Алгебраические структуры, порожденные отношением причинности на пространствах-временах

В.А. Столбова, ФН1-81

Научный руководитель: А.В. Филиновский

Консультант: А.М. Никифоров

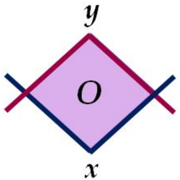
Цели и задачи

- ❖ организация **причинных подмножеств** пространственно-временных многообразий в **алгебраические структуры** (решетки [1]);
- ❖ **изучение свойств** полученных классических конструкций
- ❖ **сопоставление** с квантовомеханическими аналогами

Мотивировки

❖ **Алгебраическая квантовая теория поля** (АКТП) [2],[3]

$$M_1^4 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{GNS\text{-теорема}} \pi(\mathfrak{A})$$



Конечная стягиваемая область

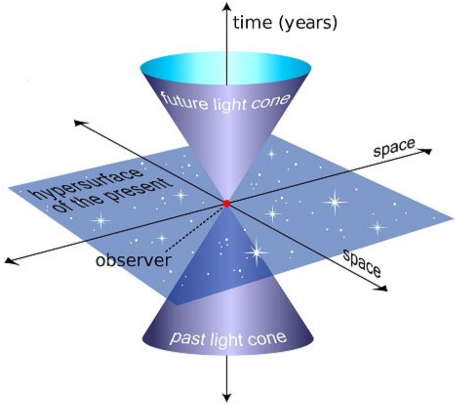
$\mathfrak{A}(O)$

Абстрактная C-алгебра*

$\pi(\mathfrak{A}(O))$

Операторная алгебра на $\mathcal{H}$

❖ **Общая теория относительности** [4]



Структура пространства-времени –
структура дифференцируемого многообразия с заданной на нем Лоренцевой метрикой и ассоциированной с ней аффинной связностью

[1] Grätzer, G. (2002). General lattice theory. Springer Science & Business Media.
[2] Baumgärtel H., Wollenberg M. Causal nets of operator algebras: Mathematical aspects of algebraic quantum field theory. – 1992.
[3] Haag R., Kastler D. An algebraic approach to quantum field theory //Journal of Mathematical Physics. – 1964. – Т. 5. – №. 7. – С. 848-861.
[4] Hawking S. W., Ellis G. F. R. The large scale structure of space-time. – Cambridge university press, 1973. – Т. 1

Решетки (алгебраические системы). Определение

$\mathrm{A} = (\{a\}, \wedge, \vee)$

$\wedge: \mathrm{A}^{\times 2} \to \mathrm{A}$ $\quad \vee: \mathrm{A}^{\times 2} \to \mathrm{A}$

$(''a, 'a) \mapsto ''a \wedge 'a$ $\quad (''a, 'a) \mapsto ''a \vee 'a$

Решеткой называется множество с двумя введенными на нем операциями
таками, что выполняются следующие свойства:

идемпотентность

- $a \wedge a = a$
- $a \vee a = a$

коммутативность

- $''a \wedge 'a = 'a \wedge ''a$
- $''a \vee 'a = 'a \vee ''a$

ассоциативность

- $(a \wedge ''a) \wedge 'a = '''a \wedge (a \wedge 'a)$
- $(a \vee ''a) \vee 'a = '''a \vee (a \vee 'a)$

тождества поглощения

- $'a \wedge (a \vee 'a) = 'a$
- $'a \vee (a \wedge 'a) = 'a$

$\forall a, 'a, ''a, '''a \in \mathrm{A}$

Виды решеток

Модулярная решетка

- $\dfrac{'a \wedge (''a \vee (a \wedge 'a))}{(a \wedge ''a) \vee (a \wedge 'a)}$

$\forall 'a, ''a, '''a \in \mathrm{A}$

Дистрибутивная решетка

- $'''a \vee (a \wedge 'a) = (a \vee ''a) \wedge (a \vee 'a)$
- $'''a \wedge (''a \vee 'a) = (a \wedge ''a) \vee (a \wedge 'a)$

Ограниченная решетка

- $0_{\mathrm{A}} \le a$
- $a \le 1_{\mathrm{A}}$

$\forall a \in \mathrm{A}$

Ортодополнением называется морфизм
$\bar{\ }^{\perp}: \mathrm{A} \to \mathrm{A}$
$a \mapsto \bar{a}^{\perp}$
такой, что:

- $a \wedge \bar{a}^{\perp} = 0_{\mathrm{A}}$
- $a \vee \bar{a}^{\perp} = 1_{\mathrm{A}}$
- $a \le 'a \Rightarrow \overline{'a}^{\perp} \le \bar{a}^{\perp}$
- $\overline{\left(\bar{a}^{\perp}\right)}^{\perp} = a$

$\forall a \in \mathrm{A} \;\; \exists \bar{a}^{\perp} \Rightarrow$ Решетка **с ортодополнениями**

Дополнением элемента $a \in \mathrm{A}$ называется элемент $\overset{N}{a} \in \mathrm{A}$:

- $a \wedge \overset{N}{a} = 0_{\mathrm{A}}$
- $a \vee \overset{N}{a} = 1_{\mathrm{A}}$

$\forall a \in \mathrm{A} \;\; \exists \overset{N}{a} \Rightarrow$ Решетка **с дополнениями**

Булева алгебра $B\,oo$ – дистрибутивная решетка с ортодополнениями

Причинное дополнение. Отношение причинной несвязанности

CS–**дополнением**, или **причинным дополнением**, подмножества $s \subseteq X$ называется отображение

$$\overset{cs}{\neg}: 2^X \to 2^X$$

такое, что

$$s \mapsto \overset{cs}{s^{\neg}}$$

$$\begin{cases} s \subseteq \overset{2}{\overset{cs}{s^{\neg}}} \\ \left(\bigcup_j s_j\right)^{\overset{cs}{\neg}} = \bigcup_j s_j^{\overset{cs}{\neg}} \\ s \cap s^{\overset{cs}{\neg}} = \varnothing \end{cases}$$

CS–**замыкание**, или **причинное замыкание**, подмножества $s \subseteq X$

$$\overset{2}{\overset{cs}{s^{\neg}}} = \left(s^{\overset{cs}{\neg}}\right)^{\overset{cs}{\neg}} \equiv \overset{cm-}{s}$$

Семейство **причинно замкнутых подмножеств** множества X

$$^{cs}Cm(X) \equiv \left\{ {}^{cm}s \in 2^X \,\middle|\, \overset{2}{\overset{cs}{{}^{cm}s^{\neg}}} = {}^{cm}s \right\}$$

Отношение CS–несвязанности, или **причинной несвязанности** $\overset{cs}{\perp}$

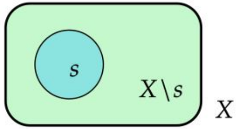
$$s \overset{cs}{\perp} ss \Leftrightarrow s \subseteq ss^{\overset{cs}{\neg}}$$

Примеры задания причинного дополнения

На множестве X

$$\overset{cs}{\neg}: 2^X \to 2^X$$

$$s \mapsto s^{\overset{cs}{\neg}} = s^{\neg} = X \setminus s$$

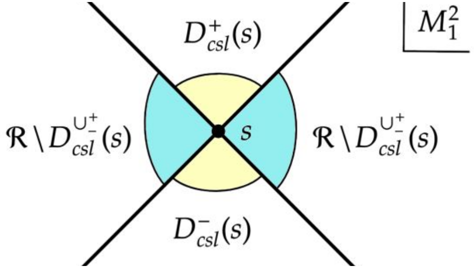


На глобально-гиперболическом пространстве-времени $\mathcal{R}$

$$\overset{cs}{\neg}: 2^{\mathcal{R}} \to 2^{\mathcal{R}}$$

$$s \mapsto s^{\overset{cs}{\neg}} \equiv s^{csl\neg}$$

$$\equiv \mathcal{R} \setminus D^{\cup_{-}^{+}}_{csl}(s)$$



На множестве подпространств h_λ *бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространс*

$$\underset{sprb}{H}, \dim(H) = \infty$$

$$h_\lambda^{\overset{cs}{\neg}} \equiv h_\lambda^{\perp} = \left\{ \phi \in H \,\middle|\, \begin{array}{l} \langle \phi, \psi_{\lambda_j} \rangle = 0 \\ \forall \psi_{\lambda_j} \in h_\lambda \end{array} \right\}$$

Булева алгебра **причинно замкнутых подмножеств** некоторого множества

$$B\,oo\,\underline{^{cs}Cm(X)} \equiv \mathrm{A}\,\underline{^{cs}Cm(X)}_{\perp} \equiv \left({}^{cs}Cm(X), \overset{cm}{\wedge}, \overset{cm}{\vee}, 0_{\mathrm{A}\,\underline{^{cs}Cm(X)}_{\perp}}, 1_{\mathrm{A}\,\underline{^{cs}Cm(X)}_{\perp}}, \overset{cs}{\neg} \right)$$

$${}^{cm}s'' \overset{cm}{\wedge} {}^{cm}s' \equiv {}^{cm}s'' \cap {}^{cm}s'$$

$${}^{cm}s'' \overset{cm}{\vee} {}^{cm}s' \equiv \overset{cs}{\overline{{}^{cm}s'' \cup {}^{cm}s'}}$$

$$0_{\mathrm{A}\,\underline{^{cs}Cm(X)}_{\perp}} = \varnothing$$

$$1_{\mathrm{A}\,\underline{^{cs}Cm(X)}_{\perp}} = X$$

Классические решетки

1. Решетки **конусов** M_1^D на

$$\mathrm{A}\,\underline{Con(M_1^D)} \equiv \left(Con(M_1^D), \wedge, \vee\right)$$

$$\mathrm{A}\,\underline{Con(M_1^D)} \equiv \left(\overset{\propto}{Con}(M_1^D), \wedge, \vee, 0_{\mathrm{A}\,\underline{\overset{\propto}{Con}(M_1^D)}}, 1_{\mathrm{A}\,\underline{\overset{\propto}{Con}(M_1^D)}}\right)$$

2. Решетки **диамантов** M_1^D на

$$\mathrm{A}\,\underline{Dmd(M_1^D)_V} \equiv \left(Dmd(M_1^D)_V, \overset{V}{\wedge}, \overset{V}{\vee}\right)$$

$$\mathrm{A}\,\underline{\overset{\propto}{Dmd}(M_1^D)_V} \equiv \left(\overset{\propto}{Dmd}(M_1^D)_V, \overset{V}{\wedge}, \overset{V}{\vee}, 0_{\mathrm{A}\,\underline{\overset{\propto}{Dmd}(M_1^D)_V}}, 1_{\mathrm{A}\,\underline{\overset{\propto}{Dmd}(M_1^D)_V}}\right)$$

3. Решетка **времениподобновыпуклых подмножеств** M_1^D

$$\mathrm{A}\,\underline{\overset{tl}{Cnv}(M_1^D)} \equiv \left(\overset{tl}{Cnv}(M_1^D), \cancel{\wedge}, \cancel{\vee}\right)$$

Квантовомеханические решетки

1. **Гильбертова** решетка

$$\mathrm{A}\,\underline{\text{-}Cm(\mathrm{H})}_\perp \equiv \left(\text{-}Cm(\mathrm{H}), \wedge, \vee, 0_{\mathrm{A}\,\underline{\text{-}Cm(\mathrm{H})}}, 1_{\mathrm{A}\,\underline{\text{-}Cm(\mathrm{H})}}, \text{-}\perp\right)$$

2. **Проекторная** решетка

$$\mathrm{A}\underline{P(\mathrm{H})}_\perp \equiv \left(P(\mathrm{H}), \overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}, 0_{\mathrm{A}\underline{P(\mathrm{H})}}, 1_{\mathrm{A}\underline{P(\mathrm{H})}}, {}^{P}\perp\right)$$

3. Решетка **алгебр фон Ноймманна**

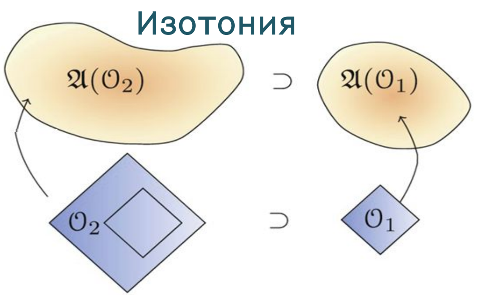
$$\mathrm{A}\underline{B(\mathrm{H})} \equiv \left(\{\cancel{N}\}, \overset{\mathrm{H}}{\wedge}, \overset{\mathrm{H}}{\vee}, 0_{\mathrm{A}\underline{B(\mathrm{H})}}, 1_{\mathrm{A}\underline{B(\mathrm{H})}}\right)$$

Решетка
причинно замкнутых подмножеств

$$\mathrm{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_\perp \equiv \left({}^{cs}Cm(X), \overset{cm}{\wedge}, \overset{cm}{\vee}, 0_{\mathrm{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_\perp}, 1_{\mathrm{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_\perp}, {}^{cs}\neg\right)$$

Алгебраическая квантовая теория поля. Аксиомы Хаага–Кастлера

1. Изотония



$$O_1 \subset O_2 \Rightarrow \exists \alpha_{12} : A(O_1) \to A(O_2).$$

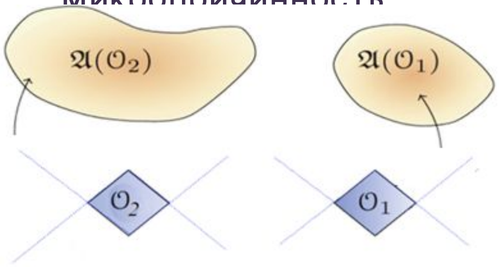
$$\forall \tilde U, U : \tilde U \subseteq U \quad \exists in^{\tilde U}_{U} : A(\tilde U) \to A(U)$$

$$\tilde{\tilde U} \subseteq \tilde U \subseteq U \Rightarrow in^{\tilde{\tilde U}}_{\tilde U} \circ in^{\tilde U}_{U} = in^{\tilde{\tilde U}}_{U}$$

$$in^{\tilde{\tilde U}}_{\tilde U} \circ in^{\tilde U}_{U} = in^{\tilde{\tilde U}}_{U}$$

$$\begin{tikzcd} A(\tilde{\tilde U}) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & A(\tilde U) \arrow[r] & A(U) \end{tikzcd}$$

2. Микропричинность



$$\left[A(O_1), A(O_2)\right] = 0$$

3. Ковариантность

$$\rho_{(\Lambda,a)}\left(A(O)\right) = A(\Lambda O + a)$$

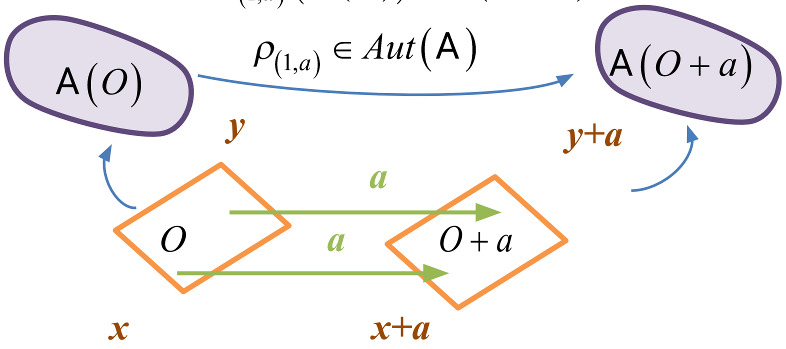
$$\forall (\Lambda, a) \in \Pi^{\uparrow}_{+},$$

$$\rho_{(\Lambda,a)} \in Aut(A).$$

Трансляционная ковариантность

$$\rho_{(1,a)}\left(A(O)\right) = A(O + a)$$

$$\rho_{(1,a)} \in Aut(A)$$



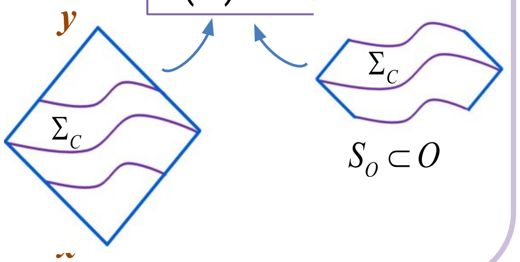
M^4_1

Алгебраическая квантовая теория поля.

Аксиомы Хаага–Кастлера

4. Аксиома временного слоя

$$\boxed{\mathcal{A}(O) = \mathcal{A}(S_O)}$$



5. Спектральное условие

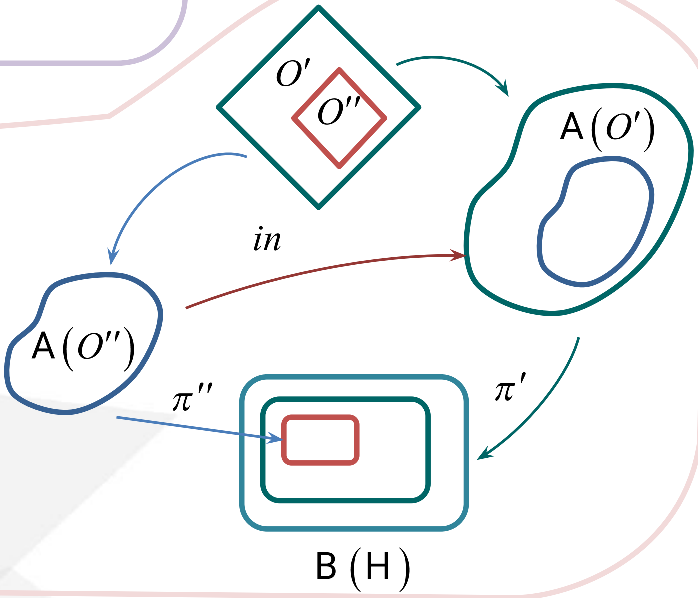
$$\boxed{spec(P_\beta) \subset \bar{V}_+}$$

$$O' \supseteq O''$$

$$\pi' : \mathcal{A}(O') \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$\pi'' : \mathcal{A}(O'') \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$\pi'|_{in(\mathcal{A}(O''))} = \pi''$$



Локально ковариантная квантовая теория поля [5]

$$\boxed{Loc} \xrightarrow{\mathcal{F} \equiv (\mathcal{A}, \rho)} \boxed{Obs}$$

$\boldsymbol{Ob}(\boldsymbol{Loc}) \ni (R, g)$

– глобально-гиперболическое пространство-время

$\boldsymbol{Mor}(\boldsymbol{Loc}) \ni$

$\iota : ({}'R_1^4, {}'g) \to ({}''R_1^4, {}''g)$

– изометрия, сохраняющая ориентации и причинную структуру

$\boldsymbol{Ob}(\boldsymbol{Obs}) \ni \mathcal{A}$

– $C^\dagger$ –алгебры с единицей

$\boldsymbol{Mor}(\boldsymbol{Obs}) \ni \rho$

– точные $\dagger$ – гомоморфизмы, сохраняющие единицу

[5] Brunetti R., Fredenhagen K., Verch R. The generally covariant locality principle–a new paradigm for local quantum field theory //Communications in Mathematical Physics. – 2003. – Т. 237. – №. 1-2. – С. 31-68.

Классические решетки

Решетки **конусов** на M_1^D

$\check{\ } \in \{\overset{+}{tl_0}, \overset{-}{tl_0}, \overset{+}{csl}, \overset{-}{csl}\}$

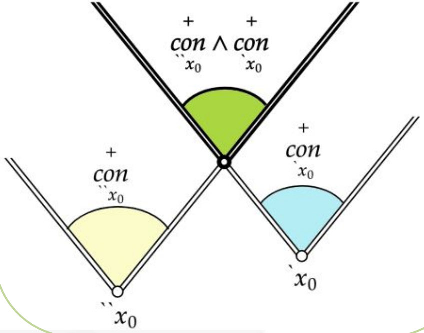
$\mathsf{A}\,\underline{\check{Con}(M_1^D)} \equiv \left(\check{Con}(M_1^D), \check{\wedge}, \check{\vee}\right)$ – дистрибутивная

$\mathsf{A}\,\underline{\check{Con}(M_1^D)} \equiv \left(\overset{\propto}{Con}(M_1^D), \check{\wedge}, \check{\vee}, 0_{\mathsf{A}\underline{\overset{\propto}{Con}(M_1^D)}}, 1_{\mathsf{A}\underline{\overset{\propto}{Con}(M_1^D)}}\right)$ – ограниченная

$0_{\mathsf{A}\underline{\overset{\propto}{Con}(M_1^D)}} \equiv \varnothing,\ 1_{\mathsf{A}\underline{\overset{\propto}{Con}(M_1^D)}} = M_1^D$

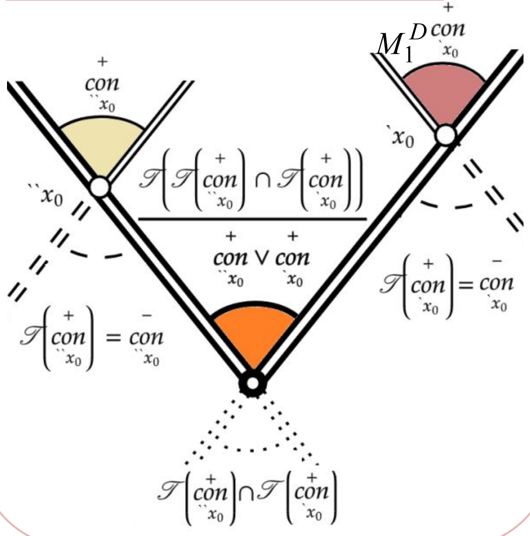
Операция пересечения $\overset{+}{tl_0}\wedge$

$\check{con}_{x_0} \check{\wedge} \check{con}_{x_0} \equiv \check{con}_{x_0} \cap \check{con}_{x_0}$

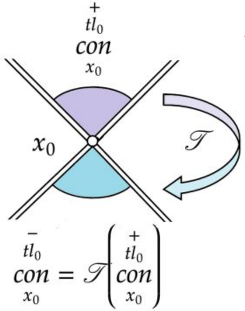


Операция объединения $\overset{+}{tl_0}\vee$

$\check{con}_{x_0} \check{\vee} \check{con}_{x_0} \equiv T\left(T\,\check{con}_{x_0} \cap T\,\check{con}_{x_0}\right)$



Биекция T



$T\left(\overset{sgn\check{\ }l}{con}_{x_0}\right) \equiv \overset{\neg sgn\check{\ }l}{con}_{x_0}$

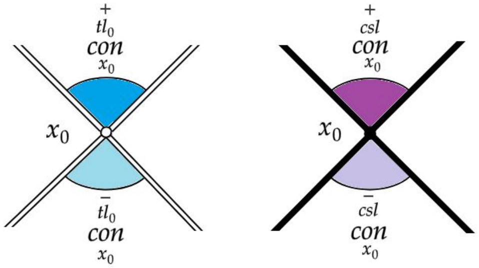
$\mathrm{sgn} \in \{+,-\}$

Семейства конусов на M_1^D

Времениподобные | Причинные

Верхние

Нижние



$\overset{+}{tl_0}Con(M_1^D) = \left\{\overset{+}{tl_0}con_{x_0},\ \overset{+}{tl_0}con_{x_0} \equiv \{x \in M_1^D \mid q_h(x-x_0) > 0,\ (x-x_0)^0 > 0\}\right\}$

$\overset{-}{tl_0}Con(M_1^D) = \left\{\overset{-}{tl_0}con_{x_0},\ \overset{-}{tl_0}con_{x_0} \equiv \{x \in M_1^D \mid q_h(x-x_0) > 0,\ (x-x_0)^0 > 0\}\right\}$

$\overset{+}{csl}Con(M_1^D) = \left\{\overset{+}{csl}con_{x_0},\ \overset{+}{csl}con_{x_0} \equiv \{x \in M_1^D \mid q_h(x-x_0) \geq 0,\ (x-x_0)^0 > 0\}\right\}$

$\overset{-}{csl}Con(M_1^D) = \left\{\overset{-}{csl}con_{x_0},\ \overset{-}{csl}con_{x_0} \equiv \{x \in M_1^D \mid q_h(x-x_0) \geq 0,\ (x-x_0)^0 < 0\}\right\}$

Классические решетки

$$\underline{\mathrm{A}\,Dmd\left(M_1^D\right)_V} \equiv \left(Dmd\left(M_1^D\right)_V, \wedge, \vee \right)$$

– дистрибутивная

Решетки **диамантов** на M_1^D

$$\underline{\mathrm{A}\,Dmd\left(M_1^D\right)_V} \equiv \left(Dmd\left(M_1^D\right)_V, \wedge, \vee, 0_{\underline{\mathrm{A}\,Dmd\left(M_1^D\right)_V}}, 1_{\underline{\mathrm{A}\,Dmd\left(M_1^D\right)_V}} \right)$$

– ограниченная

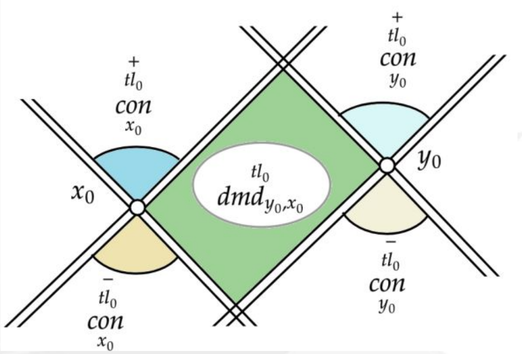
$$0_{\underline{\mathrm{A}\,Con\left(M_1^D\right)}} \equiv \varnothing, \quad 1_{\underline{\mathrm{A}\,Con\left(M_1^D\right)}} = M_1^D$$

Семейства диамантов на M_1^D

$$dmd_{\underline{y,x}\,V} \equiv \overset{-}{con}_y \vee \overset{+}{con}_x \cap \overset{-}{con}_y \vee \overset{+}{con}_x$$

$$\equiv \overset{-}{con}_z \cap \overset{+}{con}_z$$

$$\overset{-}{con}_z,\ \overset{+}{con}_z \in Con\left(M_1^D\right); \quad l \in \{tl_0, csl\}$$

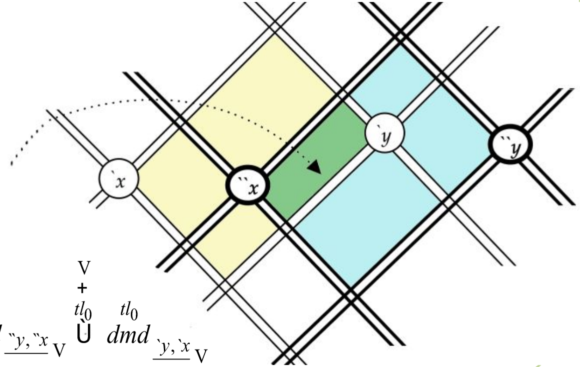


Операция пересечения

$\overset{V}{\underset{\wedge}{+tl_0}}$

$$dmd_{\underline{\check{y},\check{x}}\,V} \wedge dmd_{\underline{\grave{y},\grave{x}}\,V} \equiv$$

$$\left(\overset{-}{con}_{\check{y}} \vee \overset{+}{con}_{\check{x}} \wedge \overset{-}{con}_{\grave{y}} \vee \overset{+}{con}_{\grave{x}} \right) \cap \left(\overset{-}{con}_{\check{y}} \vee \overset{+}{con}_{\check{x}} \wedge \overset{-}{con}_{\grave{y}} \vee \overset{+}{con}_{\grave{x}} \right)$$



$$dmd^{tl_0}_{\underline{\check{y},\check{x}}\,V} \overset{V}{\underset{tl_0}{+}}\wedge\ dmd^{tl_0}_{\underline{\grave{y},\grave{x}}\,V}$$

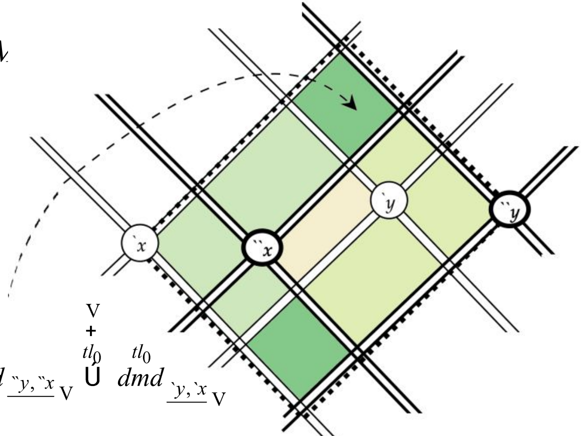
Операция объединения

$\overset{V}{\underset{\vee}{+tl_0}}$

$$dmd_{\underline{\check{y},\check{x}}\,V} \vee dmd_{\underline{\grave{y},\grave{x}}\,V} \equiv$$

$$\left(\overset{-}{con}_{\check{y}} \vee \overset{-}{con}_{\check{x}} \vee \overset{-}{con}_{\grave{y}} \vee \overset{-}{con}_{\grave{x}} \right) \cap \left(\overset{+}{con}_{\check{y}} \vee \overset{+}{con}_{\check{x}} \vee \overset{+}{con}_{\grave{y}} \vee \overset{+}{con}_{\grave{x}} \right)$$

M



$$dmd^{tl_0}_{\underline{\check{y},\check{x}}\,V} \overset{V}{\underset{tl_0}{+}}\vee\ dmd^{tl_0}_{\underline{\grave{y},\grave{x}}\,V}$$

Классические решетки

Решетка **времениподобно выпуклых** подмножеств M_1^D

$$\mathrm{A}\,\underline{\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right), \barwedge, \veebar\right)$$

$$\overset{tl}{cnv}'' \barwedge \overset{tl}{cnv}' \equiv \overset{tl}{cnv}'' \cap \overset{tl}{cnv}'$$

$$\overset{tl}{cnv}'' \veebar \overset{tl}{cnv}' \equiv \overset{tl}{span}_{dmd}\left(\overset{tl}{cnv}'' \cup \overset{tl}{cnv}'\right)$$

$$\bigcup_{y,x\in \overset{tl}{cnv}'' \cup \overset{tl}{cnv}'} \overset{tl}{dmd}(y,x)$$

$$\overset{tl}{cnv}'' \cup \overset{tl}{cnv}' \cup \bigcup_{\substack{y\in \overset{tl}{cnv}'' \\ x\in \overset{tl}{cnv}'}} \overset{tl}{dmd}(y,x)$$

Времениподобно выпуклым подмножеством

пространства-времени $\overset{tl}{cnv} \in \overset{tl}{Cnv}$

называется подмножество пространства-времени $\overset{tl}{cnv}$, такое, что

$$\overset{tl}{cnv} \in \overset{tl}{Cnv}: \quad dnd(``x, `x) \subseteq \overset{tl}{cnv} \;\middle|\; \begin{array}{l} (``x, `x) \in \overset{tl}{cnv}^{\times 2}; \\ (x'' - x') - timelike \end{array}$$

то есть, такое подмножество пространства-времени,

которое вместе со всякой парой

времениподобно

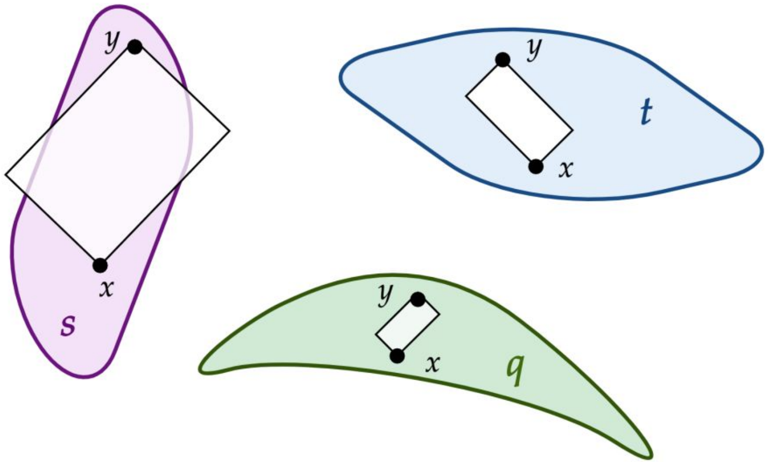
отстоящих точек содержит их $\overset{tl}{\{``x, `x\}} \equiv \overset{tl}{dnd}(``x, `x)$

времениподобное замыкание

Примеры

$$t, q \in \overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)$$

$$s \notin \overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)$$



1. Ограниченная решетка с ортодополнениями **замкнутых по норме подпространств гильбертова пространства**

$$\mathrm{A}_{Cm(\mathrm{H})}^{\perp} \equiv \left(Cm(\mathrm{H}), \wedge, \vee, 0_{\mathrm{A}\,Cm(\mathrm{H})}, 1_{\mathrm{A}\,Cm(\mathrm{H})}, \perp \right)$$

$$h'' \wedge h' \equiv h'' \cap h'$$

$$h'' \vee h' \equiv \overline{h'' + h'}$$

$$1_{\mathrm{A}\,Cm(\mathrm{H})} = \mathrm{H}$$

$$0_{\mathrm{A}\,Cm(\mathrm{H})} = 0$$

$$\perp : \mathrm{A}_{Cm(\mathrm{H})}^{\perp} \to \mathrm{A}_{Cm(\mathrm{H})}^{\perp}$$

$$h \mapsto \overline{h}^{\perp} \equiv h^{\perp}$$ – ортогональное дополнение

2. Ограниченная решетка с ортодополнениями **операторов проектирования на гильбертовом пространстве**

$$\mathrm{A}_{P(\mathrm{H})}^{\perp} \equiv \left(P(\mathrm{H}), \overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}, 0_{\mathrm{A}P(\mathrm{H})}, 1_{\mathrm{A}P(\mathrm{H})}, \overset{P}{\perp} \right)$$

$$P(h'') \overset{P}{\wedge} P(h') \equiv P\left(h'' \wedge h' \right)$$

$$P(h'') \overset{P}{\vee} P(h') \equiv P\left(h'' \vee h' \right)$$

$$1_{\mathrm{A}P(\mathrm{H})} = P\left(1_{\mathrm{A}\,Cm(\mathrm{H})} \right)$$

$$0_{\mathrm{A}P(\mathrm{H})} = P\left(0_{\mathrm{A}\,Cm(\mathrm{H})} \right)$$

$$\overset{P}{\perp} : \mathrm{A}_{P(\mathrm{H})}^{\perp} \to \mathrm{A}_{P(\mathrm{H})}^{\perp}$$

$$P(h) \mapsto \overline{P(h)}^{\overset{P}{\perp}} \equiv P\left(h^{\perp} \right)$$

3. Ограниченная решетка с дополнениями **алгебр фон Ноймանна**

$$\mathrm{A}_{\mathrm{B}(\mathrm{H})} \equiv \left(\{ N \}, \overset{\mathrm{H}}{\wedge}, \overset{\mathrm{H}}{\vee}, 0_{\mathrm{AB}(\mathrm{H})}, 1_{\mathrm{AB}(\mathrm{H})} \right)$$

$$N'' \overset{\mathrm{H}}{\wedge} N' \equiv N'' \cap N'$$

$$N'' \overset{\mathrm{H}}{\vee} N' \equiv \left(N'' \cup N' \right)^{C2}$$

$$1_{\mathrm{AB}(\mathrm{H})} = \mathrm{B}(\mathrm{H})$$

$$0_{\mathrm{AB}(\mathrm{H})} = \mathbb{C} \cdot 1_{\mathrm{B}(\mathrm{H})}$$

$$N^{C} = \left\{ \overset{\mathrm{N}}{N} \right\}$$

Заключение

- Построение алгебраических структур, индуцированных отношением причинности, в данной работе ограничивается **решетками**
- Как семейства подлежащих подмножеств, так и операции, заданные на них, отражают **причинные свойства**
- Полученные **классические конструкции сопоставлены с квантовомеханическими интерпретациями** булевой алгебры подмножеств

Перспективы исследования

- Руководствуясь аксиоматикой АКТП, **подмножества пространства-времени** можно рассматривать в качестве отправной точки для **построения сетей алгебр наблюдаемых**
- Задача **систематизации подмножеств пространства-времени** получает перспективы дальнейшей **интерпретации на алгебраическом этаже** и, возможно, **разработке процедуры квантования** путем **построения соответствий** между классическими и квантовыми решетками
- Полученный в работе ряд пространственно-временных решёток на пространстве-времени Минковского имеет целью дальнейшее **применение в релятивистских локальных квантовых теориях на искривлённых пространствах-временах**
- Таким образом, **возникает необходимость в разработке форм организации подмножеств пространства-времени**, которые **естественны с точки зрения процедур манипулирования** (в контексте АКТП) **информацией о причинной структуре**

Апробация работы

- 1. Выступления на «Семинаре по алгебре, геометрии в математической физике» (руководитель: Никифоров А.М.)

- 2. Выступление на международной конференции «Mathematical Spring-2019», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.
 Тема доклада: Monoidal Categories in Mathematical Physics

- 3. Выступление на международной конференции
 «Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ», МФТИ, 2019 г.
 Тема доклада: Моноидальные категории в теориях поля

- 4. Выступление на международной конференции
 «Topological methods in dynamics and related topics II», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.
 Тема доклада: Algebraic constructions generated by causal structure of space-times

- 5. Публикация «Monoidal Categories in Mathematical Physics»
 в сборнике тезисов международной конференции «Mathematical Spring-2019», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.

- 6. Публикация «Algebraic constructions generated by causal structure of space-times»
 в сборнике тезисов международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics II»,
 НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.

Спасибо за внимание!

→ Казимир Малевич. Супрематическая композиция, 1916