Основы функционального анализа

Глава 3. Линейные операторы

3. Норма линейного ограниченного оператора

Пусть E и F – ЛНП-ва над полем P ($P = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$);

$A: E \to F$ – ЛОО, т.е. $(\exists C \geq 0)(\forall x \in E)\left[\|Ax\|_F \leq C \cdot \|x\|_E \right]$.

Опр. Нормой ЛОО-ра A называется число

$\|A\| = \min \{C\}$, где $\{C\}$ – множество всех таких констант C, при которых $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\| \ \forall x \in E$.

Др. словами, $\|A\|$ – наименьшая из всех констант C, таких, что $\|Ax\| \leq C \cdot \|x\| \ \forall x \in E$.

Замечание. Строго говоря, $\|A\| = \inf \{C\}$. То, что $\|A\| \in \{C\}$, требует доказательства.

Теорема (о вычислении нормы). $\|A\| \overset{(1)}{=} \sup\limits_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \overset{(2)}{=} \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in E}} \|Ax\|$.

Док-во. 1) Док-м, что $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ (1).

Пусть $\alpha = \sup\limits_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Тогда $\alpha \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ $\forall x \neq \theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq \alpha \cdot \|x\|$ $\forall x \in E$ (для $x = \theta$ тоже выполняется) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|A\| \leq \alpha$ (3).

Покажем, что $\|A\| = \alpha$. $\boxed{\Pi}$: $\|A\| < \alpha$. По определению supremum'a, $\exists$ послед-ть $\{x_n\} \subset E$: $\frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Т.к., по предположению, $\|A\| < \alpha$, то $(\exists N)\left[\|A\| < \frac{\|Ax_N\|}{\|x_N\|} \leq \alpha\right]$, то есть $\|Ax_N\| > \|A\| \cdot \|x_N\|$, что противоречит определению $\|A\|$.

След-но, предположение неверно $\Rightarrow$ $\|A\| = \alpha$. Равенство (1) доказано.

2) Равенство (2) вытекает из (1):

$$\sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y\in E}} \|Ay\| = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\substack{x\neq\theta \\ x\in E}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Теорема доказана.

Задачи

№1. Доказать ограниченность оператора $A: \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}^2_1$ и найти его норму, если A задан матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) $$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y; \quad \|Ax\|_1 = \|y\| = |y_1| + |y_2|;$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

$$\|Ax\|_1 = |y_1| + |y_2| = |x_1 + 3x_2 + 2x_3| +$$

$$+ |-2x_1 + 3x_3| \leq |x_1| + 3|x_2| + 2|x_3| + 2|x_1| + 3|x_3| =$$

$$= 3|x_1| + 3|x_2| + 5|x_3| \leq 5\|x\|_1 \Rightarrow \underline{\|A\| \leq 5 \ (1)}$$

<u>Докажем: $\|A\| = 5$.</u>

Найдем такой $\bar{x} \in R^3_1$, что $\|\bar{x}\|_1 = 1$ и $\|A\bar{x}\|_1 = 5$.

а) $\bar{x} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\|Ae_1\| = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow e_1$ не подходит.

б) $\bar{x} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\|Ae_2\| = 3 \Rightarrow e_2$ не подходит.

в) $\bar{x} = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\|Ae_3\| = 5 \Rightarrow$ $\underline{e_3 \text{ – подходит!}}$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ae_3\| = 5 \Rightarrow \underline{\|A\| \geq 5 \ (2)}$$

$$(1), (2) \Longrightarrow \underline{\|A\| = 5.}$$

2) Самостоятельно. Ответ: $\underline{\|A\| = 5.}$

№2. Доказать ограниченность оператора $A: \mathbb{R}^2_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ и найти его норму, если A задан матрицей:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. 1) $\|Ax\|_1 \leq 6|x_1| + 5|x_2| \leq 6\|x\|_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\|A\| \leq 6 \ (1)}$.

Пусть $\bar{x} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\|Ae_1\| = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| \geq \|Ae_1\| = 6 \Rightarrow \underline{\|A\| \geq 6 \ (2)}$

$(1), (2) \Rightarrow \underline{\|A\| = 6.}$

2) Самост-но. **Ответ:** $\underline{\|A\| = 8}$.

№3. Док-ть ограниченность и найти норму оп-ра $A : \mathbb{R}^3_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$, если A задан матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответы: а) $\|A\| = 7$; б) $\|A\| = 9$.

8. Линейные ограниченные функционалы

Пусть E — вещественное ЛНП.

__Опр. 1__. Линейный оператор, действующий из E в $\mathbb{R}^1$, называется <u>линейным функционалом</u>.

Норма в $\mathbb{R}^1$ — модуль вещест. числа: $\|y\|_{\mathbb{R}^1} = |y|$.

__Опр. 2__. Линейный функционал $f: E \to \mathbb{R}^1$ называется <u>ограниченным</u>, если $(\exists C \geq 0)(\forall x \in E)\ [\,|f(x)| \leq C \cdot \|x\|_E\,]$.

Все остальные определения и теоремы, сформулир-е и доказанные для линейных операторов, переносятся и на случай линейных функционалов.

<u>Норма</u> линейного огранич. ф-ла (ЛОФ) f:

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \neq \theta \\ x \in E}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ y \in E}} |f(y)|.$$

<u>Пример.</u> $E = C[0,1]$; $f(x) = x(0)$.

Нетрудно доказать выполнение свойств аддитивности и однородности: $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in E$,

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^1, \forall x \in E.$$

Покажем ограниченность ЛФ f и найдем $\|f\|$:

$|f(x)| = |x(0)| \le \max\limits_{0\le t\le 1} |x(t)| = \|x\|_E \Rightarrow f$ - огранич. и $\underline{\|f\| \le 1 \ (1)}$.

Рассм-м функцию $\bar{x}(t) \equiv 1$; $\|\bar{x}\|_E = 1$,

$f(\bar{x}) = \bar{x}(0) = 1$.

Тогда $\|f\| = \sup\limits_{\|y\|=1} |f(y)| \ge |f(\bar{x})| = 1$, т.е. $\underline{\|f\| \ge 1 \ (2)}$

$(1), (2) \Rightarrow \underline{\|f\| = 1}$.

9. Пространство линейных ограниченных операторов

1. Операции на множестве $L(E,F)$.

Пусть E и F – линейные нормир-е простр-ва над полем P. ($P=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)
Обозначим символом $L(E,F)$ множество всех линейных огранич-х операторов, действующих из E в F.
Введем на множестве $L(E,F)$ операции сложения и умножения на числа из поля P.

1) Операция сложения. Суммой операторов A и B из $L(E,F)$ называется оператор $C \overset{\text{обозн.}}{=} A+B$, который каждому элементу $x\in E$ ставит в соответствие элемент $(Ax+Bx)\in F$, т.е. $(A+B)x = Ax+Bx \;\; \forall x\in E$.

Покажем линейность $A+B$.

Аддитивность: $(A+B)(x+y) \overset{\text{опр.}}{=} \underset{\text{ЛО}}{A(x+y)} + \underset{\text{ЛО}}{B(x+y)} =$

$= (\underset{\in F}{Ax} + \underset{\in F}{Ay}) + (\underset{\in F}{Bx} + \underset{\in F}{By}) \;=\;$ в силу ассоциативности и коммутативности сложения в ЛНП F

$= (Ax+Bx)+(Ay+By) \overset{\text{опр.}}{=} (A+B)x + (A+B)y.$

Однородность: $(A+B)(\lambda x) \overset{\text{опр.}}{=} \underset{\text{ЛО}}{A(\lambda x)} + \underset{\text{ЛО}}{B(\lambda x)} = \lambda(Ax) + \lambda(Bx) \ominus$

в силу дистрибутивности умножения на число в пр-ве F $\ominus\ \lambda(Ax+Bx) \overset{\text{опр.}}{=} \lambda(A+B)x$

Покажем ограниченность $A+B$.

$$\|(A+B)x\|_F = \|Ax+Bx\|_F \underset{\substack{\text{3-я}\\ \text{аксиома нормы в } F}}{\leq} \|Ax\|_F + \|Bx\|_F \leq \|A\|\cdot\|x\|_E + \|B\|\cdot\|x\|_E =$$

$(\forall x \in E)$

$$= (\|A\| + \|B\|)\|x\|_E.$$

Из последнего неравенства, в частности, следует, что

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (*)$$

Т.о., оператор $A+B$ — линейный ограниченный, т.е. принадлежит $\mathcal{L}(E,F)$.

2) Операция умножения на число. Произведением оператора A на число $\lambda \in P$ называется оператор $C \overset{\text{обозн.}}{=} \lambda A$, который

$(A \in \mathcal{L}(E,F))$

2) Операция умножения на число. Произведением оператора A на число $\lambda \in P$ называется оператор $C \overset{\text{обозн.}}{=} \lambda A$, который $(A \in L(E,F))$

каждый элемент $x \in E$ переводит в элемент $\lambda(Ax) \in F$, т.е. $(\lambda A)x = \lambda(Ax)\ \forall x \in E.$

Упр. Докажите линейность оператора λA.

Ограниченность: $\forall x \in E\ \ \|(\lambda A)x\|_F = \|\lambda \cdot (Ax)\|_F = |\lambda| \cdot \|Ax\|_F \leq$

$\leq |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_E \Rightarrow \|\lambda A\| \leq |\lambda| \cdot \|A\|.$

Итак, $\forall \lambda \in P$ оператор $\lambda A \in L(E,F)$.

2. Проверка аксиом линейного простр-ва.

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ $\forall A, B, C \in \mathcal{L}(E,F)$ (ассоциативность сложения)

$\forall x \in E$ $[(A+B)+C]x \overset{\text{по опр.}}{=} (A+B)x + Cx = (Ax+Bx)+Cx \;=$

в силу ассоциативности сложения в F $=\; Ax + (Bx+Cx) = Ax + (B+C)x =$

$= [A+(B+C)]x.$

2) $A+B = B+A$ $\forall A, B \in \mathcal{L}(E,F)$ (коммутативность сложения)

$\forall x \in E$ $(A+B)x = \underset{\text{(коммутативность в } F)}{Ax+Bx = Bx+Ax} = (B+A)x.$

3) Нулевым элементом в $\mathcal{L}(E,F)$ явл-ся оператор Θ, переводящий все элементы пр-ва E в элемент Θ_F (нулевой элемент F):

$\Theta x = \Theta_F$ $\forall x \in E.$

Тогда $\forall A \in \mathcal{L}(E,F)$, $\forall x \in E$: $(A+\Theta)x = Ax + \Theta x = Ax + \Theta_F = Ax$,

т.е. $A+\Theta = A$.

3) Нулевым элементом в $\mathcal{L}(E,F)$ яв-ся оператор Θ, переводящий все элементы пр-ва E в элемент θ_F (нулевой элемент F):

$\Theta x = \theta_F \quad \forall x \in E.$

Тогда $\forall A \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall x \in E$: $(A+\Theta)x = Ax + \Theta x = Ax + \theta_F = Ax$,

т.е. $\underline{A + \Theta = A}$.

4) Противоположный оператору $A \in \mathcal{L}(E,F)$ — оператор

$\underline{-A = (-1)\cdot A}$: $\big((-A)+A\big)x = (-A)x + Ax = (-1)(Ax) + Ax =$

$= -Ax + Ax = \theta_F \quad (\forall x \in E) \Rightarrow \underline{(-A) + A = \Theta}.$

5) $1 \cdot A = A \quad \forall A \in \mathcal{L}(E,F)$.

6) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \forall A \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall \lambda, \mu \in P$.

7) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ — " — .

8) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall A, B \in \mathcal{L}(E,F),\ \forall \lambda \in P$.

Доказать самостоят-но!

Итак, $\mathcal{L}(E,F)$ — линейное простр-во над полем P.

3. Проверка аксиом нормы.

1) $\|A\| \geq 0$ – очевидно.

$\underline{\|A\| = 0 \overset{?}{\longleftrightarrow} A = \theta}$. Пусть $\|A\| = \sup\limits_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$, тогда

$\forall x \in E \setminus \{\theta\}$ $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow \forall x \in E$ $\|Ax\| = 0 \Rightarrow \forall x \in E$ $Ax = \theta_F \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \theta$ – нулевой оператор. Обратное очевидно.

2) $\|\lambda A\| = \sup\limits_{x \neq \theta} \frac{\|\lambda(Ax)\|}{\|x\|} = |\lambda| \cdot \sup\limits_{x \neq \theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \cdot \|A\|$.

3) См. неравенство (*) в п. 1.

Т.о., $\underline{\mathcal{L}(E, F) - \text{ЛНП}}$.

4. Полнота пр-ва $\mathcal{L}(E, F)$.

<u>Теорема</u>. Если ЛНП F является полным (банаховым), то пр-во $\mathcal{L}(E, F)$ также полно.

Задачи

5. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[0,2]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

$$1)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt\ ; \qquad 2)\ f(x) = x(1)\ ;$$

$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - 2x(2)\ ; \qquad 4)\ f(x) = x(0) - 2\int_1^2 x(t)\,dt\ .$$

1) а) <u>Линейность.</u>

Аддитивность: $f(x_1+x_2)=\int_0^1 (x_1+x_2)(t)\,dt=$

$=\int_0^1 (x_1(t)+x_2(t))\,dt=\int_0^1 x_1(t)\,dt+\int_0^1 x_2(t)\,dt=$

$=f(x_1)+f(x_2)\quad (\forall x_1,x_2\in C[0,2]).$

Однородность: $f(\lambda x)=\int_0^1 (\lambda x)(t)\,dt=$

$=\int_0^1 \lambda\cdot x(t)\,dt=\lambda\cdot\int_0^1 x(t)\,dt=\lambda\cdot f(x)$

$(\forall x\in C[0,2],\ \forall\lambda\in\mathbb{R}).$

б) Ограниченность и норма.

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |x(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|x\|\,dt = \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\|f\| \leq 1 \ (1)}$$

Итак, f – ограниченный линейный ф-л.

Найдем $\|f\|$. Пусть $\bar{x}(t) \equiv 1$.

$\|\bar{x}\| = 1$, $f(\bar{x}) = 1$; след-но, $\|f\| =$

$= \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \geq f(\bar{x}) = 1$, т.е. $\underline{\|f\| \geq 1 \ (2)}$

$(1), (2) \Rightarrow \underline{\|f\| = 1}$.

2) а) <u>Линейность</u> — самостоятельно.

б) <u>Ограниченность и норма.</u>

$$|f(x)| = |x(1)| \le \max_{0\le t\le 2} |x(t)| = \|x\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\|f\| \le 1 \ (1)}$$

f — огранич-й лин. ф-л.

<u>Найдем $\|f\|$.</u> $\quad \bar{x}(t) \equiv 1; \ \|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 1.$

След-но, $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \ge f(\bar{x}) = 1$, т.е.

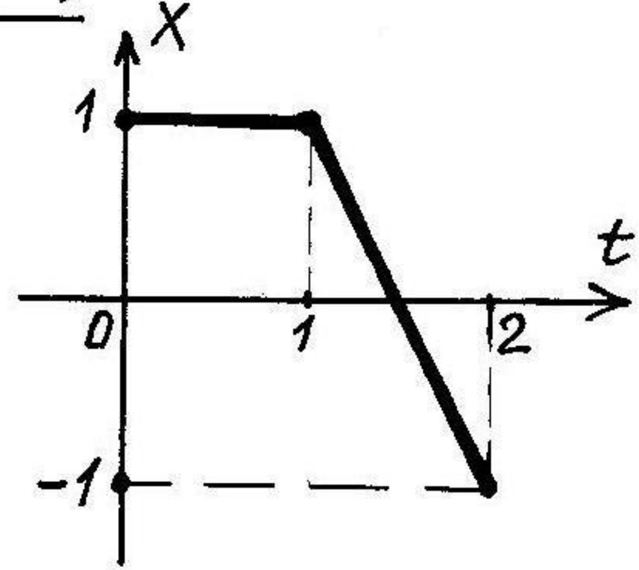
$\underline{\|f\| \ge 1 \ (2)}.$ $\quad (1), (2) \Rightarrow \underline{\|f\| = 1.}$

3) а) Линейность — самостоятельно.

б) Ограниченность и норма.

$$|f(x)| \le \int_0^1 |x(t)|\,dt + 2|x(2)| \le \|x\| + 2\|x\| = 3\|x\|,$$

т.е. $\underline{\|f\| \le 3}$ (1)



Найдем такую функцию $\bar{x} \in C[0,2]$, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 3$.

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1], \\ -2t+3, & t \in (1,2]. \end{cases}$$

Тогда $\|f\| \ge |f(\bar{x})| = 3 \Rightarrow \underline{\|f\| \ge 3\ (2)}$.

$(1), (2) \Rightarrow \underline{\|f\| = 3}$.

4) *самостоятельно !*

6. Докажите, что функционал $f(x)$ на пространстве $C[-1,1]$ является линейным непрерывным, и найдите его норму:

1) $f(x) = -2x(-1) + x(0) - x(1)$; 2) $f(x) = x(-1) + 2x(0) - x(1)$;

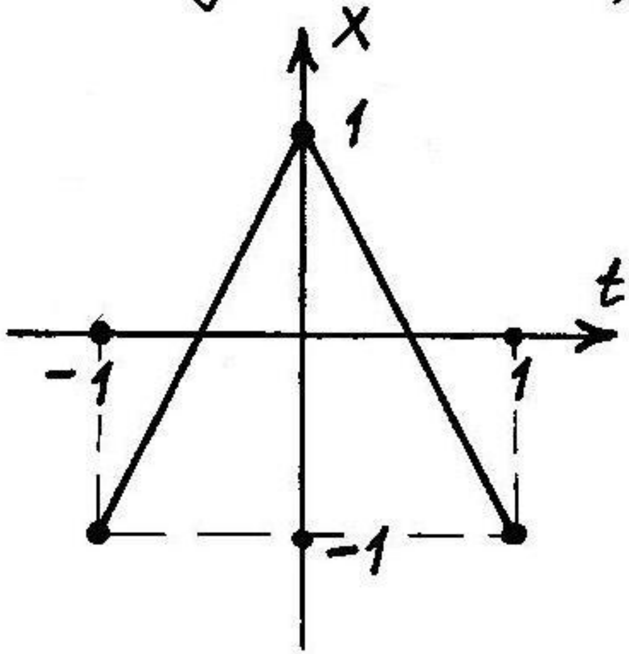
$$3)\ f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - x(-1)\ .$$

1) $|f(x)| \le 2\cdot|x(-1)| + |x(0)| + |x(1)| \le$

$\le 2\cdot\|x\| + \|x\| + \|x\| = 4\|x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f – ограничен и $\underline{\|f\| \le 4 \ (1)}$

Найдем $\bar{x}(t)$, такую, что $\|\bar{x}\| = 1$ и $f(\bar{x}) = 4$.



Аналитически описать самост-но!

$\underline{\|f\| = 4.}$

2) и 3) - самостоятельно !