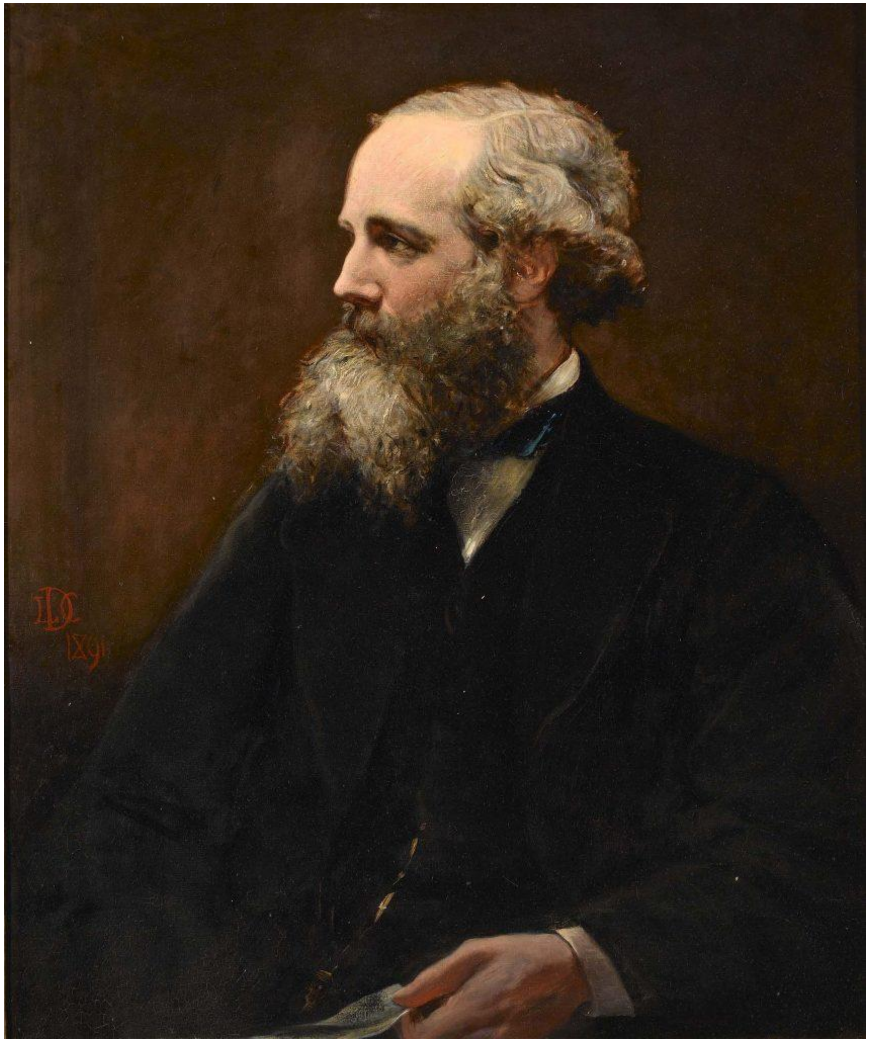
Физико-технические основы электроэнергетики

Лекция 1

Профессор Е.Ю.Клименко



Джеймс Клерк Максвелл
(1831–1879),

Ханс Христиан Эрстед
(1777-1851),

Уравнения Максвелла

$$div\,\mathbf{D} = \rho$$

Первое уравнение: ***электрический заряд порождает электрическое поле***

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Второе уравнение: ***изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле***

$$div\,\mathbf{B} = 0$$

Третье уравнение: ***магнитных зарядов не существует***

$$rot\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

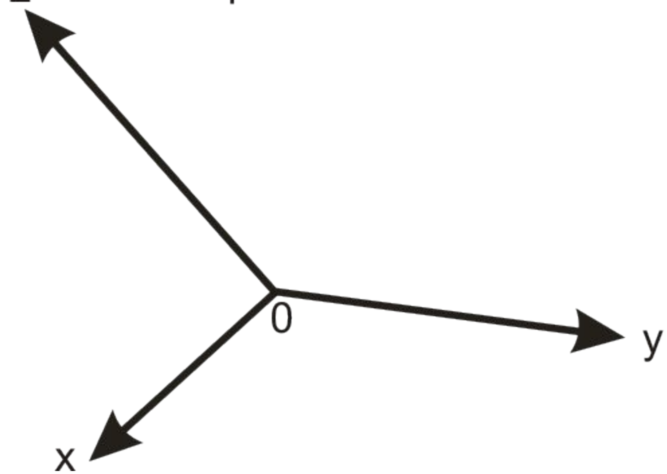
Четвертое уравнение: ***электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле***

Системы координат в трехмерном пространстве

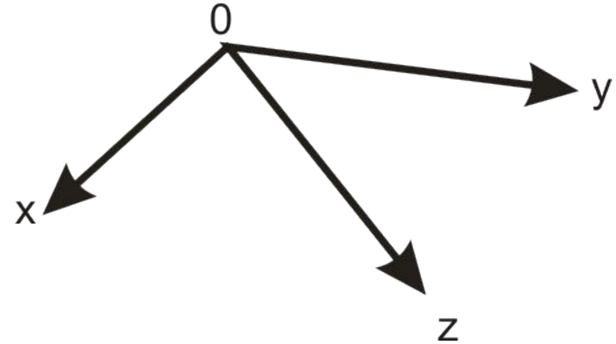
Прямолинейные
- Косоугольные
  - ковариантные
  - контравариантные
  - прямоугольные

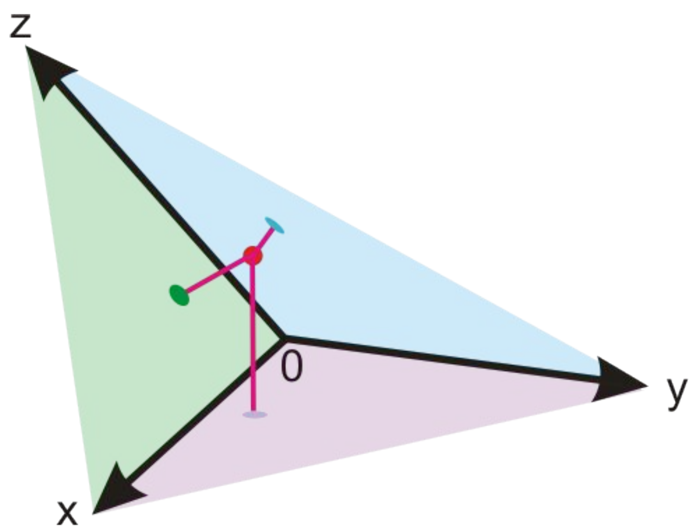
Криволинейные
- Сферические
- Цилиндрические

правая

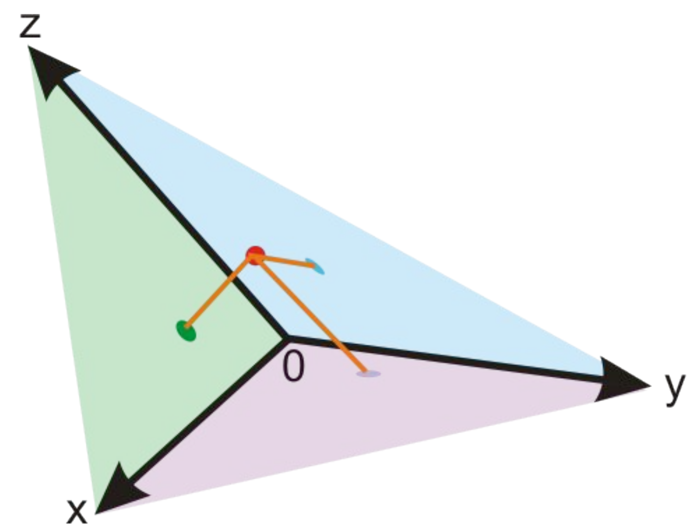


левая





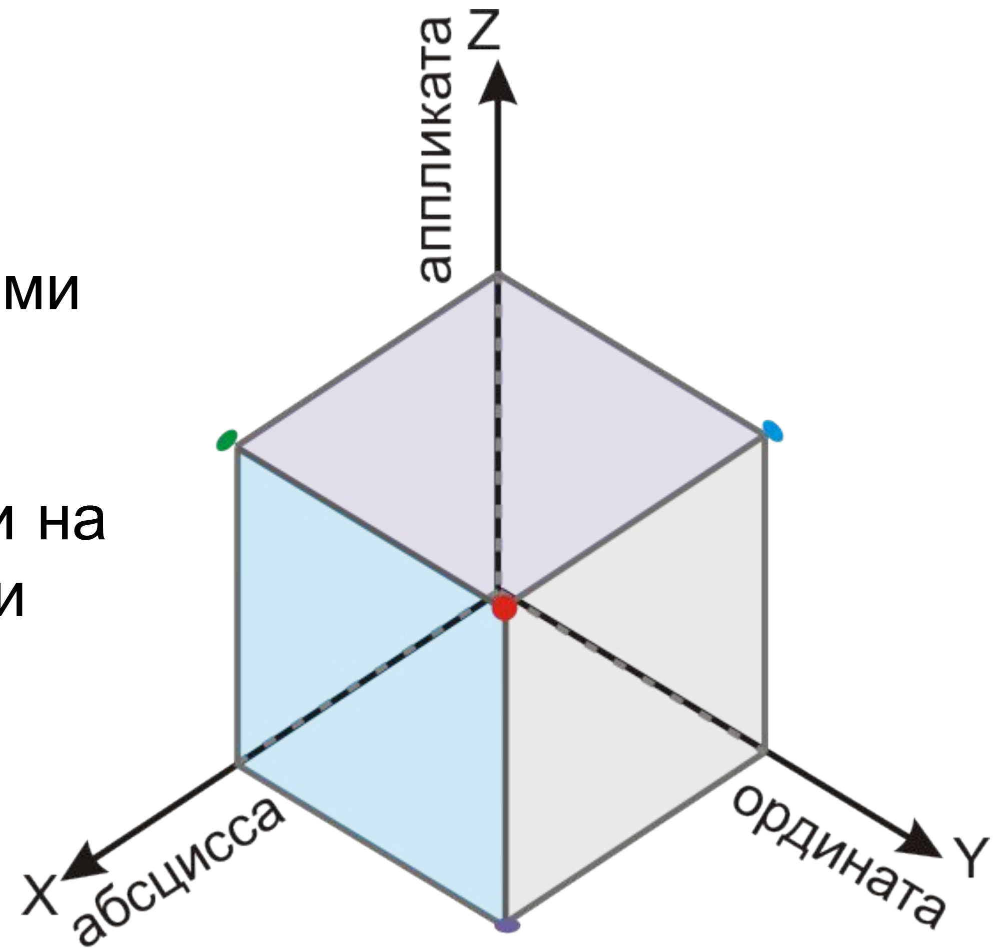
ковариантные координаты



контравариантные координаты

Декартовы координаты

Ковариантные координаты совпадают с контравариантными и совпадают с проекциями точки на координатные оси



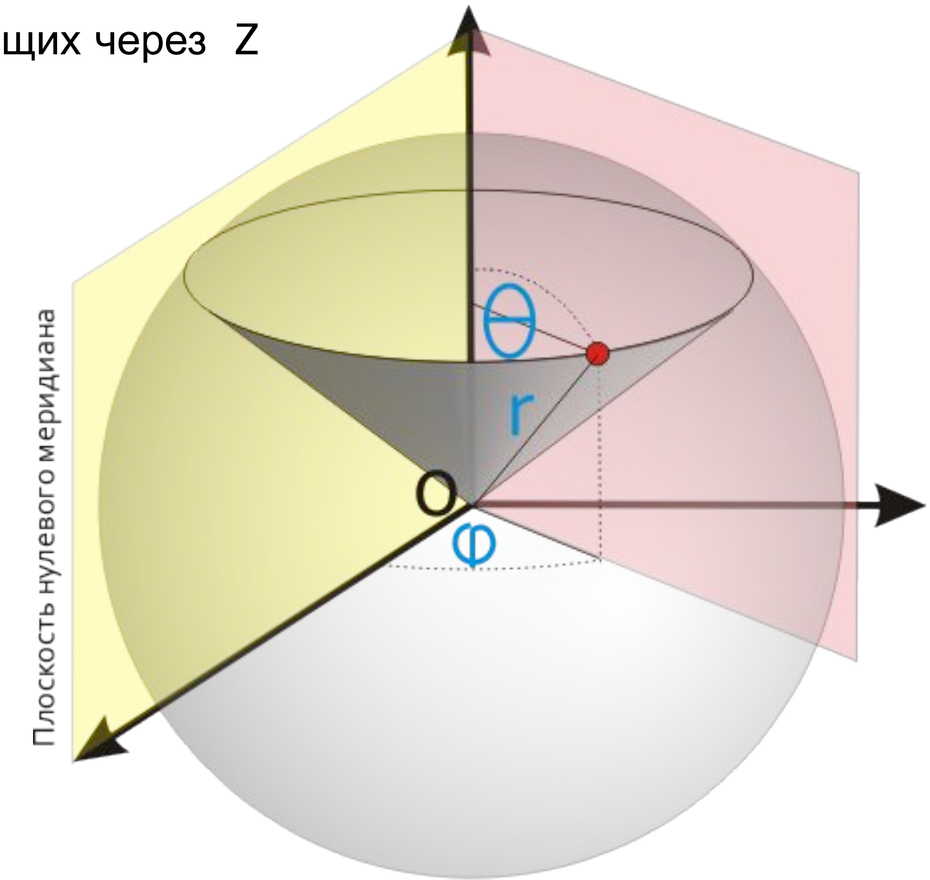
Координаты точки

(x,y,z)

Сферические координаты

Координатные поверхности:

1. Пучок плоскостей, проходящих через Z
2. Конусы с осью Z
3. Сферы с центром O



Координаты точки

(θ, φ, r)

r -радиус

φ -долгота

$0.5\pi - \theta$ = широта

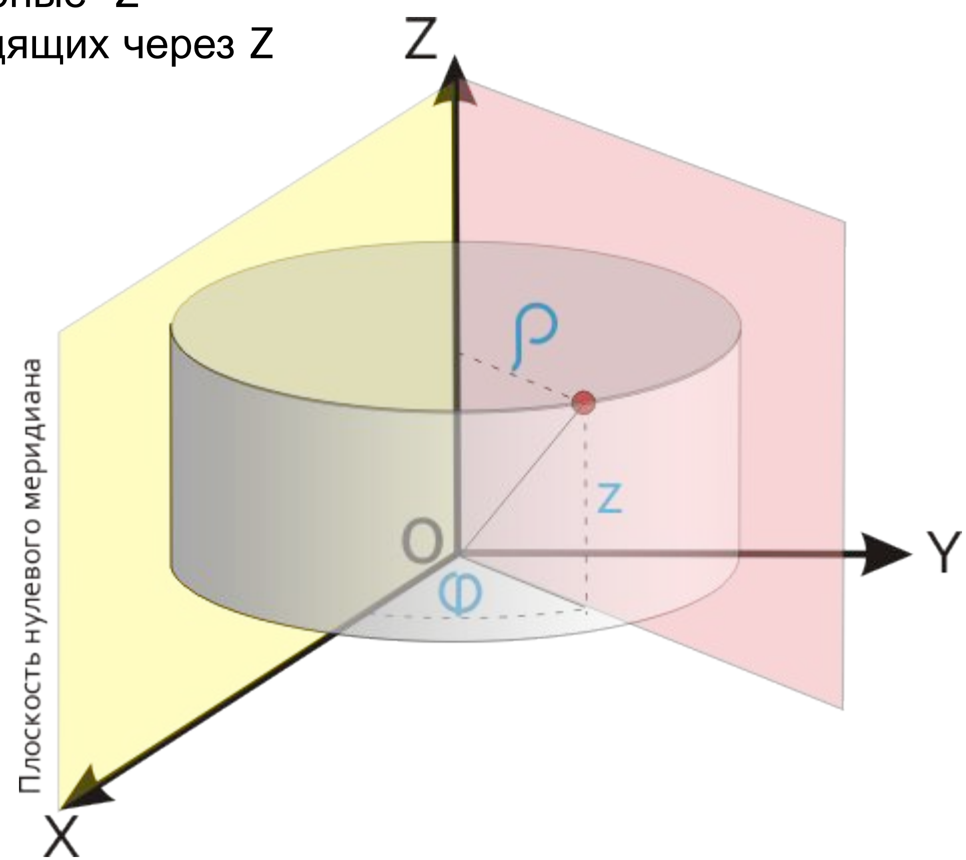
Цилиндрические координаты

Координатные поверхности

1.Плоскости, перпендикулярные Z
2. Пучок плоскостей, проходящих через Z
3. Цилиндры с осью Z

Координаты точки

(ρ, φ, z)



Определения дифференциальных операторов

Градиен т

Вектор, направленный вдоль наибольшего возрастания некоторой величины *U* , значение которой меняется от точки к точке (скалярное поле) и по модулю равный скорости роста этой величины .

в декартовой **(x,y,z)**

$$\boldsymbol{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

в цилиндрической **(ρ, ϕ,z)**

$$\boldsymbol{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_{z}$$

в сферической **(θ,ϕ, r)**

$$\boldsymbol{grad}U = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_{\theta} + \frac{1}{r\,sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial r}\boldsymbol{e}_{r}$$

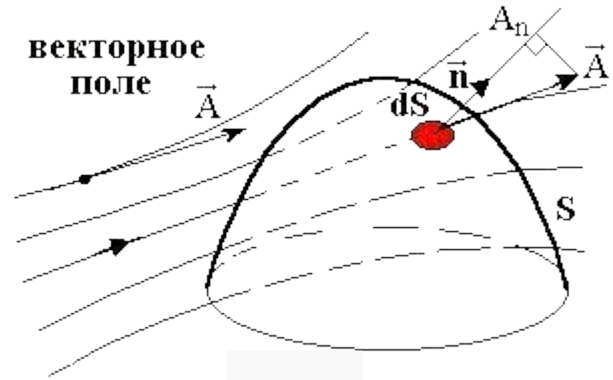
Оператор Гамильтона (набла) $\boldsymbol{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$, формально используется в операциях по правилам векторной алгебры

$$\boldsymbol{grad}\,U = \boldsymbol{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Дивергенция

Поток векторного поля

$$\Phi = \oint_s (\boldsymbol{An})ds$$



Определение дивергенции (скаляр)

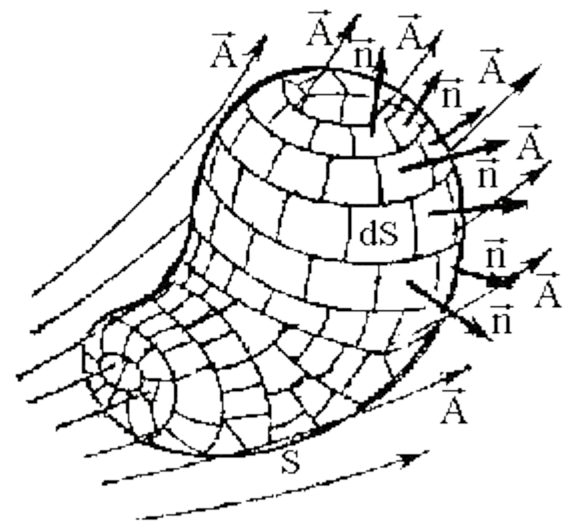
$$div\,\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_s (\boldsymbol{An})ds$$

в декартовой **(x,y,z)**

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_X}{\partial x} + \frac{\partial A_Y}{\partial y} + \frac{\partial A_Z}{\partial z} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$$

в цилиндрической **(ρ, ϕ,z)**

в сферической **(θ,ϕ, r)**



5.2

Если div **A**=0, то в объеме V поле не имеет источников и стоков

http://tsput.ru/res/fizika/1/ELECTROSTATIKA/lection_05.html

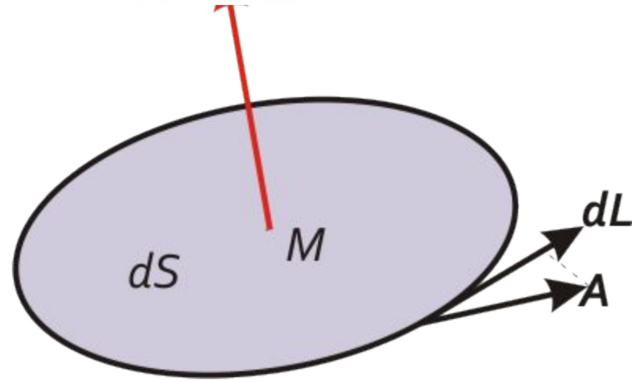
Ротор

$$\boldsymbol{rot\,A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \iint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}) dS$$

$$|\boldsymbol{rotA}| = \lim_{\Delta S} \frac{1}{\Delta S} \oint \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{L}$$

Модуль *rotA* равен циркуляции проекции вектора А на контур малой площадки, перпендикулярной *rotA.*

$$\boldsymbol{rotA} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{A}$$



в декартовой **(x,y,z)**

$$\boldsymbol{rotA} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$\boldsymbol{rotA} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

в цилиндрической **(ρ, φ,z)**

$$= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e_\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e_\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_z)}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e_z} =$$

в сферической **(θ,φ, r)**

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e_\varphi} + \frac{1}{r sin\theta}\left(\frac{\partial(sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e_r}$$

Если в некотором поле всюду **rot A**=0, значит равна нулю и циркуляция вектора **А,** т.е. вихрей нет. Такие поля называют ***потенциальными***

Некоторые свойства дифференциальных операторов

$$div(\boldsymbol{rotA}) = 0$$

$$rot(\boldsymbol{grad}\varphi) = 0$$

$$div(grad\varphi) = \Delta\varphi \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

лапласиан

$$div(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi div\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\varphi \cdot \boldsymbol{A}$$

$$div(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{ArotV} - \boldsymbol{VrotA}$$

$$\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{rotA}) = -\Delta\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}(div\boldsymbol{A})$$

Для примера покажем, как последнее свойство получить с помощью «набла»

$$\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{rotA}) = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla A}) - (\boldsymbol{\nabla\nabla})\boldsymbol{A} = +\boldsymbol{grad}(div\boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A}$$

Интегральные теоремы векторного анализа

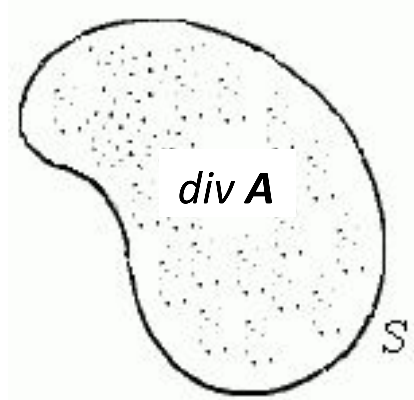
(связывают характеристики поля в объеме и на поверхности тела)

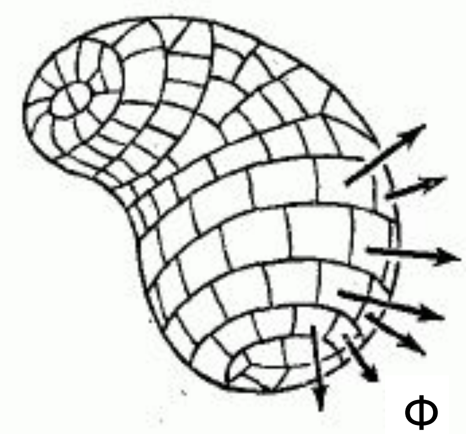
Теорема Остроградского-Гаусса

К.Ф.Гаусс
1777-1855

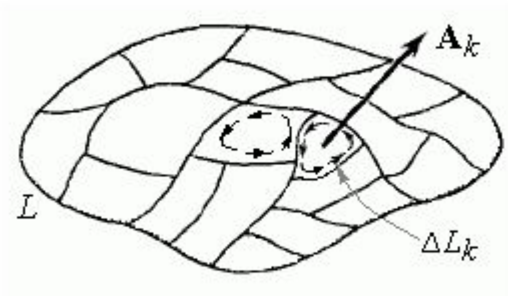
Остроградский М.В.
1801-1861

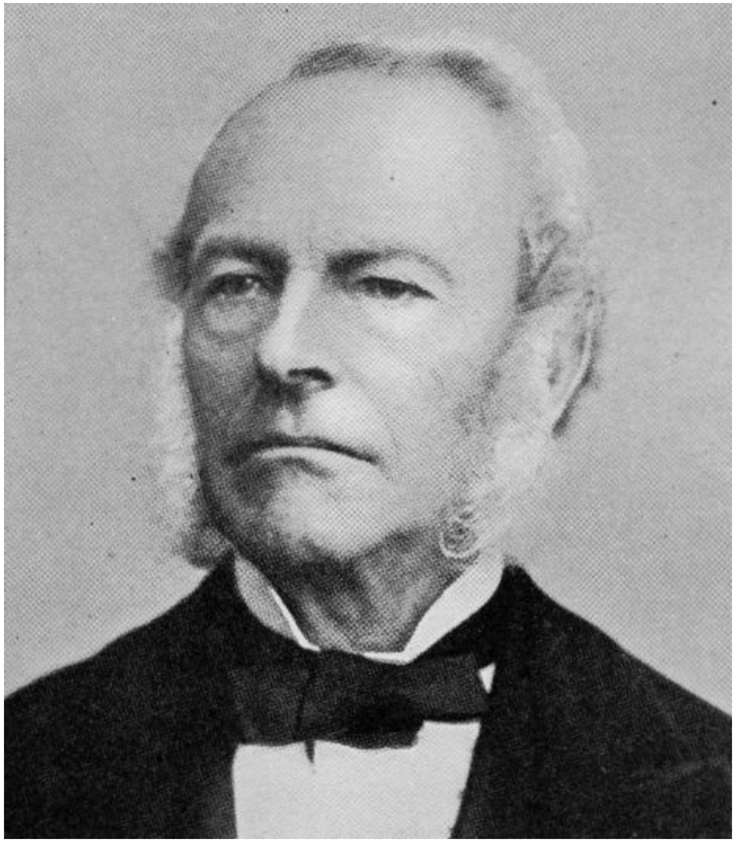
$$\iiint_V div\, \mathbf{A} dV = \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) dS$$





Теорема Стокса





Сэр Джордж Габриэль Стокс
1819-1903

$$\iint_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{rotA}\, dS = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{L}$$

Теорема о градиенте

$$\iiint_V \boldsymbol{grad}\varphi\, dV = \oiint_S \varphi \boldsymbol{n}\, dS$$

Теоремы Грина

Примем $\boldsymbol{A} = \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi$ тогда

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n} = \varphi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

и из теоремы Остроградского-Гаусса

$$\iiint_V (\varphi\Delta\psi + \boldsymbol{\nabla}\varphi\boldsymbol{\nabla}\psi)dV = \iint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}dS$$

Приме $\boldsymbol{A} = \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\varphi$

$$\iiint_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV = \iint_S (\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{n}})dS$$

Если $\varphi = const$, то

$$\iiint_V (\Delta\psi)dV = \iint_S \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}}dS$$

Грин Джордж
14.7.1793 — 31.3.1841

Уравнения Максвелла

$div\,\mathbf{D} = \rho$

Первое уравнение: ***электрический заряд порождает электрическое поле***

$rot\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

Второе уравнение: ***изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле***

$div\,\mathbf{B} = 0$

Третье уравнение: ***магнитных зарядов не существует***

$rot\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

Четвертое уравнение: ***электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле***

Переменных 5, а уравнений 4. Необходимо дополнить систему уравнениями, описывающими материал.

Материальные уравнения

$\boldsymbol{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \boldsymbol{H}$ $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, t)$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *Гн/м* магнетики

$\boldsymbol{D} = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, t)$ диэлектрики

Закон Ома

$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, t, \cdots)$ $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}, t, \cdots \boldsymbol{j}) \cdot \boldsymbol{E}$ металлы

Спасибо за внимание