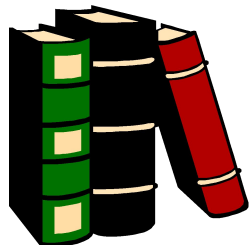




КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



Дифференциальные уравнения

Лекция № 4

**Дифференциальные уравнения 2-го порядка,
допускающие понижение порядка.
Линейные дифференциальные уравнения 2-го
порядка. Свойства их решений.**



Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение 1. Уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1)$$

называется *дифференциальным уравнением 2-го порядка.*

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

Определение 2.

Семейство функций $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ называется общим решением ДУ(1), если выполнены два условия:

1. При любых значениях $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$ функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ является решением ДУ(1).
2. При любых начальных условиях $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$, взятых из области существования и единственности решения, найдутся такие значения $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$, при которых функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ удовлетворяет этим начальным условиям, т. е. $y_0 = \varphi(x_0, C_{10}, C_{20})$.

Задача Коши

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

$$y(x_0) = y_0 ,$$

$$y'(x_0) = y'_0 .$$

Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка (2) состоит в отыскании частного решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

Геометрически это означает найти интегральную кривую, проходящую через данную точку $M(x_0, y_0)$ в заданном направлении $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$

.

Теорема (существования и единственности задачи Коши)

Если в уравнение $y'' = f(x, y, y')$ (2) функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y}$ и $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y, y' $D \in \mathbb{R}^3$, то для всякой точки $(x_0, y_0, y'_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2) удовлетворяющее начальным условиям: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$

Виды дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающие понижение порядка

- **1. Уравнение разрешено относительно старшей производной и имеет вид:**

$$\underline{y'' = f(x)}$$

Интегрируя последовательно два раза обе части уравнения, будем иметь:

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y' = F(x) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad F(x) \text{- первообразная для функции } f(x)$$

$$y = \int (F(x) + C_1)dx + C_2,$$

$$y = \int F(x)dx + C_1 \cdot x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

■ **Пример 1.** Решить уравнение:

$$y'' = x + \sin 2x.$$

Решение.

$$(y')' = x + \sin 2x,$$

$$y' = \int (x + \sin 2x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + C_1,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2$$

Ответ: $y = \frac{x^3}{6} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2$

Пример 2. Решить задачу Коши: $y' = y \ln y$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

Решение:

$$y' = y \ln y \Rightarrow dy = y \ln y dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln y dx \quad u = \ln y; \quad y = e^u \quad dy = e^u du$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln y dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \ln y dx \Rightarrow \int \frac{1}{e^u} e^u du = \int \ln e^u dx$$

$$= \int 1 \cdot e^{-u} du = \int 1 \cdot dx = x + C$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln y - \frac{1}{4} x^2 + C$$

$$y = \frac{1}{2} x^2 \ln y - \frac{1}{4} x^2 + C$$

Найдем значение C , исходя из начального условия: $y(1) = 1$

$$0 = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$y' = \frac{1}{2} x^2 \ln y - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} \right) dx + C_2$$

$$\int \frac{1}{2} x^2 \ln x = \int u = \ln x; \quad \frac{dx}{x} = \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} x^2 \ln x = \int \frac{1}{2} x^2 \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{4} x^2$$

$$= \frac{1}{6} x^3 \ln x - \int \frac{1}{6} x^2 dx = \frac{1}{6} x^3 \ln x - \frac{1}{18} x^3 + C_2$$

$$y = \frac{1}{6} x^3 \ln x - \frac{1}{18} x^3 - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{4} x + C_2,$$

Подставим начальное условие: $y(1) = 1$,

$$1 = \frac{1}{6} \cdot 1^3 \cdot \ln 1 - \frac{5}{36} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + C_2 \quad C_2 = \frac{8}{9}$$

Подставим $C_2 = \frac{8}{9}$ в

$$y = \frac{1}{6} x^3 \ln x - \frac{5}{36} x^3 + \frac{1}{4} x + C_2,$$

получим $y = \frac{1}{6} x^3 \ln x - \frac{5}{36} x^3 + \frac{1}{4} x + \frac{8}{9}$ — решение задачи Коши.

Ответ: $y = \frac{1}{6} x^3 \ln x - \frac{5}{36} x^3 + \frac{1}{4} x + \frac{8}{9}$.

2. Уравнение не содержит явно искомую функцию y

$$F(x, y', y'') = 0 \quad (3)$$

Выполним замену:

$$y' = z(x), \quad y'' = z'(x).$$

Тогда для функции $z = z(x)$ получим ДУ 1 – го порядка

$$F(x, z, z') = 0. \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4), найдем его общий интеграл:

$$\varphi(x, z, C_1) = 0. \quad (5)$$

Подставив в (5) $z = y'$, получим для функции $y = y(x)$ дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\varphi(x, y', C_1) = 0. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), найдем общий интеграл исходного ДУ(3):

$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Найти общее решение уравнения: $y'' + y' = \xi \bar{y}$

Решение.

Делаем замену:

$$y = z(\xi) \text{ и } y' = z'(\xi).$$

$z'' + z' = \xi z$ или $z' + \frac{1}{\xi} z = z^{-\frac{1}{2}}$, являющееся линейным уравнением.

Решим это уравнение методом Бернулли.

$$z = u^2, \quad z' = 2u' u + 2u z'$$

$$2u' u + 2u z' + \frac{2u z'}{\xi} = \frac{1}{\xi u}$$

$$u' u + u z' + \frac{u z'}{\xi} = \frac{1}{2\xi u};$$

$$u' + \frac{u}{x} = 0$$

$$u' + \frac{u}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$1 \cdot u' + \frac{u}{x} = 0,$$

$$\frac{u}{x} + \frac{u}{x} = 0,$$

$$u \frac{1}{x} = -u \frac{1}{x},$$

$$\ln|u| + \ln|x| = C, \quad C \text{ const}$$

При $x = 0$: $\ln|x| = -\ln|x|,$

$$u = \frac{1}{x},$$

$$u' \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi^2}$$

$$u' = \xi^{-2},$$

$$u = \int \xi^{-2} d\xi + C_1,$$

$$u = -\frac{1}{\xi} + C_1,$$

$$u = \left(-\frac{1}{\xi} + C_1\right) \frac{1}{x},$$

$$u = -\frac{1}{x\xi} + \frac{C_1}{x},$$

Обратная замена $u = y'$:

$$y' = -\frac{1}{x\xi} + \frac{C_1}{x},$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{x\xi} + \frac{C_1}{x}\right) dx + C_2$$

$$y = -\frac{4}{9} \xi^{-2} + C_1 \ln|\xi| + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Пример 4. Решить задачу Коши:

$$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2}, \quad y(1) = \frac{1}{2}; \quad y'(1) = 1$$

Решение.

Выполним в уравнение замену:

$$y = vx, \quad y' = v'(x) + v$$

$$v' = \frac{v}{x} + \frac{v}{x^2} - \text{однородное д.у. 1-го порядка}$$

$$\text{Замена: } \frac{v}{x} = w, \quad v = wx, \quad v' = w'x + w$$

$$w'x + w + w = w + wx^2,$$

$$w'x + w = wx^2,$$

$$w'x = wx^2 - w,$$

$$\frac{w'}{w} = \frac{wx^2 - w}{x},$$

$$x \frac{w'}{w} = \frac{wx^2 - w}{1},$$

$$x \frac{w'}{w} = \frac{w}{x} + w,$$

$$\frac{w'}{w} = \frac{1}{x} + w,$$

$$\frac{w'}{w} - w = \frac{1}{x},$$

Найдем u_1 , исходя из начального условия $u(0,1) = 1$

$$u_{xx} = u_1 \quad u_1 = 0.$$

Тогда

$$u_{xx} = 0,$$

$$u_x = 1 \quad u = u_1$$

$$u = u_1$$

$$u = \frac{1}{2} x^2 + u_2,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + u_2,$$

Найдем u_2 , исходя из начального условия $u(0,1) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + u_2 \quad u_2 = 0,$$

$$u = \frac{x^2}{2} - \text{частное решение.}$$

Ответ: $u = \frac{x^2}{2}$

3. Уравнение не содержит явно независимую переменную x

$$F(y, y', y'') = 0 \quad (7)$$

Выполним замену:

$$y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Тогда для функции $p = p(y)$ получим ДУ 1-го порядка:

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0. \quad (8)$$

Интегрируя это уравнение, найдем его общий интеграл:

$$\varphi(y, p, C_1) = 0. \quad (9)$$

Подставляя y' вместо p , получим ДУ 1-го порядка относительно искомой функции $y = y(x)$:

$$\varphi(y, y', C_1) = 0. \quad (10)$$

Решая ДУ (10), получим общий интеграл исходного ДУ(7):

$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 5. Решить уравнение: $y' + xy^2 = 2x^{-3}$

Решение.

Выполним в уравнение замену:

$$y = \frac{1}{u}, \quad y' = \frac{y'}{u^2} = -\frac{u'}{u^2}$$

$$-\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u^3} = 2x^{-3}$$

$$u' + u = \frac{2x^{-3}}{u} \quad \text{— уравнение Бернулли.}$$

Замена: $u = \frac{1}{y}$, $u' = -\frac{y'}{y^2} + \frac{y''}{y^3}$

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{y''}{y^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{2x^{-3}}{1/y},$$

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{y''}{y^3} + \frac{1}{y^3} = 2x^{-3}y,$$

$$1. \quad y' + y = 0,$$

$$2. \quad y'' + y = \frac{2x^{-3}}{y},$$

$$1. \quad \frac{y''}{y} = -\frac{y'}{y}$$

$$y \frac{y''}{y} = -y \frac{y'}{y}$$

$$y'' = -y'$$

$$y = C_1 e^{-x},$$

$$2. \int \frac{2x^{-1}}{x^2 - 1} dx = \frac{2x^{-1}}{x^2 - 1},$$

$$\int \frac{2x^{-1}}{x^2 - 1} dx = \int \frac{2x^{-1}}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2x^{-1}}{2} = 2x^{-1} + 2x^{-1},$$

$$2x^{-1} = 4x^{-1} + 4x^{-1},$$

$$2x^{-1} = \pm 2x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x},$$

$$2x^{-1} = \pm \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\pm 2x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}}{1},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\pm 2x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}}{1},$$

$$\frac{\pm 2x \frac{1}{x^2 - 1}}{2x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{x},$$

$$\pm \frac{2x \frac{1}{x^2 - 1}}{2x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{x},$$

$$\pm \frac{2x \frac{1}{x^2 - 1}}{2x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{2x \frac{1}{x^2 - 1}}{2x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \text{общий интеграл д.у.},$$

$$\text{Ответ: } \frac{2x \frac{1}{x^2 - 1}}{2x \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

■ Пример 6. Решить задачу Коши:

$$y \cdot y'' + (y')^3 - (y')^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$$

Решение.

Выполним замену:

$$y' = p(y), \quad y'' = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2 - p^3, \quad (*)$$

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2(1 - p),$$

Разделим на $p^2(1 - p)y \neq 0$

$$\frac{dp}{p(1 - p)} = \frac{dy}{y},$$

$p = 0$; $p = 1$ – решения уравнения (*),

Но, исходя из начальных условий, не имеют отношения к искомому решению задачи Коши.

$$\int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \frac{dy}{y},$$

$$\int \frac{(1-p) + p}{p(1-p)} dp = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

$$\int \frac{dp}{p} - \int \frac{dp}{p-1} = \ln|C_1 y|,$$

$$\ln|p| - \ln|p-1| = \ln|C_1 y|,$$
$$\frac{p}{p-1} = C_1 y,$$

Исходя из начальных, имеем: $p = -1, y = 1$ при $x = 1$, следовательно

$$\frac{-1}{-1-1} = C_1 \cdot 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{p}{p-1} = \frac{1}{2} y,$$

$$2p = py - y,$$

$$p = \frac{y}{y-2},$$

$$y' = \frac{y}{y-2} ,$$

$$\frac{y-2}{y} dy = dx ,$$

$$\int \left(1 - \frac{2}{y} \right) dy = \int dx ,$$

$$y - 2\ln|y| = x + C_2 .$$

Из начальных условий находим:

$$1 - 2\ln 1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 .$$

Следовательно,

$$y - \ln y^2 = x - \text{искомое решение задачи Коши.}$$

Ответ: $y - \ln y^2 = x$

Пример 7. Решить уравнение: $yy'' + (y')^2 = 2x + 1$

Решение.

Можно заметить, что левая часть уравнения представляет собой производную от yy'

$$(yy')' = 2x + 1,$$

Выполним замену: $z = yy'$

$$z' = 2x + 1,$$

$$z = \int (2x + 1)dx + C_1,$$

$$z = x^2 + x + C_1,$$

$$yy' = x^2 + x + C_1,$$

$$ydy = (x^2 + x + C_1)dx,$$

$$\int ydy = \int (x^2 + x + C_1)dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

Ответ: $3y^2 = 2x^3 + 3x^2 + c_1x + c_2$

Порядок уравнения понижается, если дифференциальное уравнение удастся преобразовать к такому виду, что обе части уравнения становятся полными производными по x от каких-нибудь функций.

Пример 8. Решить уравнение: $yy'' = y'(y' + 1)$.

Решение.

Деля обе части уравнения на $y \cdot (y' + 1) \neq 0$, получаем

$$\frac{y''}{y' + 1} = \frac{y'}{y}$$

$$(\ln(y' + 1))' = (\ln y)',$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\ln(y' + 1) = \ln y + \ln|C_1|,$$

$$y' + 1 = C_1 y,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y - 1,$$

$$\int \frac{dy}{C_1 y - 1} = \int dx$$

$$\frac{1}{C_1} \ln|C_1 y - 1| = x + \overline{C_2}, \quad C_1 \overline{C_2} = C_2, \quad y = -x + C$$

Ответ: $\ln|C_1 y - 1| = C_1 x + C_2, y = C, y = -x + C$

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение1. Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) 2-го порядка называется уравнение вида:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (1)$$

где $f(x)$, $p(x)$, $q(x)$ – некоторые данные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) имеет вид:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

и называется линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2-го порядка.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2-го порядка.

Теорема (существования и единственности решения)

Пусть функции $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале (a, b) . Тогда дифференциальные уравнения (1) и (2) при любых начальных значениях $x_0 \in (a, b)$, $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$ имеют единственные решения, удовлетворяющие условиям:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$$

Далее относительно функций $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$ будем предполагать их непрерывность в интервале интегрирования уравнений (1),(2).

Свойства решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Теорема 1. Функция $y \equiv 0$ является решением ЛОДУ 2-го порядка (2).

Доказательство.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad (2)$$
$$0 \equiv 0$$

Подстановка функции $y \equiv 0$ в уравнение (2) обращает его в тождество.

Теорема 2. Пусть $y_1(x)$ – решение ЛОДУ(2), C -произвольное число, то функция $y = C \cdot y_1(x)$ также является решением уравнения (2).

Доказательство.

Так как функция $y_1(x)$ - решение уравнения(2), то справедливо тождество:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 \equiv 0$$

Подставим функцию $y = C \cdot y_1(x)$ в уравнение (2):

$$y' = C \cdot y_1', \quad y'' = C \cdot y_1'',$$

$$C \cdot y_1'' + P(x)C \cdot y_1' + Q(x) C \cdot y_1(x) = 0,$$

$$C(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1(x)) = 0,$$

$$C \cdot 0 = 0$$

$$0 = 0$$

Следовательно функция $y = C \cdot y_1(x)$ является решением уравнения (2).

Теорема 3. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – решения ЛОДУ(2), то их сумма $y = y_1(x) + y_2(x)$ также является решением уравнения (2).

Доказательство.

Так как каждая из функций $y_1(x), y_2(x)$ – решение уравнения (2), то справедливы тождества:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 \equiv 0$$


$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 \equiv 0$$

Подставим функцию $y = y_1(x) + y_2(x)$ в уравнение (2):

$$y' = y_1'(x) + y_2'(x)$$

$$y'' = y_1''(x) + y_2''(x)$$

$$y_1''(x) + y_2''(x) + P(x)(y_1'(x) + y_2'(x)) + Q(x)(y_1(x) + y_2(x)) = 0$$


$$(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x)) + (y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x)) = 0$$
$$0 = 0$$

Следовательно, функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ является решением ЛОДУ 2-го порядка(2).

Теорема 4. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ – решения ЛОДУ(2), C_1, C_2 - произвольные числа. Тогда функция $y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ также является решением ЛОДУ.

Доказательство.

По теореме 2 функции $C_1 \cdot y_1(x)$ и $C_2 \cdot y_2(x)$ будут решениями ЛОДУ (2). Тогда по теореме 3 их сумма также является решением этого уравнения.

Теорема.5 Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ — решения ЛНДУ 2-го порядка (1). Тогда функция $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ является решением ЛОДУ (2).

Доказательство.

Так как каждая из функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - решение уравнения (1), то справедливы тождества:

$$\varphi_1'' + P(x)\varphi_1' + Q(x)\varphi_1 \equiv f(x)$$

$$\varphi_2'' + P(x)\varphi_2' + Q(x)\varphi_2 \equiv f(x)$$

Подставим функцию $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ в уравнение (2):

$$y' = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)$$

$$y'' = \varphi_1''(x) - \varphi_2''(x)$$

$$\varphi_1''(x) - \varphi_2''(x) + P(x)(\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)) + Q(x)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))=0$$

$$(\varphi_1''(x) + P(x)\varphi_1'(x) + Q(x)\varphi_1(x)) - (\varphi_2''(x) + P(x)\varphi_2'(x) + Q(x)\varphi_2(x))=0$$

$$f(x) - f(x) = 0$$

$$0 = 0$$

Следовательно, функция $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ является решением ЛОДУ (2).



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!