КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
РХТУ имени Д. И. Менделеева

Дифференциальные уравнения

Лекция № 4

Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.
Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Свойства их решений.

Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение1. Уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

называется ***<u>дифференциальным уравнением 2-го порядка.</u>***

$$y'' = \mathrm{f}(x, y, y') \qquad (2)$$

Определение2.

Семейство функций $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ называется общим решением ДУ(1), если выполнены два условия:

1. При любых значениях $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$ функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ является решением ДУ(1).

2. При любых начальных условиях $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, взятых из области существования и единственности решения, найдутся такие значения $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$, при которых функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$удовлетворяет этим начальным условиям, т. е.$y_0 = \varphi(x_0, C_{10}, C_{20})$.

Задача Коши

- $$y'' = \mathrm{f}(x, y, y') \qquad (`2)$$
  $$y(x_0) = y_0\ ,$$
  $$y'(x_0) = y_0'.$$

Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка (2) состоит в отыскании частного решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

Геометрически это означает найти интегральную кривую, проходящую через данную точку $M(x_0, y_0)$ в заданном направлении $\mathrm{t}g\alpha_0 = y_0'$

.

Теорема (существования и единственности задачи Коши)

Если в уравнение $y'' = \mathrm{f}(x, y, y')$(2) функция $\mathrm{f}(x, y, y')$ и ее частные производные $\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}$ и $\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y, y' $D \epsilon R^3$,то для всякой точки $(x_0, y_0, y_0')\epsilon$D существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2) удовлетворяющее начальным условиям: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$

Виды дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающие понижение порядка

- **1. Уравнение разрешено относительно старшей производной и имеет вид:**

$$\boldsymbol{y'' = f(x)}$$

Интегрируя последовательно два раза обе части уравнения, будем иметь:

$$y' = \int f(x)dx + C_1\,,$$

$y' = \mathrm{F}(x) + C_1,\ C_1 \epsilon R,$ $\mathrm{F}(x)$- первообразная для функции $\mathrm{f}(x)$

$$y = \int(\mathrm{F}(x) + C_1)dx + C_2,$$

$$y = \int F(x)dx + C_1 \cdot x + C_2\,,\ \ C_1, C_2 \epsilon R,$$

Пример1. Решить уравнение:

$$y'' = x + sin2x.$$

Решение.

$$(y')' = x + sin2x,$$

$$y' = \int (x + sin2x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{cos2x}{2} + C_1 \ ,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{cos2x}{2} + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{sin2x}{4} + C_1x + C_2$$

Ответ: $y = \frac{x^3}{6} - \frac{sin2x}{4} + C_1x + C_2$

Пример2.

Решить задачу Коши: $y'' = x\ln x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

Решение:

$$y' = \int x\ln x\,dx + C_1$$

$$\int x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\,dx; & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_1$$

Найдем значение C_1, исходя из начального условия: $y'(1) = 0$

$$0 = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4}$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right)dx + C_2$$

$$\int \frac{1}{2}x^2 \ln x\,dx = \quad u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{1}{2}x^2 dx; \quad v = \frac{x^3}{6} \qquad \int =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 \ln x - \int \frac{1}{6}x^2 dx = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{1}{18}x^3 + \int$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + C_2,$$

Подставим начальное условие: $y(1) = 1$,

$$1 = \frac{1}{6}\cdot 1^3 \cdot \ln 1 - \frac{5}{36}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + C_2 \quad C_2 = \frac{8}{9}$$

Подставим $C_2 = \frac{8}{9}$ в

$$y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{1}{4}x + C_2,$$

получим $y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{8}{9}$ – решение задачи Коши.

Ответ: $y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{8}{9}$.

2.Уравнение не содержит явно искомую функцию y

$$\boldsymbol{F(x, y', y'') = 0} \qquad (3)$$

Выполним замену:

$$\boldsymbol{y' = z(x), \quad y'' = z'(x).}$$

Тогда для функции $z = z(x)$ получим ДУ 1 – го порядка

$$F(x, z, z') = 0. \qquad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4), найдем его общий интеграл:

$$\varphi(x, z, C_1) = 0\,. \qquad (5)$$

Подставив в (5) $z = y'$, получим для функции $y = y(x)$ дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\varphi(x, y', C_1) = 0\,. \qquad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), найдем общий интеграл исходного ДУ(3):

$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, где C_1, C_2 –произвольные постоянные.

.

Пример3. Найти общее решение уравнения: $y'' + y' = \xi\sqrt{y}$

<u>Решение.</u>

Делаем замену:

$y' = y'(x)$ и $y'' = y''(x)$.

$y'' + y = \xi\sqrt{y}$ или $y' + \frac{1}{y}y = y^{-\frac{1}{2}}$, являющееся линейным уравнением. Решим это уравнение методом Бернулли.

$y = uz$, $z' = u'z + uz'$

$$u'z + uz' + \frac{uz}{z} = \frac{1}{\xi\sqrt{z}},$$

$$u'z + uz'u' + \frac{u}{z}z = \frac{1}{\xi\sqrt{z}};$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0$$

$$u' = \frac{1}{\xi \sqrt{x}}$$

$$1 \cdot u' + \frac{u}{x} = 0,$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dx},$$

$$\ln|u| + \ln|x| = C, \qquad u \cdot x = C$$

При $x = 0$: $\ln|u| = -\ln|x|$,

$$u = \frac{1}{x},$$

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$u' = \sqrt{x},$$

$$x = \int \sqrt{x}\,dx + C_1,$$

$$x = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C_1,$$

$$x = \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} + C_1\right)\frac{1}{x},$$

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{C_1}{x},$$

Обратная замена $x = y'$:

$$y' = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{C_1}{x},$$

$$x = \int \left(\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{C_1}{x}\right) dx + C_2$$

$$x = \frac{4}{9} x\sqrt{x} + C_1 \ln|x| + C_2, \qquad C_1, C_2 = \text{const}$$

Пример4. Решить задачу Коши:

$$y'' = \frac{y'}{x}(1 + \ln\frac{y'}{x}), \quad y(1) = \frac{1}{2};\ y'(1) = 1$$

Решение.

Выполним в уравнение замену:

$$y' = p(x),\ y'' = p'(x)$$

$$p' = \frac{p}{x}(1 + \ln\frac{p}{x}) -$$ однородное д.у. 1-го порядка

Замена: $\frac{p}{x} = u(x),\ p = ux,\ p' = u'x + u$

$u'x + u = u + u\ln u,$

$u'x = u\ln u,$

$\frac{du}{dx} = u\ln u,$

$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x},$

$\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x},$

$\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{\ln u},$

$\ln u = \ln x,$

$\frac{p}{x} = \ln x,$

Найдем C_1, исходя из начального условия $y'(1) = 1$

$$y'(1) = C_1(1) \quad C_1 = 0.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad dy = dx,$$

$$y' = x,$$

$$y = \quad + C_2,$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C_2,$$

Найдем C_2, исходя из начального условия $y(1) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_2 \quad C_2 = 0,$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \text{частное решение.}$$

Ответ: $y = \frac{x^2}{2}$

3.Уравнение не содержит явно независимую переменную x

$$\boldsymbol{F(y, y', y'') = 0} \qquad (7)$$

Выполним замену:

$$\boldsymbol{y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}}.$$

Тогда для функции $p = p(y)$ получим ДУ 1-го порядка:

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0\,. \qquad (8)$$

Интегрируя это уравнение, найдем его общий интеграл:

$$\varphi(y, p, C_1) = 0\,. \qquad (9)$$

Подставляя y' вместо p, получим ДУ 1-го порядка относительно искомой функции $y = y(x)$:

$$\varphi(y, y', C_1) = 0. \qquad (10)$$

Решая ДУ (10), получим общий интеграл исходного ДУ(7):

$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, где C_1, C_2 –произвольные постоянные.

.

Пример5. Решить уравнение: $y' + xy^2 = 2x^{-3}$

Решение.

Выполним в уравнение замену:

$$y = uv, \quad y' = \frac{uvv}{uvv} = uvv'$$

$$uvv' + x^2 = 2x^{-3}$$

$$v' + x = \frac{2x^{-3}}{u} - \text{ уравнение Бернулли.}$$

Замена: $u = vvvvvvvvvv$, $v' = v'u + uvv'$

$$v'u + uvv' + uvv = \frac{2x^{-3}}{uvv},$$

$$v'u + uvv' + uv = \frac{2x^{-3}}{uvv},$$

1. $v' + v = 0$,

2. $v'u = \frac{2x^{-3}}{uvv}$,

1. $\frac{vvv}{vvv} = -v$,

$v\frac{vvv}{v} = -v\,vvv$,

$vvvàvà = -v$,

$$\boxed{v = vx^{-3}},$$

2. $y' y^{-1} = \frac{2x^{-1}}{x^{-1}}$,

$y\,dy = 2x\,dx$,

$\frac{y^2}{2} = 2x^2 + 2C_1$,

$y^2 = 4x^2 + 4C_1$,

$y = \pm 2\sqrt{x^2 + C_1}$,

$y = \pm x^{-1}\sqrt{x^2 + C_1}$,

$y' = \frac{\pm 2\sqrt{x^2 + C_1}}{x^2}$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 2\sqrt{x^2 + C_1}}{x^2}$,

$\frac{\pm x^2\,dy}{2\sqrt{x^2 + C_1}} = dx$,

$\pm \int \frac{d(x^2 + C_1)}{2\sqrt{x^2 + C_1}} = \int dx$,

$\pm \sqrt{x^2 + C_1} = x + C_2$,

$x^2 + C_1 = (x + C_2)^2$ – общий интеграл д. у.,

Ответ: $x^2 + C_1 = (x + C_2)^2$

Пример6. Решить задачу Коши:

$$y \cdot y'' + (y')^3 - (y')^2 = 0, \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$$

Решение.

Выполним замену:

$$\boldsymbol{y' = p(y), \qquad y'' = p \cdot \frac{dp}{dy},}$$

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2 - p^3\,, \qquad (*)$$

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2(1-p),$$

Разделим на $p^2(1-p)y \neq 0$

$$\frac{dp}{p(1-p)} = \frac{dy}{y},$$

$p = 0; p = 1 -$ решения уравнения (*),

Но, исходя из начальных условий, не имеют отношения к искомому решению задачи Коши.

$$\int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \frac{dy}{y} \ ,$$

$$\int \frac{(1-p)+p}{p(1-p)} dp = ln|y| + ln|C_1| \ ,$$

$$\int \frac{dp}{p} - \int \frac{dp}{p-1} = ln|C_1 y|,$$

$$ln|p| - ln|p-1| = ln|C_1 y|,$$

$$\frac{p}{p-1} = C_1 y,$$

Исходя из начальных ,имеем:$p = -1, y = 1$ при $x = 1$, следовательно

$$\frac{-1}{-1-1} = C_1 1 \Longrightarrow \mathrm{C}_1 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{p}{p-1} = \frac{1}{2} y \ ,$$

$$2p = py - y \ ,$$

$$\boxed{p = \frac{y}{y-2}} \ ,$$

$$y' = \frac{y}{y-2} \quad ,$$

$$\frac{y-2}{y} dy = dx \ ,$$

$$\int \left(1 - \frac{2}{y}\right) dy = \int dx \ ,$$

$$y - 2ln|y| = x + C_2 \, .$$

Из начальных условий находим:

$$1 - 2ln1 = 1 + C_2 \Longrightarrow C_2 = 0.$$

Следовательно,

$$y - lny^2 = x - \text{искомое решение задачи Коши.}$$

Ответ: $y - lny^2 = x$

Пример7. Решить уравнение: $yy'' + (y')^2 = 2x + 1$

Решение.

Можно заметить, что левая часть уравнения представляет собой производную от yy'

$$(yy')' = 2x + 1,$$

Выполним замену: $z = yy'$

$$z' = 2x + 1\,,$$

$$z = \int (2x + 1)dx + C_1,$$

$$z = x^2 + x + C_1,$$

$$yy' = x^2 + x + C_1,$$

$$ydy = (x^2 + x + C_1)dx,$$

$$\int ydy = \int (x^2 + x + \ C_1)dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

Ответ: $3y^2 = 2x^3 + 3\,x^2 + c_1x + c_2$

Порядок уравнения понижается, если дифференциальное уравнение удается преобразовать к такому виду, что обе части уравнения становятся полными производными по x от каких-нибудь функций.

Пример8. Решить уравнение: $yy'' = y'(y'+1)$.

Решение.

Деля обе части уравнения на $y \cdot (y'+1) \neq 0$, получаем

$$\frac{y''}{y'+1} = \frac{y'}{y}$$

$$(ln(y'+1))' = (lny)',$$

Из последнего соотношения следует, что

$$ln(y'+1) = lny + ln|C_1|,$$

$$y'+1 = C_1 y,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y - 1,$$

$$\int \frac{dy}{C_1 y - 1} = \int dx$$

$$\frac{1}{C_1} ln|\, C_1 y - 1| = x + \overline{C_2}, \quad C_1 \overline{C_2} = C_2 \ , \quad y = -x + C$$

Ответ: $ln|\, C_1 y - 1| = C_1 x + C_2, y = C\ , y = -x + C$

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение1. *Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) 2-го порядка* называется уравнение вида:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – некоторые данные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) имеет вид:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

и называется *линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2-го порядка.*

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2-го порядка.*

Теорема (существования и единственности решения)

Пусть функции $P(x), Q(x), f(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале (a, b). Тогда дифференциальные уравнения (1) и (2) при любых начальных значениях $x_0 \epsilon (a, b)$, $y_0, y_0' \epsilon R$ имеют единственные решения, удовлетворяющие условиям:

$$y(x_0) = y_0 \quad , y'(x_0) = y_0'$$

Далее относительно функций $P(x), Q(x), f(x)$ будем предполагать их непрерывность в интервале интегрирования уравнений (1),(2).

Свойства решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Теорема1. Функция $y \equiv 0$ является решением ЛОДУ 2-го порядка (2).

Доказательство.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (2)$$

$$0 \equiv 0$$

Подстановка функции $y \equiv 0$ в уравнение (2) обращает его в тождество.

Теорема2. Пусть $y_1(x)$ –решение ЛОДУ(2), C-произвольное число, то функция $y = C \cdot y_1(x)$ также является решением уравнения (2).

Доказательство.

Так как функция $y_1(x)$- решение уравнения(2), то справедливо тождество:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 \equiv 0$$

Подставим функцию $y = C \cdot y_1(x)$ в уравнение (2):

$$y' = C \cdot y_1', \quad y'' = C \cdot y_1'',$$

$$C \cdot y_1'' + P(x)C \cdot y_1' + Q(x)\ C \cdot y_1(x) = 0,$$

$$C(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)\ y_1(x)\ )=0,$$

$$\mathrm{C} \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Следовательно функция $y = C \cdot y_1(x)$ является решением уравнения (2).

<u>Теорема3</u>. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ –решения ЛОДУ(2), то их сумма $y = y_1(x) + y_2(x)$ также является решением уравнения (2).

Доказательство.

Так как каждая из функций $y_1(x), y_2(x)$- решение уравнения (2), то справедливы тождества:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 \equiv 0$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 \equiv 0$$

Подставим функцию $y = y_1(x) + y_2(x)$ в уравнение (2):

$$y' = y_1'(x) + y_2'(x)$$

$$y'' = y_1''(x) + y_2''(x)$$

$$y_1''(x) + y_2''(x) + P(x)\big(y_1'(x) + y_2'(x)\big) + Q(x)(y_1(x) + y_2(x))=0$$

$(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x))+(y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)\, y_2(x))=0$

$$0 = 0$$

Следовательно, функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ является решением ЛОДУ 2-го порядка(2).

<u>Теорема4</u>.Пусть $y_1(x), y_2(x)$ –решения ЛОДУ(2),C_1, C_2- произвольные числа. Тогда функция $y = C_1 \cdot y_1(x)$ +$C_2 \cdot y_2(x)$также является решением

ЛОДУ.

Доказательство.

По теореме 2 функции $C_1 \cdot y_1(x)$ и $C_2 \cdot y_2(x)$ будут решениями ЛОДУ (2). Тогда по теореме3 их сумма также является решением этого уравнения.

Теорема.5 Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ –решения ЛНДУ 2-го порядка (1). Тогда функция $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ является решением ЛОДУ (2).

Доказательство.

Так как каждая из функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$- решение уравнения (1), то справедливы тождества:

$$\varphi_1'' + P(x)\varphi_1' + Q(x)\varphi_1 \equiv f(x)$$

$$\varphi_2'' + P(x)\varphi_2' + Q(x)\varphi_2 \equiv f(x)$$

Подставим функцию $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ в уравнение (2):

$$y' = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)$$

$$y'' = \varphi_1''(x) - \varphi_2''(x)$$

$$\varphi_1''(x) - \varphi_2''(x) + P(x)\left(\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)\right) + Q(x)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))=0$$

$$(\varphi_1''(x) + P(x)\varphi_1'(x) + Q(x)\varphi_1(x)) - (\varphi_2''(x) + P(x)\varphi_2'(x) + Q(x)\,\varphi_2(x))=0$$

$$f(x) - f(x) = 0$$

$$0 = 0$$

Следовательно, функция $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ является решением ЛОДУ (2).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!