Алгебраические структуры, порожденные отношением причинности на пространствах-временах

В.А. Столбова, ФН1-81

Научный руководитель: А.В. Филиновский

Консультант: А.М. Никифоров

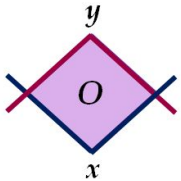
Цели и задачи

- ❖ организация **причинных подмножеств** пространственно-временных многообразий в **алгебраические структуры** (решетки [1]);
- ❖ **изучение свойств** полученных классических конструкций
- ❖ **сопоставление** с квантовомеханическими аналогами

Мотивировки

- ❖ **Алгебраическая квантовая теория поля** (АКТП) [2],[3]

$$M_1^4 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\text{GNS-теорема}} \pi(\mathfrak{A})$$



Конечная стягиваемая область

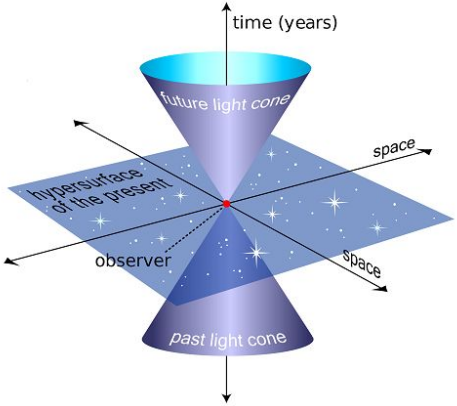
$\mathfrak{A}(O)$

Абстрактная C^*-алгебра

$\pi(\mathfrak{A}(O))$

Операторная алгебра на $\mathcal{H}$

- ❖ **Общая теория относительности** [4]



Структура пространства-времени –
структура дифференцируемого многообразия с заданной на нем Лоренцевой метрикой и ассоциированной с ней аффинной связностью

[1] Grätzer, G. (2002). General lattice theory. Springer Science & Business Media.
[2] Baumgärtel H., Wollenberg M. Causal nets of operator algebras: Mathematical aspects of algebraic quantum field theory. – 1992.
[3] Haag R., Kastler D. An algebraic approach to quantum field theory //Journal of Mathematical Physics. – 1964. – Т. 5. – №. 7. – С. 848-861.
[4] Hawking S. W., Ellis G. F. R. The large scale structure of space-time. – Cambridge university press, 1973. – Т. 1

Решетки (алгебраические системы). Определение

$$A = (\{a\}, \wedge, \vee)$$

$\wedge: A^{\times 2} \to A$ $\quad$ $\vee: A^{\times 2} \to A$

$(\text{"}a, \text{`}a) \mapsto \text{"}a \wedge \text{`}a$ $\quad$ $(\text{"}a, \text{`}a) \mapsto \text{"}a \vee \text{`}a$

Решеткой называется множество с двумя введенными на нем операциями такими, что выполняются следующие свойства:

идемпотентность

- $a \wedge a = a$
- $a \vee a = a$

коммутативность

- $\text{"}a \wedge \text{`}a = \text{`}a \wedge \text{"}a$
- $\text{"}a \vee \text{`}a = \text{`}a \vee \text{"}a$

ассоциативность

- $\overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{"}a \wedge \text{`}a = \text{'''}a \wedge \overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{`}a$
- $\overset{\boxtimes}{a} \vee \text{"}a \vee \text{`}a = \text{'''}a \vee \overset{\boxtimes}{a} \vee \text{`}a$

тождества поглощения

- $\text{`}a \wedge \overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{`}a = \text{`}a$
- $\text{`}a \vee \overset{\boxtimes}{a} \vee \text{`}a = \text{`}a$

$\forall a, \text{`}a, \text{"}a, \text{'''}a \in A$

Виды решеток

Модулярная решетка

- $$\frac{\text{`}a \wedge \text{"}a \vee \overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{`}a}{\overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{"}a \vee \overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{`}a}$$

$\forall \text{`}a, \text{"}a, \text{'''}a \in A$

Дистрибутивная решетка

- $\text{'''}a \vee \overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{`}a = \overset{\boxtimes}{a} \vee \text{"}a \wedge \overset{\boxtimes}{a} \vee \text{`}a$
- $\text{'''}a \wedge \text{"}a \vee \text{`}a = \overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{"}a \vee \overset{\boxtimes}{a} \wedge \text{`}a$

Ограниченная решетка

- $0_A \le a$
- $a \le 1_A$

$\forall a \in A$

Ортодополнением называется морфизм

$^{-\perp}: A \to A$

$a \mapsto \overline{a}^{\perp}$

такой, что:

- $a \wedge \overline{a}^{\perp} = 0_A$
- $a \vee \overline{a}^{\perp} = 1_A$
- $a \le \text{`}a \Rightarrow \overline{\text{`}a}^{\perp} \le \overline{\text{"}a}^{\perp}$
- $\overline{\left(\overline{a}^{\perp}\right)}^{\perp} = a$

$\forall a \in A \quad \exists\, \overline{a}^{\perp} \Rightarrow$ Решетка **с ортодополнениями**

Дополнением элемента называется элемент

$a \in A$

$\overset{N}{a} \in A:$

- $a \wedge \overset{N}{a} = 0_A$
- $a \vee \overset{N}{a} = 1_A$

$\forall a \in A \quad \exists\, \overset{N}{a} \Rightarrow$ Решетка **с дополнениями**

Булева алгебра $B\ oo$ – дистрибутивная решетка с ортодополнениями

Причинное дополнение. Отношение причинной несвязанности

***CS*–дополнением**, или **причинным дополнением**, подмножества $s \subseteq X$ называется отображение

$$\overset{cs}{\neg} : 2^X \to 2^X$$

такое, что

$$\begin{cases} \overset{2}{\overset{cs}{\neg}} s \subseteq s \\ \overset{cs}{\neg}\bigcup_j s_j = \bigcup_j \overset{cs}{\neg} s_j \\ \overset{cs}{\neg} s \cap \overset{cs}{\neg} s = \varnothing \end{cases}$$

***CS*–замыкание**, или **причинное замыкание**, подмножества $s \subseteq X$

$$\overset{2}{\overset{cs}{\neg}} s = \overset{cs}{\neg}\overset{cs}{\neg} s \equiv \overset{cm}{-} s$$

Семейство **причинно замкнутых подмножеств** множества X

$$^{cs}Cm(X) \equiv \left\{ {}^{cm}s \in 2^X \,\middle|\, \overset{2}{\overset{cs}{\neg}}\, {}^{cm}s = {}^{cm}s \right\}$$

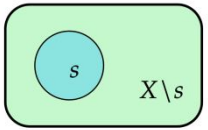
Отношение CS–несвязанности, или **причинной несвязанности** $\overset{cs}{\perp}$

$$s \overset{cs}{\perp} s \Leftrightarrow s \subseteq \overset{cs}{\neg} s$$

Примеры задания причинного дополнения

На множестве

$$\overset{cs}{\neg} : 2^X \to 2^X$$

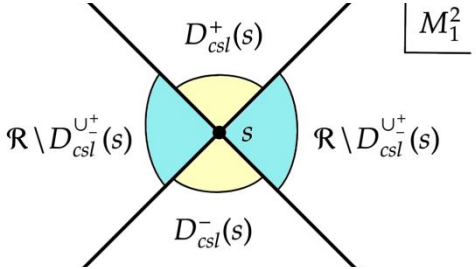


На глобально–гиперболическом пространстве–времени R

$$\overset{cs}{\neg} : 2^R \to 2^R$$

$$s \subseteq \overset{cs}{\neg} s \equiv \overset{csl}{\neg} s$$

$$\equiv R \setminus D^{\cup^+_-}_{csl}(s)$$



На множестве подпространств H_λ *бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространс*

$$\underset{sprb}{H}, \dim(H) = \infty$$

$$\overset{cs}{\neg} h_\lambda \equiv h_\lambda^{\perp} = \left\{ \begin{array}{l} \phi \in H \,\middle|\, \langle \phi, \psi_{\lambda_j} \rangle = 0 \\ \forall \psi_{\lambda_j} \in h_\lambda \end{array} \right\}$$

Булева алгебра **причинно замкнутых подмножеств** некоторого множества

$$B \circ\circ \underline{{}^{cs}Cm(X)} \equiv A\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp} \equiv \left({}^{cs}Cm(X), \overset{cm}{\wedge}, \overset{cm}{\vee}, 0_{A\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp}}, 1_{A\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp}}, \overset{cs}{\neg} \right)$$

$$\overset{cm}{s''} \overset{cm}{\wedge} \overset{cm}{s'} \equiv \overset{cm}{s''} \cap \overset{cm}{s'}$$

$$\overset{cm}{s''} \overset{cm}{\vee} \overset{cm}{s'} \equiv \overset{cs}{\overline{\overset{cm}{s''} \cup \overset{cm}{s'}}}$$

$$0_{A\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp}} = \varnothing$$

$$1_{A\,\underline{{}^{cs}Cm(X)}_{\perp}} = X$$

Классические решетки

1. Решетки **конусов** M_1^D на

$$\mathbf{A}\,\underline{\overset{\boxtimes}{Con}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{\boxtimes}{Con}\left(M_1^D\right), \overset{\boxtimes}{\wedge}, \overset{\boxtimes}{\vee}\right)$$

$$\mathbf{A}\,\underline{\overset{\boxtimes}{Con}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right), \overset{\boxtimes}{\wedge}, \overset{\boxtimes}{\vee}, 0_{\mathbf{A}\,\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}}, 1_{\mathbf{A}\,\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}}\right)$$

2. Решетки **диамантов** M_1^D на

$$\mathbf{A}\,\underline{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{Dmd}\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}} \equiv \left(\overset{\boxtimes I \boxtimes}{Dmd}\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}, \overset{\mathrm{V}}{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{\wedge}}, \overset{\mathrm{V}}{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{\vee}}\right)$$

$$\mathbf{A}\,\underline{\overset{\propto}{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{Dmd}}\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}} \equiv \left(\overset{\propto}{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{Dmd}}\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}, \overset{\mathrm{V}}{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{\wedge}}, \overset{\mathrm{V}}{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{\vee}}, 0_{\mathbf{A}\,\underline{\overset{\propto}{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{Dmd}}\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}}}, 1_{\mathbf{A}\,\underline{\overset{\propto}{\overset{\boxtimes I \boxtimes}{Dmd}}\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}}}\right)$$

3. Решетка **времениподобновыпуклых подмножеств** M_1^D

$$\mathbf{A}\,\underline{\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right), \cancel{\wedge}, \cancel{\vee}\right)$$

Квантовомеханические решетки

1. **Гильбертова** решетка

$$\mathbf{A}\,\underline{\overset{\boxtimes}{-}Cm(\mathrm{H})_{\perp}} \equiv \left(\overset{\boxtimes}{-}Cm(\mathrm{H}), \overset{\boxtimes}{\overset{-}{\wedge}}, \overset{\boxtimes}{\overset{-}{\vee}}, 0_{\mathbf{A}\,\underline{\overset{\boxtimes}{-}Cm(\mathrm{H})}}, 1_{\mathbf{A}\,\underline{\overset{\boxtimes}{-}Cm(\mathrm{H})}}, \overset{\boxtimes}{-}\perp\right)$$

2. **Проекторная** решетка

$$\mathbf{A}\,\underline{P(\mathrm{H})_{\perp}} \equiv \left(P(\mathrm{H}), \overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}, 0_{\mathbf{A}\,\underline{P(\mathrm{H})}}, 1_{\mathbf{A}\,\underline{P(\mathrm{H})}}, \overset{P}{\perp}\right)$$

3. Решетка **алгебр фон Нойманна**

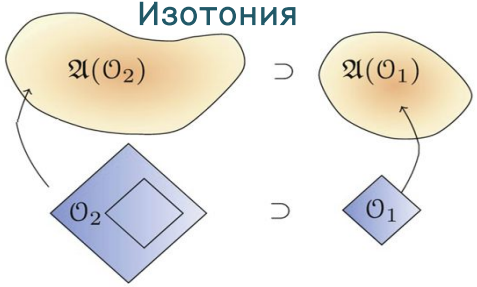
$$\mathbf{A}\,\underline{B(\mathrm{H})} \equiv \left(\{\cancel{N}\}, \overset{\mathrm{H}}{\wedge}, \overset{\mathrm{H}}{\vee}, 0_{\mathbf{A}\,\underline{B(\mathrm{H})}}, 1_{\mathbf{A}\,\underline{B(\mathrm{H})}}\right)$$

Решетка причинно замкнутых подмножеств

$$\mathbf{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)_{\perp}} \equiv \left({}^{cs}Cm(X), \overset{cm}{\wedge}, \overset{cm}{\vee}, 0_{\mathbf{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)_{\perp}}}, 1_{\mathbf{A}\,\underline{{}^{cs}Cm(X)_{\perp}}}, \overset{cs}{\neg}\right)$$

Алгебраическая квантовая теория поля. Аксиомы Хаага–Кастлера

1. Изотония



$$O_1 \subseteq O_2 \Rightarrow \exists\, \iota_{12} : \mathsf{A}(O_1) \to \mathsf{A}(O_2).$$

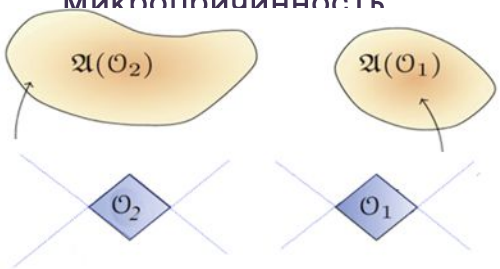
$$\forall\, \tilde{U}, U : \tilde{U} \subseteq U \quad \exists\, in_U^{\tilde{U}} : \mathsf{A}(\tilde{U}) \to \mathsf{A}(U)$$

$$\tilde{\tilde{U}} \subseteq \tilde{U} \subseteq U \Rightarrow in_{\tilde{U}}^{\tilde{\tilde{U}}} \circ in_U^{\tilde{U}} = in_U^{\tilde{\tilde{U}}}$$

$$in_{\tilde{U}}^{\tilde{\tilde{U}}} \circ in_U^{\tilde{U}} = in_U^{\tilde{\tilde{U}}}$$

$$\mathsf{A}(\tilde{\tilde{U}}) \longrightarrow \mathsf{A}(\tilde{U}) \longrightarrow \mathsf{A}(U)$$

2. Микропричинность



$$[\mathsf{A}(O_1), \mathsf{A}(O_2)] = 0$$

3. Ковариантность

$$\rho_{(\Lambda,a)}(\mathsf{A}(O)) = \mathsf{A}(\Lambda O + a)$$

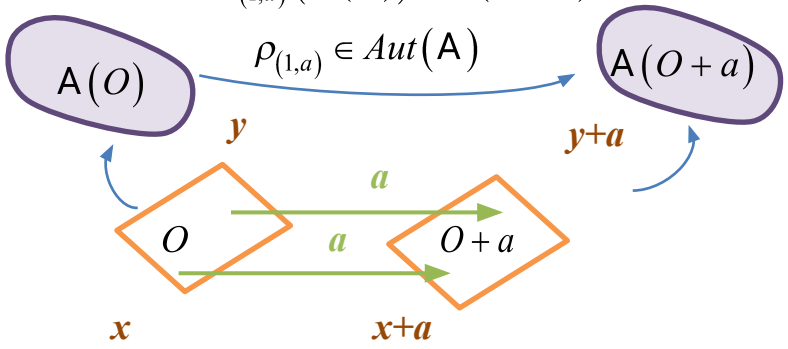
$$\forall (\Lambda, a) \in \Pi_+^{\uparrow},$$

$$\rho_{(\Lambda,a)} \in Aut(\mathsf{A}).$$

Трансляционная ковариантность

$$\rho_{(1,a)}(\mathsf{A}(O)) = \mathsf{A}(O + a)$$

$$\rho_{(1,a)} \in Aut(\mathsf{A})$$



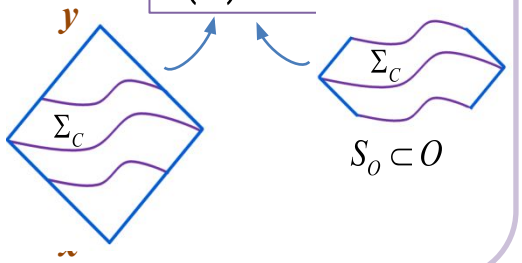
M_1^4

Алгебраическая квантовая теория поля.

Аксиомы Хаага–Кастлера

4. Аксиома временного слоя

$$\mathsf{A}(O) = \mathsf{A}(S_O)$$



5. Спектральное условие

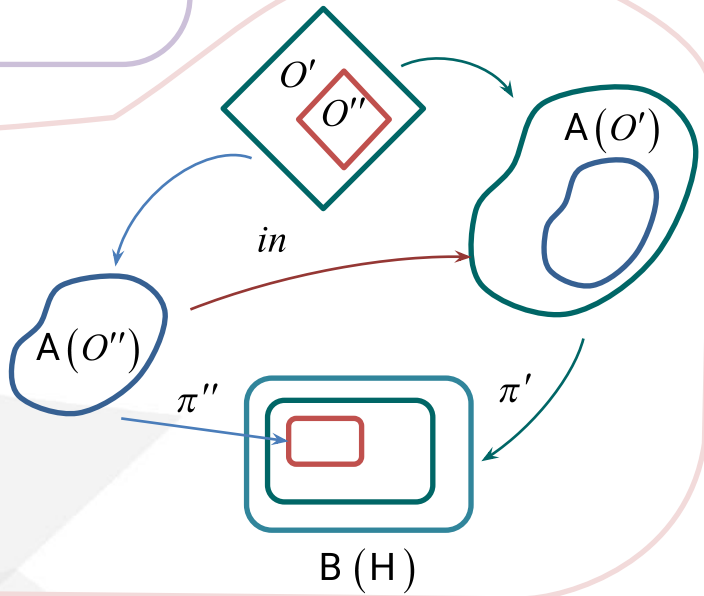
$$spec(P_\beta) \subset \bar{V}_+$$

$$O' \supseteq O''$$

$$\pi' : \mathsf{A}(O') \to \mathsf{B}(\mathsf{H})$$

$$\pi'' : \mathsf{A}(O'') \to \mathsf{B}(\mathsf{H})$$

$$\pi'|_{in(\mathsf{A}(O''))} = \pi''$$



Локально ковариантная квантовая теория поля [5]

$$Loc \xrightarrow{\mathsf{F} \equiv (\mathsf{A}, \rho)} Obs$$

$Ob(Loc) \ni (R, g)$

– глобально-гиперболическое пространство-время

$Mor(Loc) \ni$

$\iota : (`R_1^4, `g) \to (``R_1^4, ``g)$

– изометрия, сохраняющая ориентации и причинную структуру

$Ob(Obs) \ni \mathsf{A}$

– $C^\dagger$ –алгебры с единицей

$Mor(Obs) \ni \rho$

– точные †–гомоморфизмы, сохраняющие единицу

[5] Brunetti R., Fredenhagen K., Verch R. The generally covariant locality principle–a new paradigm for local quantum field theory //Communications in Mathematical Physics. – 2003. – Т. 237. – №. 1-2. – С. 31-68.

Классические решетки

Решетки конусов на M_1^D

$$\mathbb{A}\,\underline{\overset{\boxtimes}{Con}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{\boxtimes}{Con}\left(M_1^D\right),\ \overset{\boxtimes}{\wedge},\ \overset{\boxtimes}{\vee}\right)$$

– дистрибутивная

$$\mathbb{A}\,\underline{\overset{\boxtimes}{Con}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right),\ \overset{\boxtimes}{\wedge},\ \overset{\boxtimes}{\vee},\ 0_{\mathbb{A}\,\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}},\ 1_{\mathbb{A}\,\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}}\right)$$

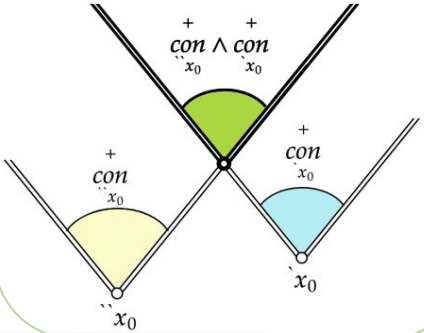
– ограниченная

$$0_{\mathbb{A}\,\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}} \equiv \varnothing,\quad 1_{\mathbb{A}\,\underline{\overset{\propto}{Con}\left(M_1^D\right)}} = M_1^D$$

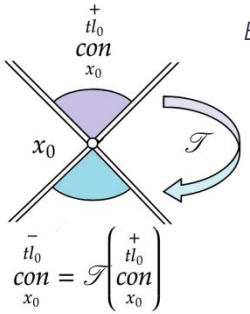
$$\boxtimes \in \left\{ \overset{+}{tl}_0, \overset{-}{tl}_0, \overset{+}{csl}, \overset{-}{csl} \right\}$$

Операция пересечения $\overset{+}{tl}_0$ $\wedge$

$$\overset{\boxtimes}{con}_{x_0} \wedge \overset{\boxtimes}{con}_{x_0} \equiv \overset{\boxtimes}{con}_{x_0} \cap \overset{\boxtimes}{con}_{x_0}$$



Биекция T

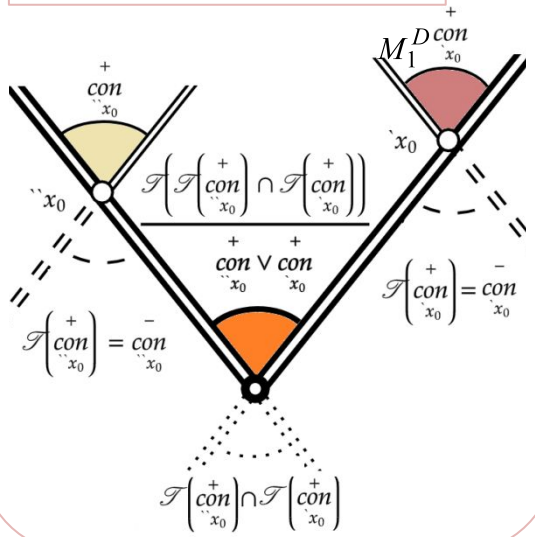


$$T\left(\overset{sgn_{\boxtimes}l}{con}_{x_0}\right) \equiv \overset{\neg sgn_{\boxtimes}l}{con}_{x_0}$$

$$\mathrm{sgn} \in \{+,-\}$$

Операция объединения $\overset{+}{tl}_0$ $\vee$

$$\overset{\boxtimes}{con}_{x_0} \vee \overset{\boxtimes}{con}_{x_0} \equiv T\left(T\ \overset{\boxtimes\boxtimes}{con}_{x_0} \cap T\ \overset{\boxtimes\boxtimes}{con}_{x_0}\right)$$

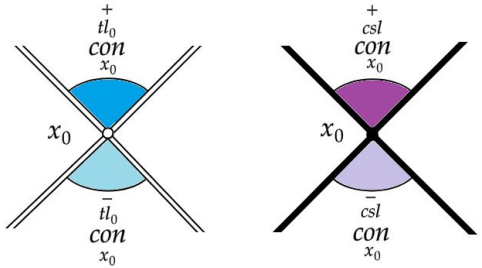


Семейства конусов на M_1^D

Времениподобные | Причинные

Верхние

Нижние



$$\overset{+}{tl}_0 Con\left(M_1^D\right) = \left\{ \overset{+}{tl}_0 con_{x_0},\ \overset{+}{tl}_0 con_{x_0} \circ \left\{ x \in M_1^D \,\middle|\, q_h(x - x_0) > 0,\ (x - x_0)^0 > 0 \right\} \right\}$$

$$\overset{-}{tl}_0 Con\left(M_1^D\right) = \left\{ \overset{-}{tl}_0 con_{x_0},\ \overset{-}{tl}_0 con_{x_0} \circ \left\{ x \in M_1^D \,\middle|\, q_h(x - x_0) > 0,\ (x - x_0)^0 > 0 \right\} \right\}$$

$$\overset{+}{csl} Con\left(M_1^D\right) = \left\{ \overset{+}{csl} con_{x_0},\ \overset{+}{csl} con_{x_0} \circ \left\{ x \in M_1^D \,\middle|\, q_h(x - x_0) \geq 0,\ (x - x_0)^0 > 0 \right\} \right\}$$

$$\overset{-}{csl} Con\left(M_1^D\right) = \left\{ \overset{-}{csl} con_{x_0},\ \overset{-}{csl} con_{x_0} \circ \left\{ x \in M_1^D \,\middle|\, q_h(x - x_0) \geq 0,\ (x - x_0)^0 < 0 \right\} \right\}$$

Классические решетки

$$\mathrm{A}\,\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}} \equiv \left(Dmd\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}},\ \wedge,\ \vee \right)$$

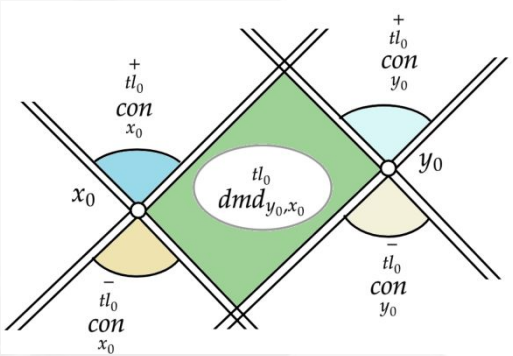
– дистрибутивная

Семейства диамантов на M_1^D

$$dmd\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}} \circ con_{y} \cup con_{x} \cap con_{y} \cup con_{x}$$

$$\circ\ con_{z} \cap con_{z}$$

$$con_{z},\ con_{z} \in Con\left(M_1^D\right);\ l \in \{tl_0, csl\}$$



Решетки диамантов на M_1^D

$$\mathrm{A}\,\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}} \equiv \left(Dmd\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}},\ \wedge,\ \vee,\ 0_{\mathrm{A}\,\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}}},\ 1_{\mathrm{A}\,\underline{Dmd\left(M_1^D\right)_{\mathrm{V}}}} \right)$$

– ограниченная

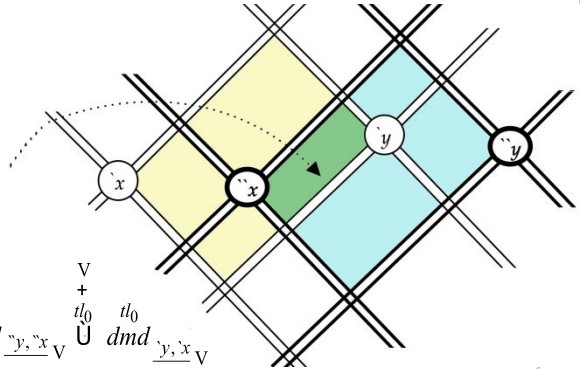
$$0_{\mathrm{A}\,\underline{Con\left(M_1^D\right)}} \equiv \varnothing,\ 1_{\mathrm{A}\,\underline{Con\left(M_1^D\right)}} = M_1^D$$

Операция пересечения

$$dmd\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}} \cup dmd\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}} \circ$$

$$\circ\ con_{y} \cup con_{x} \cup con_{y} \cup con_{x} \cap con_{y} \cup con_{x} \cup con_{y} \cup con_{x}$$

$\vee + tl_0 \wedge$



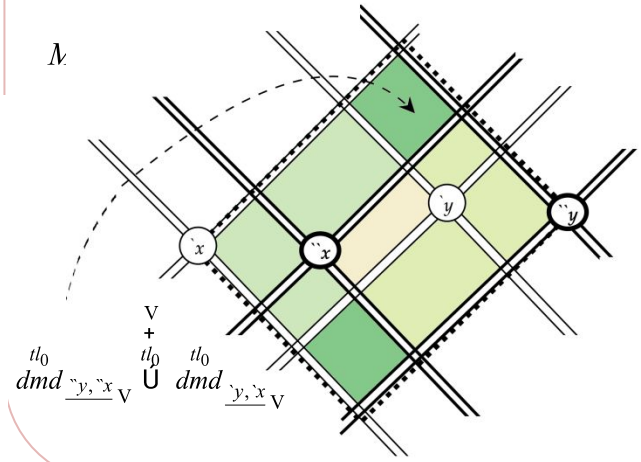
$$dmd^{tl_0}\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}} \overset{\vee + tl_0}{\cup} dmd^{tl_0}\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}}$$

Операция объединения

$$dmd\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}} \overset{\vee}{\cup} dmd\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}} \circ$$

$$\circ\ con_{y} \cup con_{x} \cup con_{y} \cup con_{x} \cap con_{y} \cup con_{x} \cup con_{y} \cup con_{x}$$

$\vee + tl_0 \vee$



$$dmd^{tl_0}\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}} \overset{\vee + tl_0}{\cup} dmd^{tl_0}\,\underline{y,x}_{\mathrm{V}}$$

Классические решетки

Решетка **времениподобно выпуклых** подмножеств M_1^D

$$\mathrm{A}\,\underline{\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)} \equiv \left(\overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right), \nwedge, \nvee\right)$$

$$\overset{tl}{cnv}{}'' \nwedge \overset{tl}{cnv}{}' \equiv \overset{tl}{cnv}{}'' \cap \overset{tl}{cnv}{}'$$

$$\overset{tl}{cnv}{}'' \nvee \overset{tl}{cnv}{}' \equiv \frac{\overset{tl}{span}_{dmd}\left(\overset{tl}{cnv}{}'' \cup \overset{tl}{cnv}{}'\right)}{\bigcup_{y,x \in \overset{tl}{cnv}{}'' \cup \overset{tl}{cnv}{}'} \overset{tl}{dmd}(y,x)} = \frac{\overset{tl}{cnv}{}'' \cup \overset{tl}{cnv}{}' \cup \bigcup_{\substack{y \in \overset{tl}{cnv}{}'' \\ x \in \overset{tl}{cnv}{}'}} \overset{tl}{dmd}(y,x)}{}$$

Времениподобно выпуклым подмножеством

пространства–времени $\overset{tl}{cnv} \in \overset{tl}{Cnv}$ называется подмножество пространства–времени $\overset{tl}{cnv}$, такое, что

$$\overset{tl}{cnv} \in \overset{tl}{Cnv}: \quad dnd\left(\grave{x}, \grave{x}\right) \subseteq \overset{tl}{cnv} \;\Big|\; \left(\grave{x}, \grave{x}\right) \in \overset{tl}{cnv}{}^{\times 2}; \quad \left(x'' - x'\right) - timelike$$

то есть, такое подмножество пространства–времени,

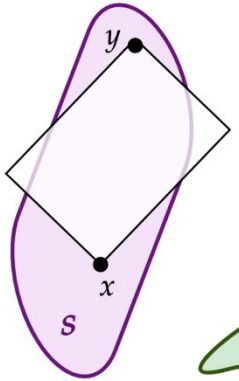
которое вместе со всякой парой времениподобно отстоящих точек содержит их времениподобное замыкание

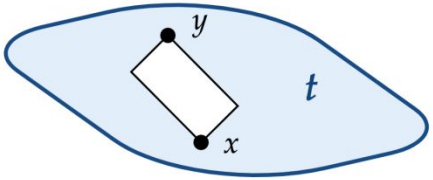
$$\overset{tl}{\{}\grave{x}, \grave{x}\} \equiv \overset{tl}{dnd}\left(\grave{x}, \grave{x}\right)$$

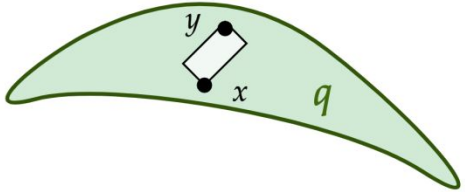
Примеры

$$t, q \in \overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)$$

$$s \notin \overset{tl}{Cnv}\left(M_1^D\right)$$







Квантовомеханические решетки

1. Ограниченная решетка с ортодополнениями
замкнутых по норме подпространств гильбертова пространства

$$\mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}_{\perp}} \equiv \left(\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H}), \overset{\mathbb{H}}{\wedge}, \overset{\mathbb{H}}{\vee}, 0_{\mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}}}, 1_{\mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}}}, {}^{\mathbb{H}}\text{-}\perp \right)$$

$$\mathbb{H}\text{-}h'' \overset{\mathbb{H}}{\wedge} \mathbb{H}\text{-}h' \equiv \mathbb{H}\text{-}h'' \cap \mathbb{H}\text{-}h'$$

$$\mathbb{H}\text{-}h'' \overset{\mathbb{H}}{\vee} \mathbb{H}\text{-}h' \equiv {}^{\mathbb{H}}\text{-}\overline{\mathbb{H}\text{-}h'' + \mathbb{H}\text{-}h'}$$

$$1_{\mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}}} = \mathrm{H}$$

$$0_{\mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}}} = \mathbb{H}$$

$$\mathbb{H}\text{-}\perp : \mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}_{\perp}} \to \mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}_{\perp}}$$

$$\mathbb{H}\text{-}h \mapsto {}^{\mathbb{H}}\text{-}\overline{\mathbb{H}\text{-}h}^{\perp} \equiv \mathbb{H}\text{-}h^{\perp}$$

–ортогональное дополнение

2. Ограниченная решетка с ортодополнениями
операторов проектирования на гильбертовом пространстве

$$\mathbf{A}_{\underline{P(\mathrm{H})}_{\perp}} \equiv \left(P(\mathrm{H}), \overset{P}{\wedge}, \overset{P}{\vee}, 0_{\mathbf{A}_{\underline{P(\mathrm{H})}}}, 1_{\mathbf{A}_{\underline{P(\mathrm{H})}}}, {}^{P}\perp \right)$$

$$P\left(\mathbb{H}\text{-}h''\right) \overset{P}{\wedge} P\left(\mathbb{H}\text{-}h'\right) \equiv P\left(\mathbb{H}\text{-}h'' \overset{\mathbb{H}}{\wedge} \mathbb{H}\text{-}h'\right)$$

$$P\left(\mathbb{H}\text{-}h''\right) \overset{P}{\vee} P\left(\mathbb{H}\text{-}h'\right) \equiv P\left(\mathbb{H}\text{-}h'' \overset{\mathbb{H}}{\vee} \mathbb{H}\text{-}h'\right)$$

$$1_{\mathbf{A}_{\underline{P(\mathrm{H})}}} = P\left(1_{\mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}}}\right)$$

$$0_{\mathbf{A}_{\underline{P(\mathrm{H})}}} = P\left(0_{\mathbf{A}_{\underline{\mathbb{H}\text{-}Cm(\mathrm{H})}}}\right)$$

$${}^{P}\perp : \mathbf{A}_{\underline{P(\mathrm{H})}_{\perp}} \to \mathbf{A}_{\underline{P(\mathrm{H})}_{\perp}}$$

$$P\left(\mathbb{H}\text{-}h\right) \mapsto {}^{P}\overline{P\left(\mathbb{H}\text{-}h\right)}^{\perp} \equiv P\left(\mathbb{H}\text{-}h^{\perp}\right)$$

3. Ограниченная решетка с дополнениями алгебр фон Нойманна

$$\mathbf{A}_{\underline{\mathrm{B}(\mathrm{H})}} \equiv \left(\{\cancel{N}\}, \overset{\mathrm{H}}{\wedge}, \overset{\mathrm{H}}{\vee}, 0_{\mathbf{A}_{\underline{\mathrm{B}(\mathrm{H})}}}, 1_{\mathbf{A}_{\underline{\mathrm{B}(\mathrm{H})}}} \right)$$

$$\cancel{N}'' \overset{\mathrm{H}}{\wedge} \cancel{N}' \equiv \cancel{N}'' \cap \cancel{N}'$$

$$\cancel{N}'' \overset{\mathrm{H}}{\vee} \cancel{N}' \equiv \boxtimes \cancel{N}'' \cup \cancel{N}'^{C2}$$

$$1_{\mathbf{A}_{\underline{\mathrm{B}(\mathrm{H})}}} = \mathrm{B}(\mathrm{H})$$

$$0_{\mathbf{A}_{\underline{\mathrm{B}(\mathrm{H})}}} = £ \mapsto 1_{\mathrm{B}(\mathrm{H})}$$

$$\cancel{N}^{C} = \left\{ \overset{\mathrm{N}}{\cancel{N}} \right\}$$

Заключение

- Построение алгебраических структур, индуцированных отношением причинности, в данной работе ограничивается **решетками**
- Как семейства подлежащих подмножеств, так и операции, заданные на них, отражают **причинные свойства**
- Полученные **классические конструкции сопоставлены с квантовомеханическими интерпретациями** булевой алгебры подмножеств

Перспективы исследования

- Руководствуясь аксиоматикой АКТП, **подмножества пространства-времени** можно рассматривать в качестве отправной точки для **построения сетей алгебр наблюдаемых**
- Задача **систематизации подмножеств пространства-времени** получает перспективы дальнейшей **интерпретации на алгебраическом этаже** и, возможно, **разработке процедуры квантования** путем **построения соответствий** между классическими и квантовыми решетками
- Полученный в работе ряд пространственно-временных решёток на пространстве-времени Минковского имеет целью дальнейшее **применение в релятивистских локальных квантовых теориях на искривлённых пространствах-временах**
- Таким образом, **возникает необходимость в разработке форм организации подмножеств пространства-времени**, которые **естественны с точки зрения процедур манипулирования** (в контексте АКТП) **информацией о причинной структуре**

Апробация работы

- 1. Выступления на «Семинаре по алгебре, геометрии в математической физике» (руководитель: Никифоров А.М.)

- 2. Выступление на международной конференции «Mathematical Spring-2019», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г. Тема доклада: Monoidal Categories in Mathematical Physics

- 3. Выступление на международной конференции «Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ», МФТИ, 2019 г. Тема доклада: Моноидальные категории в теориях поля

- 4. Выступление на международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics II», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г. Тема доклада: Algebraic constructions generated by causal structure of space-times

- 5. Публикация «Monoidal Categories in Mathematical Physics» в сборнике тезисов международной конференции «Mathematical Spring-2019», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.

- 6. Публикация «Algebraic constructions generated by causal structure of space-times» в сборнике тезисов международной конференции «Topological methods in dynamics and related topics II», НИУ ВШЭ-НН, 2019 г.

Спасибо за внимание!

→ Казимир Малевич. Супрематическая композиция, 1916