Алгебраические структуры, порожденные отношением причинности на пространствах-временах

В.А. Столбова, ФН1-81

Научный руководитель: А.В. Филиновский

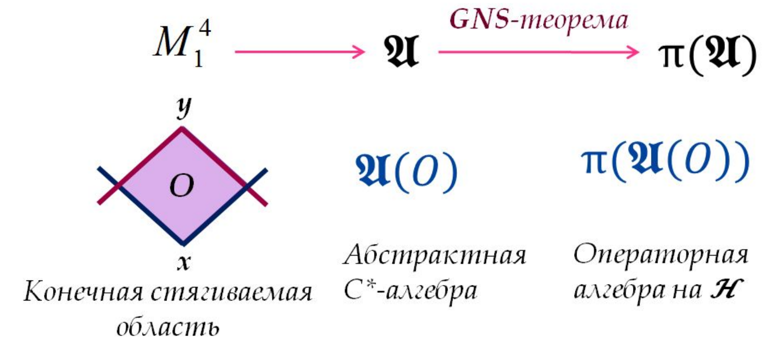
Консультант: А.М. Никифоров

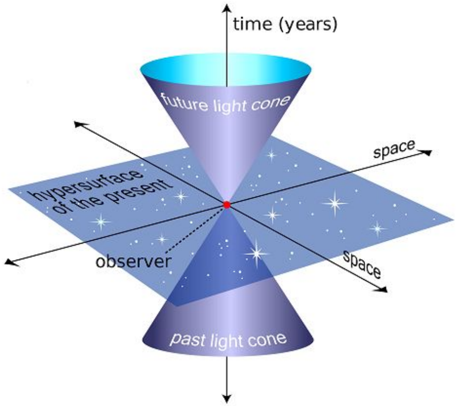
Цели и задачи

- ❖ организация **причинных подмножеств** пространственно–временных многообразий в **алгебраические структуры** (решетки [1]);
- ❖ **изучение свойств** полученных классических конструкций
- ❖ **сопоставление** с квантовомеханическими аналогами

Мотивировки

- ❖ **Алгебраическая квантовая теория поля** (АКТП) [2],[3]
- ❖ **Общая теория относительности** [4]





Структура пространства–времени –
структура дифференцируемого многообразия с заданной на нем Лоренцевой метрикой и ассоциированной с ней аффинной связностью

[1] Grätzer, G. (2002). General lattice theory. Springer Science & Business Media.
[2] Baumgärtel H., Wollenberg M. Causal nets of operator algebras: Mathematical aspects of algebraic quantum field theory. – 1992.
[3] Haag R., Kastler D. An algebraic approach to quantum field theory //Journal of Mathematical Physics. – 1964. – Т. 5. – №. 7. – С. 848-861.
[4] Hawking S. W., Ellis G. F. R. The large scale structure of space-time. – Cambridge university press, 1973. – Т. 1

Решетки (алгебраические системы). Определение

$\mathrm{A} = (\{a\}, \wedge, \vee)$

$\wedge: \mathrm{A}^{\times 2} \to \mathrm{A}$ $\quad \vee: \mathrm{A}^{\times 2} \to \mathrm{A}$

$(a'', a') \mapsto a'' \wedge a'$ $\quad (a'', a') \mapsto a'' \vee a'$

Решеткой называется множество с двумя введенными на нем операциями

такими, что выполняются следующие свойства:

идемпотентность
- $a \wedge a = a$
- $a \vee a = a$

коммутативность
- $a'' \wedge a' = a' \wedge a''$
- $a'' \vee a' = a' \vee a''$

ассоциативность
- $(a \wedge a'') \wedge a' = a''' \wedge (a \wedge a')$
- $(a \vee a'') \vee a' = a''' \vee (a \vee a')$

тождества поглощения
- $a' \wedge (a \wedge a') = a'$
- $a' \vee (a \vee a') = a'$

$\forall a, a', a'', a''' \in \mathrm{A}$

Виды решеток

Модулярная решетка

$$\frac{a' \wedge (a'' \vee (a \wedge a'))}{(a' \wedge a'') \vee (a \wedge a')}$$

$\forall a', a'', a''' \in \mathrm{A}$

Дистрибутивная решетка
- $a''' \vee (a \wedge a') = (a \vee a'') \wedge (a \vee a')$
- $a''' \wedge (a'' \vee a') = (a \wedge a'') \vee (a \wedge a')$

Ограниченная решетка
- $0_{\mathrm{A}} \le a$
- $a \le 1_{\mathrm{A}}$

$\forall a \in \mathrm{A}$

Ортодополнением называется морфизм

$^{-\perp}: \mathrm{A} \to \mathrm{A}$

$a \mapsto \bar{a}^{\perp}$

такой, что:
- $a \wedge \bar{a}^{\perp} = 0_{\mathrm{A}}$
- $a \vee \bar{a}^{\perp} = 1_{\mathrm{A}}$
- $a \le a' \Rightarrow \bar{a'}^{\perp} \le \bar{a}^{\perp}$
- $\overline{\left(\bar{a}^{\perp}\right)}^{\perp} = a$

$\forall a \in \mathrm{A} \;\; \exists\, \bar{a}^{\perp} \Rightarrow$ Решетка **с ортодополнениями**

Дополнением элемента $a \in \mathrm{A}$ называется элемент $\overset{N}{a} \in \mathrm{A}$:
- $a \wedge \overset{N}{a} = 0_{\mathrm{A}}$
- $a \vee \overset{N}{a} = 1_{\mathrm{A}}$

$\forall a \in \mathrm{A} \;\; \exists\, \overset{N}{a} \Rightarrow$ Решетка **с дополнениями**

Булева алгебра $B\ oo$ – дистрибутивная решетка с ортодополнениями

Причинное дополнение. Отношение причинной несвязанности

***CS*–дополнением**, или **причинным дополнением**, подмножества $s \subseteq X$ называется отображение

$$\overset{cs}{\neg}: 2^X \to 2^X, \quad s \mapsto \overset{cs}{\neg} s$$

такое, что

$$\begin{cases} s \subseteq \overset{cs}{\neg}{}^2 s \\ \overset{cs}{\neg}\bigcup_j s_j = \bigcup_j \overset{cs}{\neg} s_j \\ s \cap \overset{cs}{\neg} s = \varnothing \end{cases}$$

***CS*–замыкание**, или **причинное замыкание**, подмножества $s \subseteq X$

$$\overset{cs}{\neg}{}^2 s = \overset{cs}{\neg}\,\overset{cs}{\neg} s \equiv \overset{cm-}{s}$$

Семейство **причинно замкнутых подмножеств** множества X

$${}^{cs}Cm(X) \equiv \left\{ {}^{cm}s \in 2^X \;\middle|\; \overset{cs}{\neg}{}^2\, {}^{cm}s = {}^{cm}s \right\}$$

Отношение CS–несвязанности, или **причинной несвязанности** $\overset{cs}{\perp}$

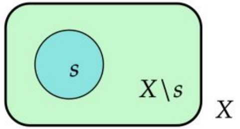
$$s \overset{cs}{\perp} ss \Leftrightarrow s \subseteq \overset{cs}{\neg} ss$$

Примеры задания причинного дополнения

На множестве X

$$\overset{cs}{\neg}: 2^X \to 2^X$$

$$s \mapsto \overset{cs}{\neg} s = \neg s = X \setminus s$$

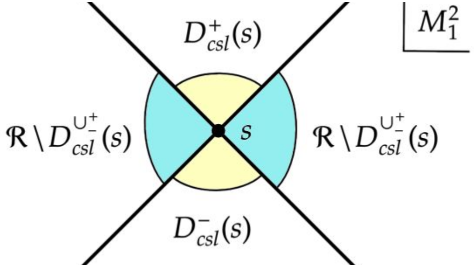


На глобально–гиперболическом пространстве–времени $\mathcal{R}$

$$\overset{cs}{\neg}: 2^{\mathcal{R}} \to 2^{\mathcal{R}}$$

$$s \mapsto \overset{cs}{\neg} s \equiv \overset{csl}{\neg} s$$

$$\equiv \mathcal{R} \setminus D^{\cup\pm}_{csl}(s)$$



На множестве подпространств h_λ *бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространс*

$$\underset{sprb}{\mathrm{H}}, \ \dim(\mathrm{H}) = \infty$$

$$\overset{cs}{\neg} h_\lambda \equiv h_\lambda^{\perp} = \begin{Bmatrix} \phi \in H \mid \left\langle \phi, \psi_{\lambda_j} \right\rangle = 0 \\ \forall \psi_{\lambda_j} \in h_\lambda \end{Bmatrix}$$

Булева алгебра **причинно замкнутых подмножеств** некоторого множества

$$\mathcal{B}oo\,\underline{{}^{cs}Cm(X)} \equiv \mathrm{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp} \equiv \left({}^{cs}Cm(X), \overset{cm}{\wedge}, \overset{cm}{\vee}, 0_{\mathrm{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp}}, 1_{\mathrm{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp}}, \overset{cs}{\neg} \right)$$

$${}^{cm}s'' \overset{cm}{\wedge} {}^{cm}s' \equiv {}^{cm}s'' \cap {}^{cm}s'$$

$${}^{cm}s'' \overset{cm}{\vee} {}^{cm}s' \equiv \overset{cs}{\overline{{}^{cm}s'' \cup {}^{cm}s'}}$$

$$0_{\mathrm{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp}} = \varnothing$$

$$1_{\mathrm{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp}} = X$$

Классические решетки

1. Решетки **конусов** M_1^D на

$$\mathbb{A}\underline{Con\left(M_1^D\right)} \equiv \left(Con\left(M_1^D\right), \wedge, \vee \right)$$

$$\mathbb{A}\underline{Con\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right), \wedge, \vee, 0_{\mathbb{A}\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}}, 1_{\mathbb{A}\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}} \right)$$

2. Решетки **диамантов** M_1^D на

$$\mathbb{A}\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_V} \equiv \left(Dmd\left(M_1^D\right)_V, \overset{V}{\wedge}, \overset{V}{\vee} \right)$$

$$\mathbb{A}\underline{\overset{\propto}{Dmd}\left(M_1^D\right)_V} \equiv \left(\overset{\propto}{Dmd}\left(M_1^D\right)_V, \overset{V}{\wedge}, \overset{V}{\vee}, 0_{\mathbb{A}\underline{\overset{\propto}{Dmd}\left(M_1^D\right)_V}}, 1_{\mathbb{A}\underline{\overset{\propto}{Dmd}\left(M_1^D\right)_V}} \right)$$

3. Решетка **времениподобновыпуклых подмножеств** M_1^D

$$\mathbb{A}\underline{\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right), \wedge, \vee \right)$$

Квантовомеханические решетки

1. **Гильбертова** решетка

$$\mathbb{A}\underline{Cm(\mathrm{H})}_\perp \equiv \left(Cm(\mathrm{H}), \wedge, \vee, 0_{\mathbb{A}\underline{Cm(\mathrm{H})}}, 1_{\mathbb{A}\underline{Cm(\mathrm{H})}}, \perp \right)$$

2. **Проекторная** решетка

$$\mathbb{A}\underline{P(\mathrm{H})}_\perp \equiv \left(P(\mathrm{H}), \overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}, 0_{\mathbb{A}\underline{P(\mathrm{H})}}, 1_{\mathbb{A}\underline{P(\mathrm{H})}}, \overset{P}{\perp} \right)$$

3. Решетка **алгебр фон Ноймана**

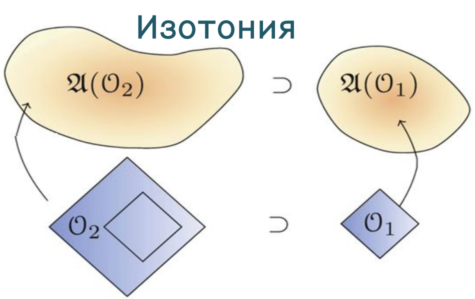
$$\mathbb{A}\underline{\mathrm{B}(\mathrm{H})} \equiv \left(\{\cancel{N}\}, \overset{\mathrm{H}}{\wedge}, \overset{\mathrm{H}}{\vee}, 0_{\mathbb{A}\underline{\mathrm{B}(\mathrm{H})}}, 1_{\mathbb{A}\underline{\mathrm{B}(\mathrm{H})}} \right)$$

Решетка **причинно замкнутых подмножеств**

$$\mathbb{A}\underline{{}^{cs}Cm(X)}_\perp \equiv \left({}^{cs}Cm(X), \overset{cm}{\wedge}, \overset{cm}{\vee}, 0_{\mathbb{A}\underline{{}^{cs}Cm(X)}_\perp}, 1_{\mathbb{A}\underline{{}^{cs}Cm(X)}_\perp}, \overset{cs}{\neg} \right)$$

Алгебраическая квантовая теория поля. Аксиомы Хаага–Кастлера

1. Изотония



$$\boxed{O_1 \subset O_2 \Rightarrow \exists\, \alpha_{12} : A(O_1) \to A(O_2)}$$

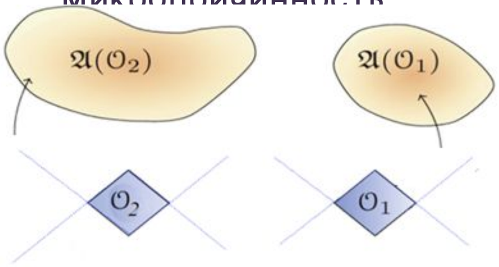
$$\forall\ \tilde U, U:\ \tilde U \subseteq U \quad \exists in_{U}^{\tilde U} : A(\tilde U) \to A(U)$$

$$\tilde{\tilde U} \subseteq \tilde U \subseteq U \Rightarrow\ in_{\tilde U}^{\tilde{\tilde U}} \circ in_{U}^{\tilde U} = in_{U}^{\tilde{\tilde U}}$$

$$in_{\tilde U}^{\tilde{\tilde U}} \circ in_{U}^{\tilde U} = in_{U}^{\tilde{\tilde U}}$$

$$\begin{tikzcd} A(\tilde{\tilde U}) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & A(\tilde U) \arrow[r] & A(U) \end{tikzcd}$$

2. Микропричинность



$$\boxed{\left[A(O_1), A(O_2)\right] = 0}$$

3. Ковариантность

$$\rho_{(\Lambda,a)}\big(A(O)\big) = A(\Lambda O + a)$$

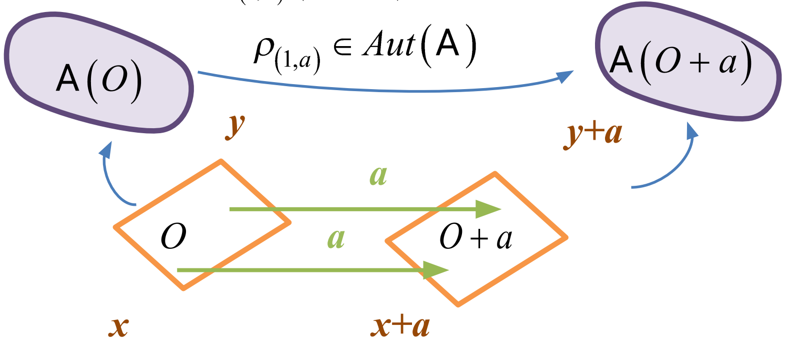
$$\forall (\Lambda, a) \in \Pi_+^{\uparrow},$$

$$\rho_{(\Lambda,a)} \in Aut(A).$$

Трансляционная ковариантность

$$\rho_{(1,a)}\big(A(O)\big) = A(O + a)$$

$$\rho_{(1,a)} \in Aut(A)$$



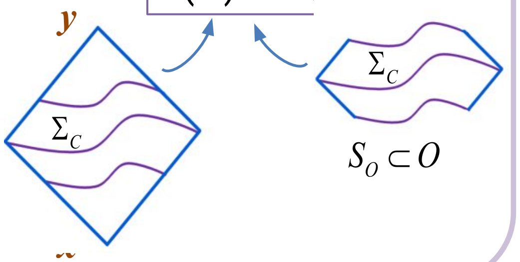
M_1^4

Алгебраическая квантовая теория поля.

Аксиомы Хаага–Кастлера

4. Аксиома временного слоя

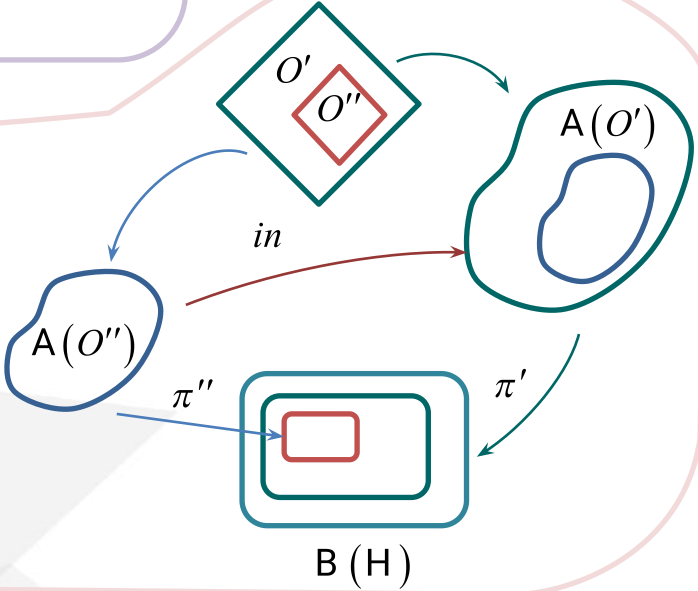
$\boxed{\mathcal{A}(O) = \mathcal{A}(S_O)}$



5. Спектральное условие

$\boxed{spec(P_\beta) \subset \bar{V}_+}$

$$O' \supseteq O''$$
$$\pi' : \mathcal{A}(O') \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
$$\pi'' : \mathcal{A}(O'') \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$
$$\pi'|_{in(\mathcal{A}(O''))} = \pi''$$



Локально ковариантная квантовая теория поля [5]

$$\boxed{Loc} \xrightarrow{\mathcal{F} \equiv (\mathcal{A}, \rho)} \boxed{Obs}$$

$Ob(Loc) \ni (R, g)$

– глобально–гиперболическое пространство–время

$Mor(Loc) \ni$

$\iota : ({}^{`}R_1^4, {}^{`}g) \to ({}^{``}R_1^4, {}^{``}g)$

– изометрия, сохраняющая ориентации и причинную структуру

$Ob(Obs) \ni \mathcal{A}$

– $C^{\dagger}$ –алгебры с единицей

$Mor(Obs) \ni \rho$

– точные †– гомоморфизмы, сохраняющие единицу

[5] Brunetti R., Fredenhagen K., Verch R. The generally covariant locality principle–a new paradigm for local quantum field theory //Communications in Mathematical Physics. – 2003. – Т. 237. – №. 1-2. – С. 31-68.

Классические решетки

Решетки **конусов** на M_1^D

$\star \in \left\{ \overset{+}{tl_0}, \overset{-}{tl_0}, \overset{+}{csl}, \overset{-}{csl} \right\}$

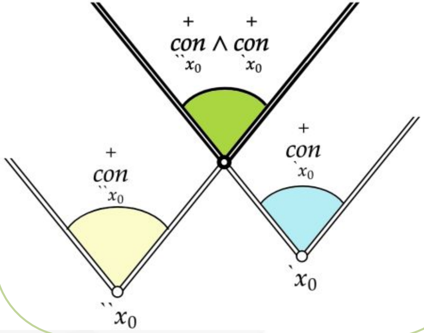
$$\mathsf{A}\underline{\overset{\star}{Con}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{\star}{Con}\left(M_1^D\right), \overset{\star}{\wedge}, \overset{\star}{\vee} \right)$$ – дистрибутивная

$$\mathsf{A}\underline{\overset{\star}{Con}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right), \overset{\star}{\wedge}, \overset{\star}{\vee}, 0_{\mathsf{A}\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}}, 1_{\mathsf{A}\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}} \right)$$ – ограниченная

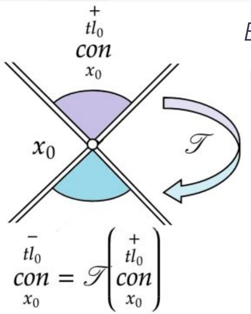
$$0_{\mathsf{A}\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}} \equiv \varnothing, \quad 1_{\mathsf{A}\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}} = M_1^D$$

Операция пересечения $\overset{+}{tl_0}$ $\wedge$

$$\overset{\star}{con}_{x_0} \overset{\star}{\wedge} \overset{\star}{con}_{x_0} \equiv \overset{\star}{con}_{x_0} \cap \overset{\star}{con}_{x_0}$$



Биекция $\mathcal{T}$

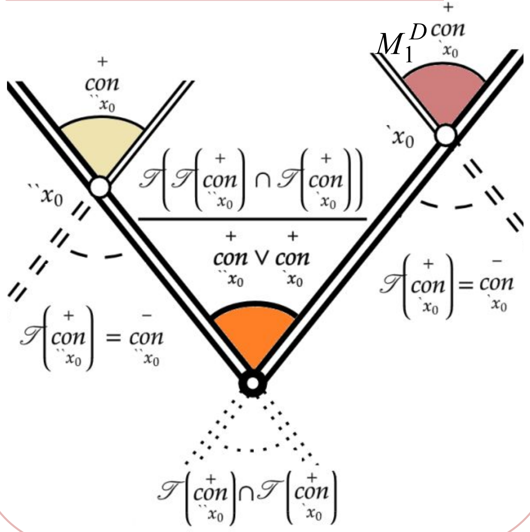


$$\mathcal{T}\left(\overset{sgn\star}{con}_{x_0}\right) \equiv \overset{\neg sgn\star}{con}_{x_0}$$

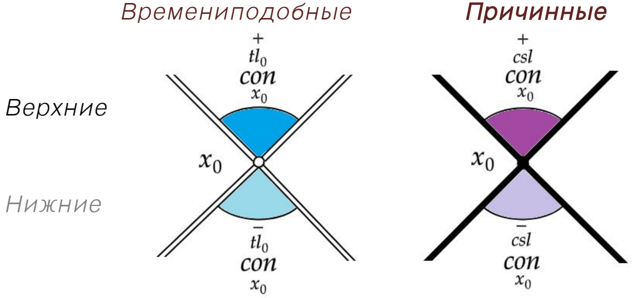
$sgn \in \{+,-\}$

Операция объединения $\overset{+}{tl_0}$ $\vee$

$$\overset{\star}{con}_{x_0} \overset{\star}{\vee} \overset{\star}{con}_{x_0} \equiv \mathcal{T}\left(\mathcal{T}\,\overset{\star}{con}_{x_0} \cap \mathcal{T}\,\overset{\star}{con}_{x_0} \right)$$



Семейства конусов на M_1^D



$$\overset{+}{tl_0}Con\left(M_1^D\right) = \left\{ \overset{+}{tl_0}con_{x_0},\ \overset{+}{tl_0}con_{x_0} \circ \left\{ x \in M_1^D \mid q_h(x-x_0) > 0, (x-x_0)^0 > 0 \right\} \right\}$$

$$\overset{-}{tl_0}Con\left(M_1^D\right) = \left\{ \overset{-}{tl_0}con_{x_0},\ \overset{-}{tl_0}con_{x_0} \circ \left\{ x \in M_1^D \mid q_h(x-x_0) > 0, (x-x_0)^0 > 0 \right\} \right\}$$

$$\overset{+}{csl}Con\left(M_1^D\right) = \left\{ \overset{+}{csl}con_{x_0},\ \overset{+}{csl}con_{x_0} \circ \left\{ x \in M_1^D \mid q_h(x-x_0) \geq 0, (x-x_0)^0 > 0 \right\} \right\}$$

$$\overset{-}{csl}Con\left(M_1^D\right) = \left\{ \overset{-}{csl}con_{x_0},\ \overset{-}{csl}con_{x_0} \circ \left\{ x \in M_1^D \mid q_h(x-x_0) \geq 0, (x-x_0)^0 < 0 \right\} \right\}$$

Классические решетки

$$\mathrm{A}\,\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_V} \equiv \left(Dmd\left(M_1^D\right)_V, \wedge, \vee \right)$$

– дистрибутивная

Решетки диамантов на M_1^D

$$\mathrm{A}\,\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_V} \equiv \left(Dmd\left(M_1^D\right)_V, \wedge, \vee, 0_{\mathrm{A}\,\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_V}}, 1_{\mathrm{A}\,\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_V}} \right)$$

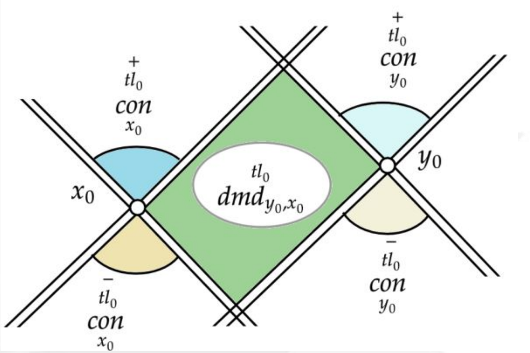
– ограниченная

$$0_{\mathrm{A}\,\underline{Con\left(M_1^D\right)}} \equiv \varnothing,\ 1_{\mathrm{A}\,\underline{Con\left(M_1^D\right)}} = M_1^D$$

Семейства диамантов на M_1^D

$$dmd\,\underline{y,x}_V = \left(con_y^{-} \cup con_x^{+}\right) \cap \left(con_y^{-} \cup con_x^{+}\right) = con_z^{-} \cap con_z^{+}$$

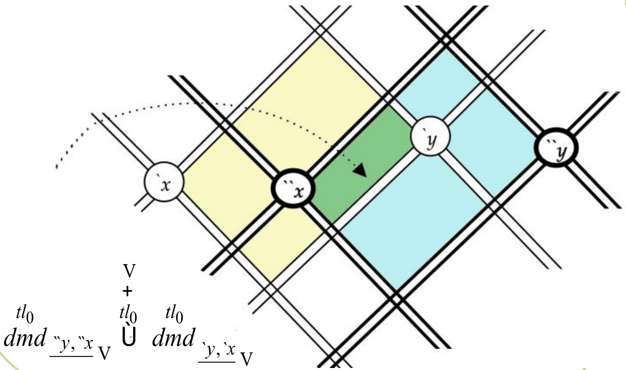
$$con_z^{-},\ con_z^{+} \in Con\left(M_1^D\right);\ l \in \{tl_0, csl\}$$



Операция пересечения

$\overset{V}{\underset{tl_0}{+}}\wedge$

$$dmd\,\underline{y,x}_V \cap dmd\,\underline{y,x}_V = \left[\left(con_y \cup con_x\right) \cap \left(con_y \cup con_x\right) \right] \cap \left[\left(con_y \cup con_x\right) \cap \left(con_y \cup con_x\right) \right]$$

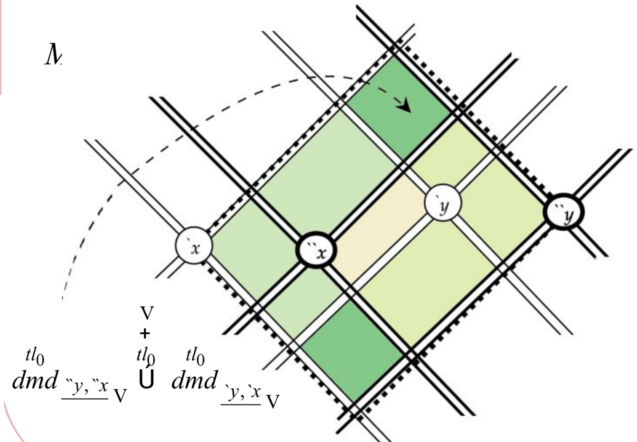


$$dmd^{tl_0}\,\underline{y,x}_V \overset{V}{\underset{tl_0}{\cap}} dmd^{tl_0}\,\underline{y,x}_V$$

Операция объединения

$\overset{V}{\underset{tl_0}{+}}\vee$

$$dmd\,\underline{y,x}_V \cup dmd\,\underline{y,x}_V = \left[\left(con_y \cup con_x\right) \cap \left(con_y \cup con_x\right) \right] \cap \left[\left(con_y \cup con_x\right) \cap \left(con_y \cup con_x\right) \right]$$



$$dmd^{tl_0}\,\underline{y,x}_V \overset{V}{\underset{tl_0}{\cup}} dmd^{tl_0}\,\underline{y,x}_V$$

Классические решетки

Решетка **времениподобно выпуклых** подмножеств M_1^D

$$\mathrm{A}\,\underline{\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right), \barwedge, \veebar\right)$$

$$\overset{tl}{cnv}'' \barwedge \overset{tl}{cnv}' \equiv \overset{tl}{cnv}'' \cap \overset{tl}{cnv}'$$

$$\overset{tl}{cnv}'' \veebar \overset{tl}{cnv}' \equiv \overset{tl}{span}_{dmd}\left(\overset{tl}{cnv}'' \cup \overset{tl}{cnv}'\right)$$

$$\bigcup_{y,x \in \overset{tl}{cnv}'' \cup \overset{tl}{cnv}'} \overset{tl}{dmd}(y,x)$$

$$\overset{tl}{cnv}'' \cup \overset{tl}{cnv}' \cup \bigcup_{\substack{y \in \overset{tl}{cnv}'' \\ x \in \overset{tl}{cnv}'}} \overset{tl}{dmd}(y,x)$$

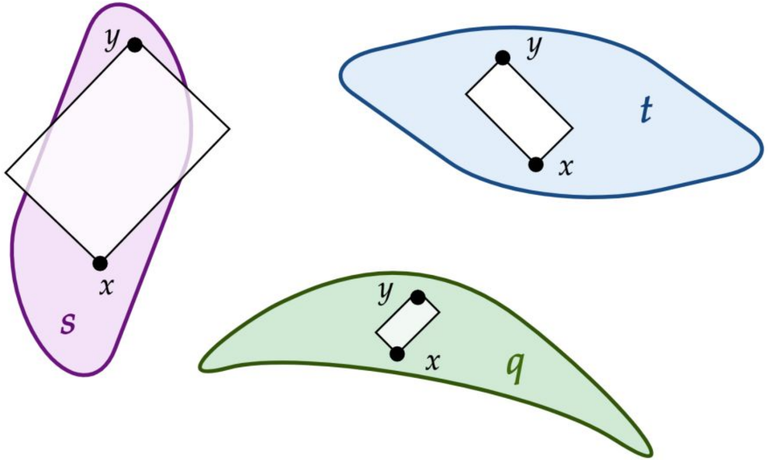
Времениподобно выпуклым подмножеством пространства–времени $\overset{tl}{cnv} \in \overset{tl}{Cnv}$ называется подмножество пространства–времени $\overset{tl}{cnv}$, такое, что

$$\overset{tl}{cnv} \in \overset{tl}{Cnv}: \quad dnd\left(\grave{}\grave{}x, \grave{}x\right) \subseteq \overset{tl}{cnv} \,\middle|\, \begin{array}{l} \left(\grave{}\grave{}x, \grave{}x\right) \in \overset{tl}{cnv}^{\times 2}; \\ \left(x'' - x'\right) - timelike \end{array}$$

то есть, такое подмножество пространства–времени, которое вместе со всякой парой времениподобно отстоящих точек содержит их времениподобное замыкание

$$\overset{tl}{\left\{\grave{}\grave{}x, \grave{}x\right\}} \equiv \overset{tl}{dnd}\left(\grave{}\grave{}x, \grave{}x\right)$$

Примеры



$$t, q \in \overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)$$

$$s \notin \overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)$$

Квантовомеханические решетки

1. Ограниченная решетка с ортодополнениями **замкнутых по норме подпространств гильбертова пространства**

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})_\perp} \equiv \left(\mathcal{C}m(\mathcal{H}), \wedge, \vee, 0_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})}}, 1_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})}}, \perp \right)$$

$$\mathcal{h}'' \wedge \mathcal{h}' \equiv \mathcal{h}'' \cap \mathcal{h}' \qquad 1_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})}} = \mathcal{H} \qquad \perp : \mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})_\perp} \to \mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})_\perp}$$

$$\mathcal{h}'' \vee \mathcal{h}' \equiv \overline{\mathcal{h}'' + \mathcal{h}'} \qquad 0_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})}} = \mathbf{0} \qquad \mathcal{h} \mapsto \mathcal{h}^{\perp} \equiv \mathcal{h}^\perp$$

–ортогональное дополнение

2. Ограниченная решетка с ортодополнениями **операторов проектирования на гильбертовом пространстве**

$$\mathcal{A}_{P(\mathcal{H})_\perp} \equiv \left(P(\mathcal{H}), \overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}, 0_{\mathcal{A}_{P(\mathcal{H})}}, 1_{\mathcal{A}_{P(\mathcal{H})}}, \overset{P}{\perp} \right)$$

$$P(\mathcal{h}'') \overset{P}{\wedge} P(\mathcal{h}') \equiv P\left(\mathcal{h}'' \wedge \mathcal{h}'\right) \qquad 1_{\mathcal{A}_{P(\mathcal{H})}} = P\left(1_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})}}\right) \qquad \overset{P}{\perp} : \mathcal{A}_{P(\mathcal{H})_\perp} \to \mathcal{A}_{P(\mathcal{H})_\perp}$$

$$P(\mathcal{h}'') \overset{P}{\vee} P(\mathcal{h}') \equiv P\left(\mathcal{h}'' \vee \mathcal{h}'\right) \qquad 0_{\mathcal{A}_{P(\mathcal{H})}} = P\left(0_{\mathcal{A}_{\mathcal{C}m(\mathcal{H})}}\right) \qquad P(\mathcal{h}) \mapsto P(\mathcal{h})^{\overset{P}{\perp}} \equiv P\left(\mathcal{h}^\perp\right)$$

3. Ограниченная решетка с дополнениями **алгебр фон Ноймана**

$$\mathcal{A}_{B(\mathcal{H})} \equiv \left(\{\mathcal{N}\}, \overset{\mathrm{H}}{\wedge}, \overset{\mathrm{H}}{\vee}, 0_{\mathcal{A}_{B(\mathcal{H})}}, 1_{\mathcal{A}_{B(\mathcal{H})}} \right)$$

$$\mathcal{N}'' \overset{\mathrm{H}}{\wedge} \mathcal{N}' \equiv \mathcal{N}'' \cap \mathcal{N}' \qquad 1_{\mathcal{A}_{B(\mathcal{H})}} = B(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{N}'' \overset{\mathrm{H}}{\vee} \mathcal{N}' \equiv \left(\mathcal{N}'' \cup \mathcal{N}'\right)^{C2} \qquad 0_{\mathcal{A}_{B(\mathcal{H})}} = \mathbb{C} \cdot 1_{B(\mathcal{H})} \qquad \mathcal{N}^C = \left\{ \overset{\mathrm{N}}{\mathcal{N}} \right\}$$

Заключение

- Построение алгебраических структур, индуцированных отношением причинности, в данной работе ограничивается **решетками**
- Как семейства подлежащих подмножеств, так и операции, заданные на них, отражают **причинные свойства**
- Полученные **классические конструкции сопоставлены с квантовомеханическими интерпретациями** булевой алгебры подмножеств

Перспективы исследования

- Руководствуясь аксиоматикой АКТП, **подмножества пространства–времени** можно рассматривать в качестве отправной точки для **построения сетей алгебр наблюдаемых**
- Задача **систематизации подмножеств пространства–времени** получает перспективы дальнейшей **интерпретации на алгебраическом этаже** и, возможно, **разработке процедуры квантования** путем **построения соответствий** между классическими и квантовыми решетками
- Полученный в работе ряд пространственно–временных решёток на пространстве–времени Минковского имеет целью дальнейшее **применение в релятивистских локальных квантовых теориях на искривлённых пространствах–временах**
- Таким образом, **возникает необходимость в разработке форм организации подмножеств пространства–времени**, которые **естественны с точки зрения процедур манипулирования** (в контексте АКТП) **информацией о причинной структуре**

Апробация работы

- 1. Выступления на «Семинаре по алгебре, геометрии в математической физике» (руководитель: Никифоров А.М.)

- 2. Выступление на международной конференции «Mathematical Spring-2019», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.
  Тема доклада: Monoidal Categories in Mathematical Physics

- 3. Выступление на международной конференции «Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ», МФТИ, 2019 г.
  Тема доклада: Моноидальные категории в теориях поля

- 4. Выступление на международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics II», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.
  Тема доклада: Algebraic constructions generated by causal structure of space-times

- 5. Публикация «Monoidal Categories in Mathematical Physics» в сборнике тезисов международной конференции «Mathematical Spring-2019», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.

- 6. Публикация «Algebraic constructions generated by causal structure of space-times» в сборнике тезисов международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics II», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.

Спасибо за внимание!

→ Казимир Малевич. Супрематическая композиция, 1916