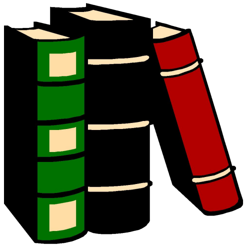
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



Дифференциальные уравнения

Лекция № 4

Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка.
Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Свойства их решений.

Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение1. Уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

называется ***дифференциальным уравнением 2-го порядка.***

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

Определение2.

Семейство функций $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ называется общим решением ДУ(1), если выполнены два условия:

1. При любых значениях $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$ функция
   $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ является решением ДУ(1).

2. При любых начальных условиях $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$, взятых из области существования и единственности решения, найдутся такие значения $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$, при которых функция $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$удовлетворяет этим начальным условиям, т. е.$y_0 = \varphi(x_0, C_{10}, C_{20})$.

Задача Коши

- $$y'' = \mathrm{f}(x, y, y') \qquad (`2)$$
  $$y(x_0) = y_0 \ ,$$
  $$y'(x_0) = y'_0.$$

Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка (2) состоит в отыскании частного решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

Геометрически это означает найти интегральную кривую, проходящую через данную точку $M(x_0, y_0)$ в заданном направлении $\mathrm{t}g\alpha_0 = y'_0$

.

Теорема (существования и единственности задачи Коши)

- Если в уравнение $y'' = \mathrm{f}(x, y, y')$(2) функция $\mathrm{f}(x, y, y')$ и ее частные производные $\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y}$ и $\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}$ непрерывны в некоторой области D изменения переменных x, y, y' $D \epsilon R^3$,то для всякой точки $(x_0, y_0, y_0')\epsilon \mathrm{D}$ существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (2) удовлетворяющее начальным условиям: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$

Виды дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающие понижение порядка

- **1. Уравнение разрешено относительно старшей производной и имеет вид:**

$$\boldsymbol{y'' = f(x)}$$

Интегрируя последовательно два раза обе части уравнения, будем иметь:

$$y' = \int f(x)dx + C_1\,,$$

$$y' = \mathrm{F}(x) + C_1,\ C_1 \epsilon R, \quad \mathrm{F}(x)\text{- первообразная для функции } \mathrm{f}(x)$$

$$y = \int(\mathrm{F}(x) + C_1)dx + C_2,$$

$$y = \int F(x)dx + C_1 \cdot x + C_2\,,\ \ C_{1,}C_2 \epsilon R,$$

Пример1. Решить уравнение:

$$y'' = x + sin2x.$$

Решение.

$$(y')' = x + sin2x,$$

$$y' = \int (x + sin2x)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{cos2x}{2} + C_1 \;,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{cos2x}{2} + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{sin2x}{4} + C_1 x + C_2$$

Ответ: $y = \frac{x^3}{6} - \frac{sin2x}{4} + C_1 x + C_2$

Пример2.

Решить задачу Коши: $y'' = x\ln x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$

Решение:

$$y' = \int x\ln x\,dx + C_1$$

$$\int x\ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x\,dx; & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C,$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_1$$

Найдем значение C_1, исходя из начального условия: $y'(1) = 0$

$$0 = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4} + C_1 \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{4}$$

$$y' = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right)dx + C_2$$

$$\int \frac{1}{2}x^2 \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{1}{2}x^2\,dx; & v = \dfrac{x^3}{6} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 \ln x - \int \frac{1}{6}x^2\,dx = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{1}{18}x^3 + C$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x + C_2,$$

Подставим начальное условие: $y(1) = 1$,

$$1 = \frac{1}{6}\cdot 1^3 \cdot \ln 1 - \frac{5}{36}\cdot 1^2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + C_2 \Rightarrow \quad C_2 = \frac{8}{9}$$

Подставим $C_2 = \frac{8}{9}$ в

$$y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{1}{4}x + C_2,$$

получим $y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{8}{9}$ – решение задачи Коши.

Ответ: $y = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{8}{9}$.

2.Уравнение не содержит явно искомую функцию y

$$F(x, y', y'') = 0 \qquad (3)$$

Выполним замену:

$y' = z(x), \quad y'' = z'(x).$

Тогда для функции $z = z(x)$ получим ДУ 1 – го порядка

$$F(x, z, z') = 0. \qquad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4), найдем его общий интеграл:

$$\varphi(x, z, C_1) = 0\,. \qquad (5)$$

Подставив в (5) $z = y'$, получим для функции $y = y(x)$ дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\varphi(x, y', C_1) = 0\,. \qquad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), найдем общий интеграл исходного ДУ(3):

$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, где C_1, C_2 –произвольные постоянные.

.

Пример3. Найти общее решение уравнения: $\boxtimes\boxtimes\boxtimes'' + \boxtimes' = \xi\overline{\boxtimes}$

<u>Решение.</u>

Делаем замену:

$\boxtimes\boxtimes\boxtimes\boxtimes = y'(\boxtimes)$ и $\boxtimes'\boxtimes\boxtimes\boxtimes = y''(\boxtimes)$.

$\boxtimes\boxtimes\boxtimes' + \boxtimes = \xi\overline{\boxtimes}$ или $\boxtimes' + \frac{1}{\boxtimes}\boxtimes = \boxtimes^{-\frac{1}{2}}$, являющееся линейным уравнением.

Решим это уравнение методом Бернулли.

$\boxtimes = \boxtimes\boxtimes\boxtimes, \quad z' = u'\boxtimes + \boxtimes\boxtimes\boxtimes'$

$$u'\boxtimes + \boxtimes\boxtimes\boxtimes' + \frac{\boxtimes\boxtimes\boxtimes}{\boxtimes} = \frac{1}{\xi\overline{\boxtimes}},$$

$$u'\boxtimes + \boxtimes\boxtimes\boxtimes\boxtimes' + \frac{\boxtimes}{\boxtimes}\boxtimes = \frac{1}{\xi\overline{\boxtimes}};$$

$$\square' + \frac{\square}{\square} = 0$$

$\square$

$$u'\,\square = \frac{1}{\xi\,\overline{\square}}$$

$$\square 1 \square\ \square' + \frac{\square}{\square} = 0,$$

$$\frac{\square\square\square}{\square} + \frac{\square\square\square}{\square} = 0,$$

$$\square \frac{\square\square\square}{\square} = -\ \square \frac{\square\square\square}{\square},$$

$$\ln|\square| + \ln|\square| = \square, \qquad \square\square\ \square$$

При $\square = 0$: $\ln|\square| = -\ln|\square|$,

$$\square = \frac{1}{\square},$$

$$u' \cdot \frac{1}{\boxtimes} = \frac{1}{\sqrt{\boxtimes}},$$

$$u' = \sqrt{\boxtimes},$$

$$\boxtimes = \boxtimes \sqrt{\boxtimes}\boxtimes\boxtimes\boxtimes + C_1,$$

$$\boxtimes = \frac{2}{3}\boxtimes\sqrt{\boxtimes} + C_1,$$

$$\boxtimes = \left(\frac{2}{3}\boxtimes\sqrt{\boxtimes} + C_1\right)\frac{1}{\boxtimes},$$

$$\boxtimes = \frac{2}{3}\sqrt{\boxtimes} + \frac{C_1}{\boxtimes},$$

Обратная замена $\boxtimes = y'$:

$$y' = \frac{2}{3}\sqrt{\boxtimes} + \frac{C_1}{\boxtimes},$$

$$\boxtimes = \boxtimes \; \boxtimes\frac{2}{3}\sqrt{\boxtimes} + \frac{C_1}{\boxtimes}\boxtimes \; \boxtimes\boxtimes\boxtimes + C_2$$

$$\boxtimes = \frac{4}{9}\boxtimes\sqrt{\boxtimes} + C_1 \ln|\boxtimes| + C_2, \qquad C_1 C_2 \boxtimes \; \boxtimes$$

Пример4. Решить задачу Коши:

$$[illegible]'' = \frac{[illegible]'}{[illegible]}[illegible]1 + [illegible]\frac{[illegible]'}{[illegible]}[illegible], \quad [illegible]1[illegible] = \frac{1}{2}; [illegible]'[illegible]1[illegible] = 1$$

Решение.

Выполним в уравнение замену:

$$[illegible]' = [illegible], [illegible]'' = [illegible]([illegible])$$

$$[illegible]' = \frac{[illegible]}{[illegible]}[illegible]1 + [illegible]\frac{[illegible]}{[illegible]}[illegible] -$$ однородное д.у. 1-го порядка

Замена: $\frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible], [illegible] = [illegible], [illegible]' = [illegible]'[illegible] + [illegible]$

$[illegible]'[illegible] + [illegible] = [illegible] + [illegible],$

$[illegible]'[illegible] = [illegible],$

$[illegible] = [illegible],$

$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]},$

$[illegible]\frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible]\frac{[illegible]}{[illegible]},$

$[illegible] = [illegible] + [illegible]_1,$

$[illegible] = [illegible]_1 [illegible],$

$[illegible]\frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible]_1 [illegible],$

Найдем $□_1$, исходя из начального условия $□'□1□ = 1$

$$□□□1 = □_1 □1□ \quad □_1 = 0.$$

Тогда

$$□□□\frac{□}{□} = 0,$$

$$\frac{□}{□} = 1 \; □ \quad □ = □,$$

$$□' = □,$$

$$□ = □ \; □□□□□ + □_2,$$

$$□ = \frac{□^2}{2} + □_2,$$

Найдем $□_2$, исходя из начального условия $□□1□ = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + □_2 \; □ \quad □_2 = 0,$$

$□ = \frac{□^2}{2}$ – частное решение.

Ответ: $□ = \frac{□^2}{2}$

3. <u>Уравнение не содержит явно независимую переменную x</u>

$$\boldsymbol{F(y, y', y'') = 0} \qquad (7)$$

Выполним замену:

$$\boldsymbol{y' = p(y), \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}} \,.$$

Тогда для функции $p = p(y)$ получим ДУ 1-го порядка:

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0 \,. \qquad (8)$$

Интегрируя это уравнение, найдем его общий интеграл:

$$\varphi(y, p, C_1) = 0 \,. \qquad (9)$$

Подставляя y' вместо p, получим ДУ 1-го порядка относительно искомой функции $y = y(x)$:

$$\varphi(y, y', C_1) = 0. \qquad (10)$$

Решая ДУ (10), получим общий интеграл исходного ДУ(7):

$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, где C_1, C_2 −произвольные постоянные.

.

Пример5. Решить уравнение: [illegible] $+$ [illegible] $^2 = 2$[illegible]

Решение.

Выполним в уравнение замену:

[illegible] $=$ [illegible], [illegible] $=$ [illegible] $=$ [illegible]

[illegible] $+$ [illegible]$^2 = 2$[illegible]

[illegible] $+$ [illegible] $=$ $\frac{2[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]}$ – уравнение Бернулли.

Замена: [illegible] $=$ [illegible], [illegible] $=$ [illegible] $+$ [illegible]

[illegible] $+$ [illegible] $+$ [illegible] $=$ $\frac{2[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]}$,

[illegible] $+$ [illegible] $+$ [illegible] $=$ $\frac{2[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]}$,

1. [illegible] $+$ [illegible] $= 0$,

2. [illegible] $=$ $\frac{2[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]}$,

1. $\frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]} = -$ [illegible]

[illegible] $\frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]} = -$ [illegible]

[illegible] $= -$ [illegible]

$\boxed{[\text{illegible}] = [\text{illegible}]}$,

$$2.\ \boxtimes'\boxtimes^{-\boxtimes} = \frac{2\boxtimes^{-\boxtimes}}{\boxtimes\boxtimes\boxtimes^{-\boxtimes}},$$

$$\boxtimes\ \boxtimes\boxtimes\boxtimes\boxtimes\boxtimes = \boxtimes\ 2\boxtimes^{\boxtimes}\boxtimes\boxtimes\boxtimes,$$

$$\frac{\boxtimes^2}{2} = 2\boxtimes^{\boxtimes} + 2\boxtimes_1,$$

$$\boxtimes^2 = 4\boxtimes^{\boxtimes} + 4\boxtimes_1,$$

$$\boxtimes = \pm 2\boxtimes\sqrt{\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1},$$

$$\boxtimes = \pm\boxtimes\boxtimes\boxtimes^{-\boxtimes}\boxtimes\sqrt{\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_{\boxtimes}},$$

$$\boxtimes' = \frac{\pm 2\boxtimes\sqrt{\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1}}{\boxtimes^{\boxtimes}},$$

$$\frac{\boxtimes\boxtimes\boxtimes}{\boxtimes\boxtimes\boxtimes} = \frac{\pm 2\boxtimes\sqrt{\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1}}{\boxtimes^{\boxtimes}},$$

$$\frac{\pm\boxtimes^{\boxtimes}\boxtimes\boxtimes\boxtimes}{2\boxtimes\sqrt{\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1}} = \boxtimes\boxtimes\boxtimes,$$

$$\pm\boxtimes\frac{\boxtimes(\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1)}{2\boxtimes\sqrt{\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1}} = \boxtimes\ \boxtimes\boxtimes\boxtimes,$$

$$\pm\boxtimes\sqrt{\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1} = \boxtimes\boxtimes + \boxtimes_2,$$

$\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1 = \boxtimes\boxtimes\boxtimes + \boxtimes_2\boxtimes^2$ – общий интеграл д. у.,

Ответ: $\boxtimes^{\boxtimes} + \boxtimes_1 = \boxtimes\boxtimes\boxtimes + \boxtimes_2\boxtimes^2$

Пример6. Решить задачу Коши:

$$y \cdot y'' + (y')^3 - (y')^2 = 0, \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$$

Решение.

Выполним замену:

$$\boldsymbol{y' = p(y), \qquad y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}},$$

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2 - p^3, \qquad (*)$$

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2(1-p),$$

Разделим на $p^2(1-p)y \neq 0$

$$\frac{dp}{p(1-p)} = \frac{dy}{y},$$

$p = 0; p = 1$ – решения уравнения (*),

Но, исходя из начальных условий, не имеют отношения к искомому решению задачи Коши.

$$\int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \frac{dy}{y} \ ,$$

$$\int \frac{(1-p)+p}{p(1-p)}dp = ln|y| + ln|C_1| \ ,$$

$$\int \frac{dp}{p} - \int \frac{dp}{p-1} = ln|C_1 y|,$$

$$ln|p| - ln|p-1| = ln|C_1 y|,$$

$$\frac{p}{p-1} = C_1 y,$$

Исходя из начальных ,имеем:$p = -1, y = 1$ при $x = 1,$ следовательно

$$\frac{-1}{-1-1} = C_1 1 \Longrightarrow C_1 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{p}{p-1} = \frac{1}{2}y \ ,$$

$$2p = py - y \ ,$$

$$\boxed{p = \frac{y}{y-2}} \ ,$$

- $$y' = \frac{y}{y-2}\ ,$$

$$\frac{y-2}{y}dy = dx\ ,$$

$$\int\left(1-\frac{2}{y}\right)dy = \int dx\ ,$$

$$y - 2ln|y| = x + C_2\,.$$

Из начальных условий находим:

$$1 - 2ln1 = 1 + C_2 \Longrightarrow C_2=0.$$

Следовательно,

$$y - lny^2 = x - \text{искомое решение задачи Коши.}$$

Ответ: $y - lny^2 = x$

Пример7. Решить уравнение: $yy'' + (y')^2 = 2x + 1$

Решение.

Можно заметить, что левая часть уравнения представляет собой производную от yy'

$$(yy')' = 2x + 1,$$

Выполним замену: $z = yy'$

$$z' = 2x + 1\,,$$

$$z = \int (2x + 1)dx + C_1,$$

$$z = x^2 + x + C_1,$$

$$yy' = x^2 + x + C_1,$$

$$ydy = (x^2 + x + C_1)dx,$$

$$\int ydy = \int (x^2 + x + C_1)dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$

Ответ: $3y^2 = 2x^3 + 3\,x^2 + c_1x + c_2$

Порядок уравнения понижается, если дифференциальное уравнение удается преобразовать к такому виду, что обе части уравнения становятся полными производными по x от каких-нибудь функций.

Пример8. Решить уравнение: $yy'' = y'(y' + 1)$.

Решение.

Деля обе части уравнения на $y \cdot (y' + 1) \neq 0$, получаем

$$\frac{y''}{y' + 1} = \frac{y'}{y}$$

$$(ln(y' + 1))' = (lny)',$$

Из последнего соотношения следует, что

$$ln(y' + 1) = lny + ln|C_1|,$$

$$y' + 1 = C_1 y,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y - 1,$$

$$\int \frac{dy}{C_1 y - 1} = \int dx$$

$\frac{1}{C_1} ln|\ C_1 y - 1| = x + \overline{C_2}, \quad C_1 \overline{C_2} = C_2 \ , \quad y = -x + C$

Ответ: $ln|\ C_1 y - 1| = C_1 x + C_2, y = C\ , y = -x + C$

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Определение1. *Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) 2-го порядка* называется уравнение вида:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$, $p(x)$, $q(x)$ – некоторые данные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) имеет вид:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

и называется *линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2-го порядка.*

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2-го порядка.*

Теорема (существования и единственности решения)

Пусть функции $P(x), Q(x), f(x)$ определены и непрерывны

на некотором интервале (a, b). Тогда дифференциальные уравнения (1) и (2) при любых начальных значениях $x_0 \epsilon (a, b)$, $y_0, y_0' \epsilon R$ имеют единственные решения, удовлетворяющие условиям:

$$y(x_0) = y_0 \quad , y'(x_0) = y_0'$$

Далее относительно функций $P(x), Q(x), f(x)$ будем предполагать их непрерывность в интервале интегрирования уравнений (1),(2).

Свойства решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Теорема1. Функция $y \equiv 0$ является решением ЛОДУ 2-го порядка (2).

Доказательство.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \qquad (2)$$

$$0 \equiv 0$$

Подстановка функции $y \equiv 0$ в уравнение (2) обращает его в тождество.

Теорема2. Пусть $y_1(x)$ –решение ЛОДУ(2), C-произвольное число, то функция $y = C \cdot y_1(x)$ также является решением уравнения (2).

Доказательство.

Так как функция $y_1(x)$- решение уравнения(2), то справедливо тождество:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 \equiv 0$$

Подставим функцию $y = C \cdot y_1(x)$ в уравнение (2):

$$y' = C \cdot y_1', \quad y'' = C \cdot y_1'',$$

$$C \cdot y_1'' + P(x)C \cdot y_1' + Q(x)\ C \cdot y_1(x) = 0,$$

$$C(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)\, y_1(x)\,)=0,$$
$$\mathrm{C}\cdot 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Следовательно функция $y = C \cdot y_1(x)$ является решением уравнения (2).

<u>Теорема3</u>. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ –решения ЛОДУ(2), то их сумма $y = y_1(x) + y_2(x)$ также является решением уравнения (2).

Доказательство.

Так как каждая из функций $y_1(x), y_2(x)$- решение уравнения (2), то справедливы тождества:

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 \equiv 0$$
$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 \equiv 0$$

Подставим функцию $y = y_1(x) + y_2(x)$ в уравнение (2):

$$y' = y_1'(x) + y_2'(x)$$
$$y'' = y_1''(x) + y_2''(x)$$

$$y_1''(x) + y_2''(x) + P(x)\big(y_1'(x) + y_2'(x)\big) + Q(x)(y_1(x) + y_2(x))=0$$

$(y_1''(x) + P(x)y_1'(x) + Q(x)y_1(x))$+$(y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)\, y_2(x))$=0

$$0 = 0$$

Следовательно, функция $y = y_1(x) + y_2(x)$ является решением ЛОДУ 2-го порядка(2).

Теорема4.Пусть $y_1(x), y_2(x)$ —решения ЛОДУ(2),C_1, C_2- произвольные числа. Тогда функция $y = C_1 \cdot y_1(x)$ +$C_2 \cdot y_2(x)$также является решением

ЛОДУ.

Доказательство.

По теореме 2 функции $C_1 \cdot y_1(x)$ и $C_2 \cdot y_2(x)$ будут решениями ЛОДУ (2). Тогда по теореме3 их сумма также является решением этого уравнения.

Теорема.5 Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ –решения ЛНДУ 2-го порядка (1). Тогда функция $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ является решением ЛОДУ (2).

Доказательство.

Так как каждая из функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$- решение уравнения (1), то справедливы тождества:

$$\varphi_1'' + P(x)\varphi_1' + Q(x)\varphi_1 \equiv f(x)$$

$$\varphi_2'' + P(x)\varphi_2' + Q(x)\varphi_2 \equiv f(x)$$

Подставим функцию $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ в уравнение (2):

$$y' = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)$$

$$y'' = \varphi_1''(x) - \varphi_2''(x)$$

$$\varphi_1''(x) - \varphi_2''(x) + P(x)\left(\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x)\right) + Q(x)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))=0$$

$$(\varphi_1''(x) + P(x)\varphi_1'(x) + Q(x)\varphi_1(x)) - (\varphi_2''(x) + P(x)\varphi_2'(x) + Q(x)\,\varphi_2(x))=0$$

$$f(x) - f(x) = 0$$

$$0 = 0$$

Следовательно, функция $y = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ является решением ЛОДУ (2).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!