vee}, \mathbf{0}_{\underline{A}^B(H)}, \mathbf{1}_{\underline{A}^B(H)} \right)$$

$$N'' \overset{H}{\wedge} N' \equiv N'' \cap N'$$

$$\mathbf{1}_{\underline{A}^B(H)} = B(H)$$

$$N'' \overset{H}{\vee} N' \equiv \overline{N''} \cup N' \quad C2$$

$$\mathbf{0}_{\underline{A}^B(H)} = \mathbb{F} \boxtimes \mathbf{1}_{B(H)}$$

$$N^C = \left\{ \overline{N} \right\}$$

Заключение

- ❖ Построение алгебраических структур, индуцированных отношением причинности, в данной работе ограничивается **решетками**
- ❖ Как семейства подлежащих подмножеств, так и операции, заданные на них, отражают **причинные свойства**
- ❖ Полученные **классические конструкции сопоставлены с квантовомеханическими интерпретациями** булевой алгебры подмножеств

Перспективы исследования

- ❖ Руководствуясь аксиоматикой АКТП, **подмножества пространства–времени** можно рассматривать в качестве отправной точки для построения **сетей алгебр наблюдаемых**
- ❖ Задача **систематизации подмножеств пространства–времени** получает перспективы дальнейшей **интерпретации на алгебраическом этапе** и, возможно, **разработке процедуры квантования** путем построения **соответствий** между классическими и квантовыми решетками
- ❖ Полученный в работе ряд пространственно–временных решёток на пространстве–времени Минковского имеет целью дальнейшее **применение в релятивистских локальных квантовых теориях на искривлённых пространствах–временах**
- ❖ Таким образом, **возникает необходимость в разработке форм организации подмножеств пространства–времени**, которые **естественны с точки зрения процедур манипулирования** (в контексте АКТП) **информацией о причинной структуре**

Апробация работы

- ❖ 1. Выступления на «Семинаре по алгебре, геометрии в математической физике» (руководитель: Никифоров А.М.)
- ❖ 2. Выступление на международной конференции «Mathematical Spring–2019», НИУ ВШЭ–НН, 2019 г.
Тема доклада: Monoidal Categories in Mathematical Physics
- ❖ 3. Выступление на международной конференции «Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ», МФТИ, 2019 г.
Тема доклада: Моноидальные категории в теориях поля
- ❖ 4. Выступление на международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics II», НИУ ВШЭ–НН, 2019 г.
Тема доклада: Algebraic constructions generated by causal structure of space–times
- ❖ 5. Публикация «Monoidal Categories in Mathematical Physics» в сборнике тезисов международной конференции «Mathematical Spring–2019», НИУ ВШЭ–НН, 2019 г.
- ❖ 6. Публикация «Algebraic constructions generated by causal structure of space–times» в сборнике тезисов международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics II», НИУ ВШЭ–НН, 2019 г.



Спасибо за
внимание!

→ Казимир Малевич. Супрематическая композиция, 1916