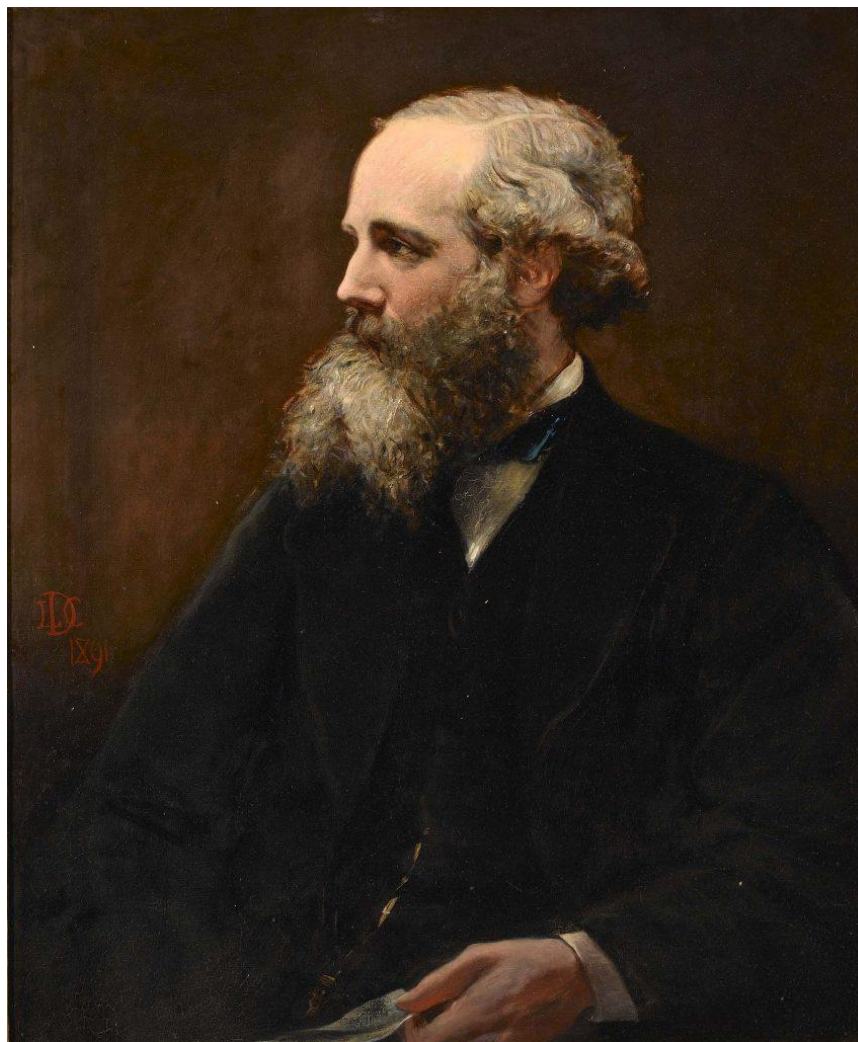




Физико-технические основы электроэнергетики

Лекция 1

Профессор Е.Ю.Клименко



Джеймс Клерк Максвелл
(1831–1879),



Ханс Христиан Эрстед
(1777-1851),

Уравнения Максвелла

$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ *Первое уравнение: электрический заряд порождает электрическое поле*

$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ *Второе уравнение: изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле*

$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ *Третье уравнение: магнитных зарядов не существует*

$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ *Четвертое уравнение: электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле*

Системы координат в трехмерном пространстве

Прямолинейные

Косоугольные

ковариантные

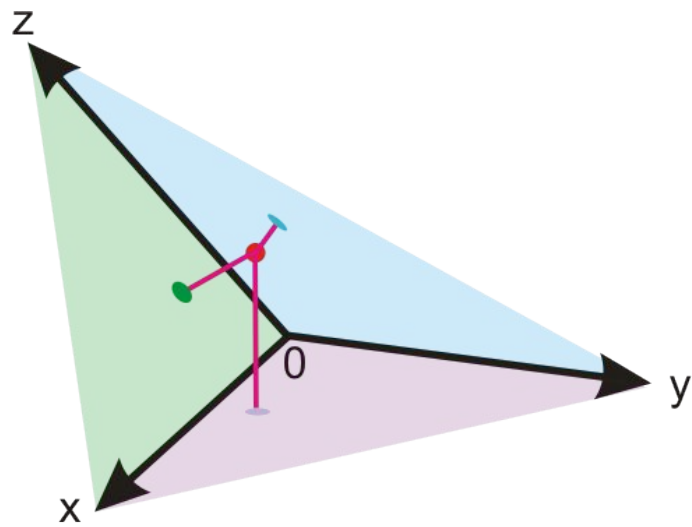
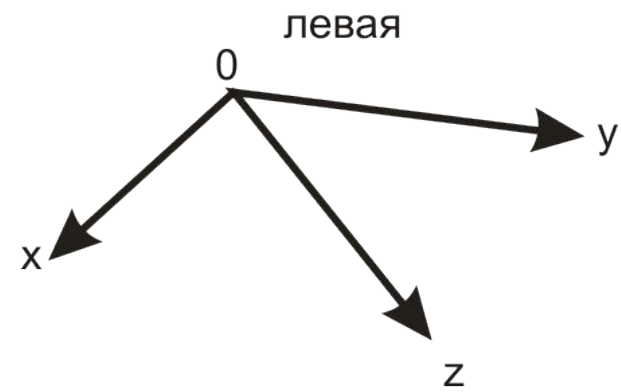
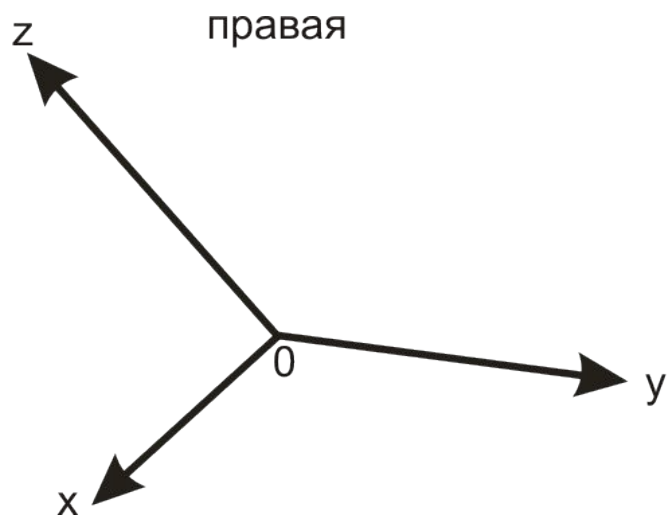
контравариантные

прямоугольные

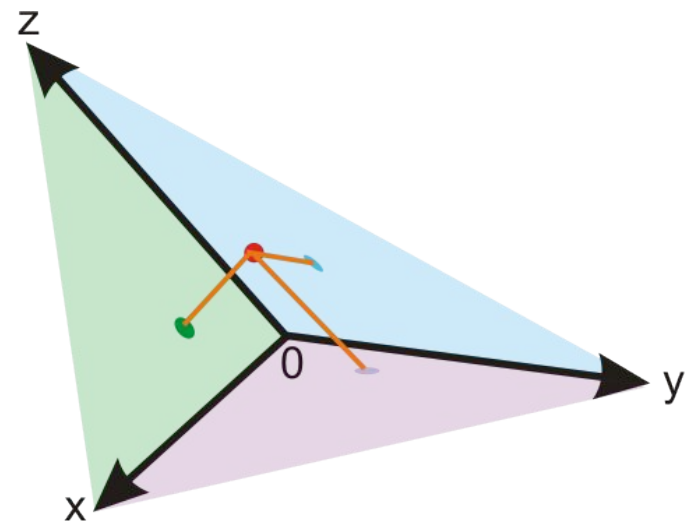
Криволинейные

Сферические

Цилиндрические



ковариантные координаты



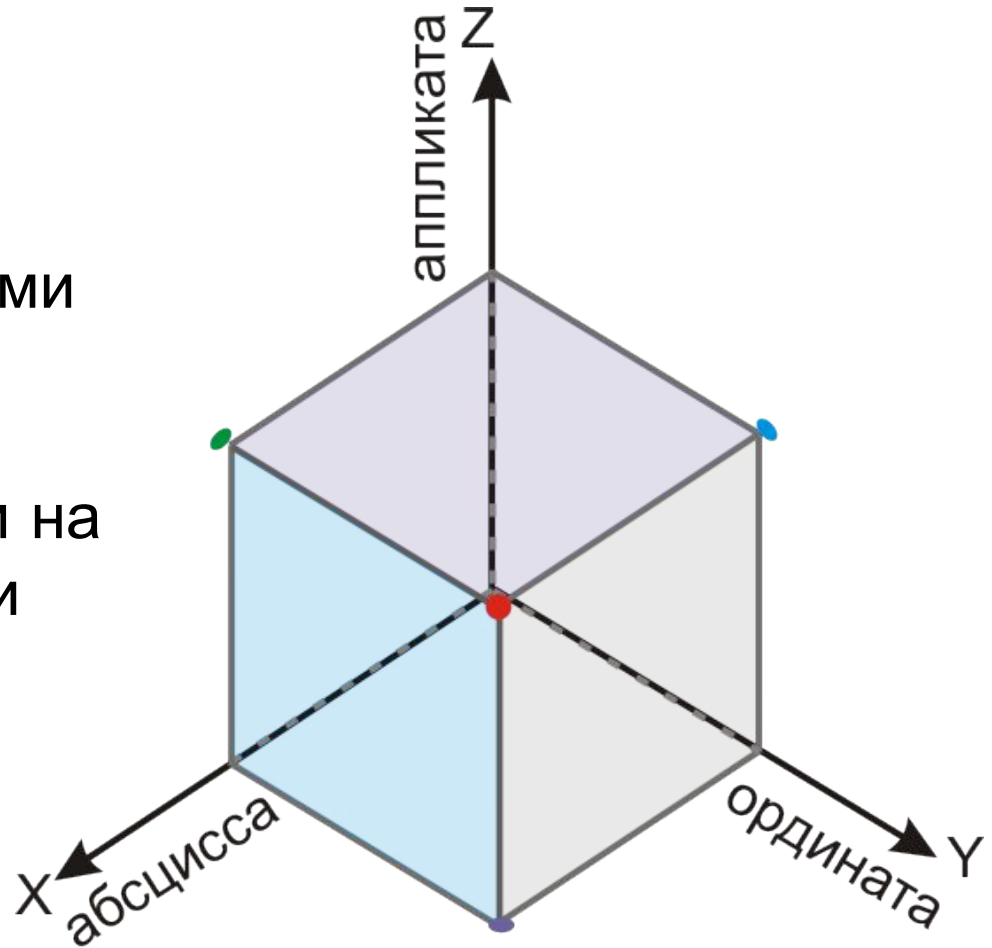
контравариантные координаты

Декартовы координаты

Ковариантные
координаты
совпадают с
контравариантными
и
совпадают с
проекциями точки на
координатные оси

Координаты точки

(x, y, z)





Сферические координаты

Координатные поверхности:

1. Пучок плоскостей, проходящих через Z
2. Конусы с осью Z
3. Сферы с центром O

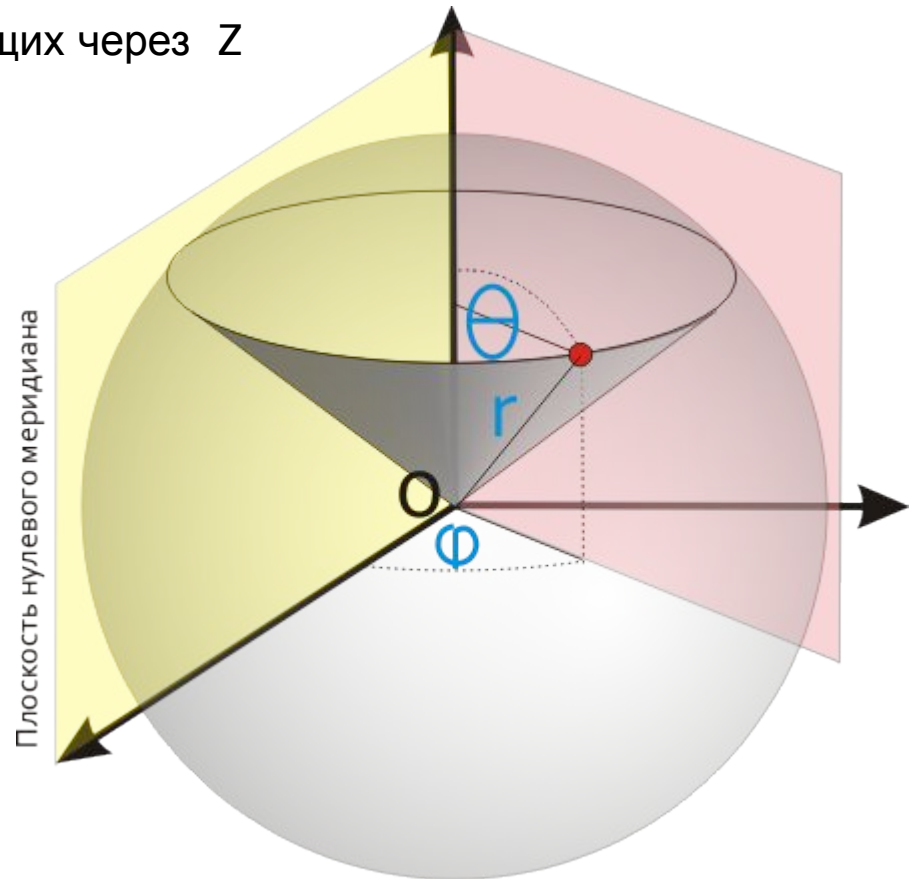
Координаты точки

$$(\theta, \varphi, r)$$

r - радиус

φ - долгота

$0.5\pi - \theta =$ широта



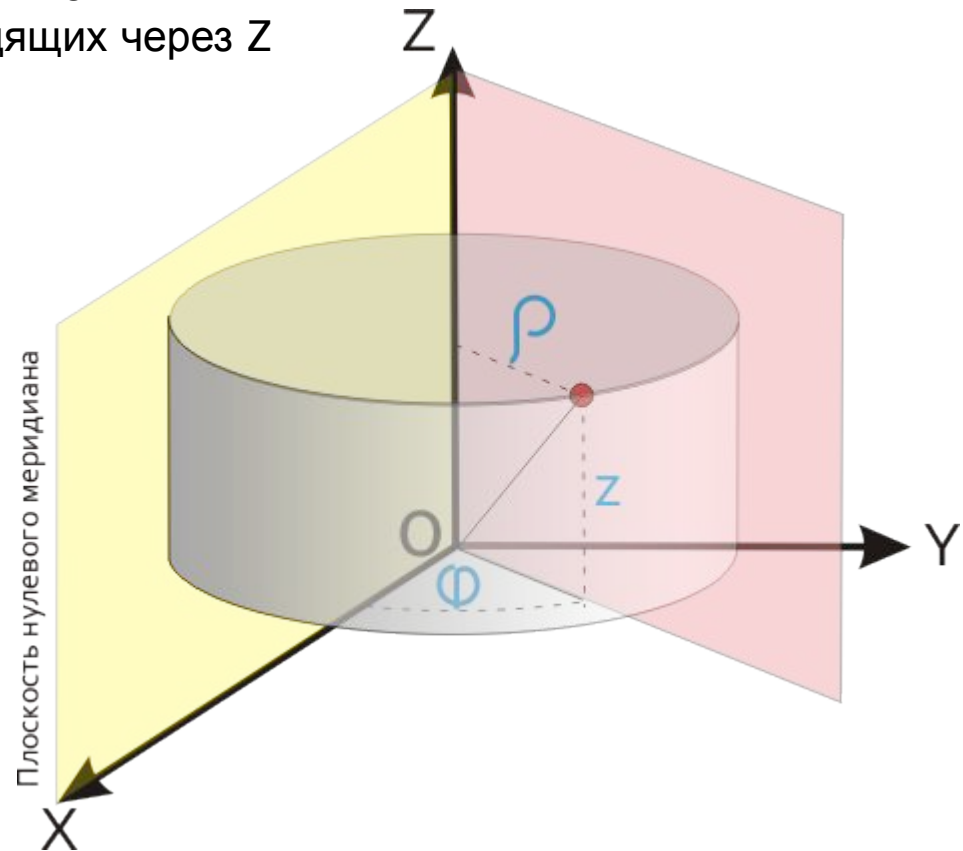
Цилиндрические координаты

Координатные поверхности

1. Плоскости, перпендикулярные Z
2. Пучок плоскостей, проходящих через Z
3. Цилиндры с осью Z

Координаты точки

(ρ, φ, z)





Определения дифференциальных операторов

Градиент

Вектор, направленный вдоль наибольшего возрастания некоторой величины U , значение которой меняется от точки к точке (скалярное поле) и по модулю равный скорости роста этой величины.

в декартовой (x, y, z)

$$\mathbf{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

в цилиндрической (ρ, ϕ, z)

$$\mathbf{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

в сферической (θ, ϕ, r)

$$\mathbf{grad}U = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r$$

Оператор Гамильтона (набла) $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$, формально используется в операциях по правилам векторной алгебры

$$\mathbf{grad}U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

Дивергенция

Поток векторного поля

$$\Phi = \oint_S (\mathbf{A}\mathbf{n}) ds$$

Определение дивергенции
(скаляр)

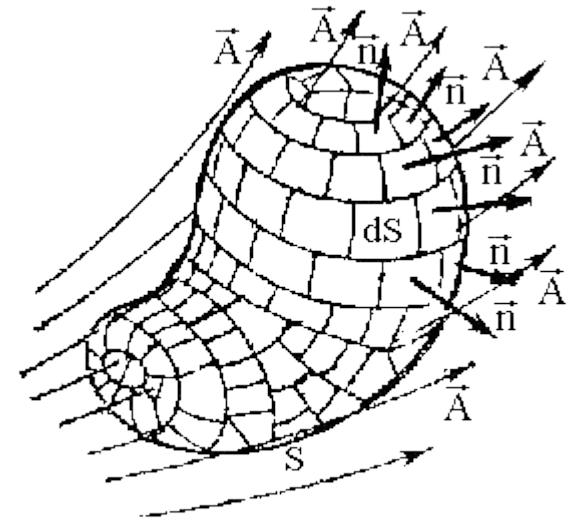
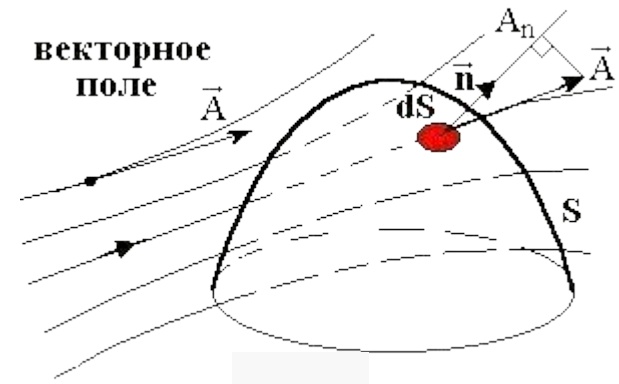
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \oint_S (\mathbf{A}\mathbf{n}) ds$$

в декартовой (x, y, z)

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

в цилиндрической (ρ, ϕ, z)

в сферической (θ, ϕ, r)



5.2

Если $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то в объеме V поле не имеет источников и стоков

http://tsput.ru/res/fizika/1/ELECTROSTATIKA/lection_05.html

$$\mathit{rot} \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS$$

$$|\mathit{rot} \mathbf{A}| = \lim_{\Delta S} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{A} d\mathbf{L}$$

Модуль $\mathit{rot} \mathbf{A}$ равен циркуляции проекции вектора \mathbf{A} на контур малой площадки, перпендикулярной $\mathit{rot} \mathbf{A}$.

в декартовой (x, y, z)

$$\mathit{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} =$$

в цилиндрической $(\rho,$

$$\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z) \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_z)}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z =$$

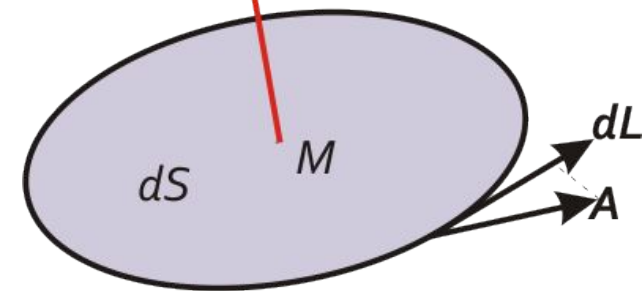
в сферической (θ, ϕ, r)

$$= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r$$

Если в некотором поле всюду $\mathit{rot} \mathbf{A} = 0$, значит равна нулю и циркуляция вектора \mathbf{A} , т.е. вихрей нет. Такие поля называют **потенциальными**

Ротор

$$\mathit{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{A}$$



$$\mathit{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Некоторые свойства дифференциальных операторов

$$\mathit{div}(\mathit{rot}A) = 0$$

$$\mathit{rot}(\mathit{grad}\varphi) = 0$$

$$\mathit{div}(\mathit{grad}\varphi) = \Delta\varphi \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{ЛАПЛАСИАН}$$

$$\mathit{div}(\varphi A) = \varphi \mathit{div}A + \mathit{grad}\varphi \cdot A$$

$$\mathit{div}(V \times A) = A \mathit{rot}V - V \mathit{rot}A$$

$$\mathit{rot}(\mathit{rot}A) = -\Delta A + \mathit{grad}(\mathit{div}A)$$

Для примера покажем, как последнее свойство получить с помощью «набла»

$$\mathit{rot}(\mathit{rot}A) = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla A) - (\nabla\nabla)A = +\mathit{grad}(\mathit{div}A) - \Delta A$$



Интегральные теоремы векторного анализа

(связывают характеристики поля в объеме и на поверхности тела)

Теорема Остроградского-Гаусса

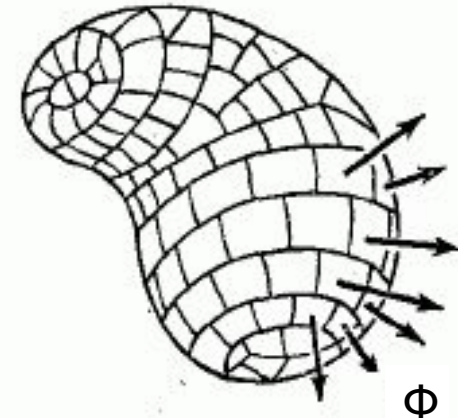
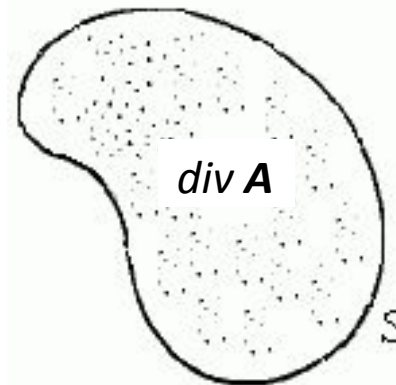


К.Ф.Гаусс
1777-1855

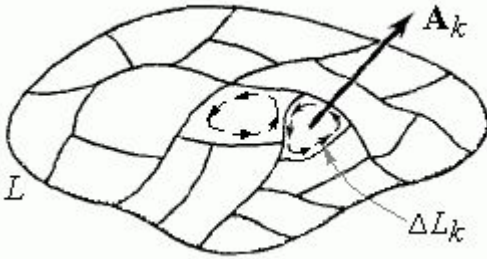


Остроградский М.В.
1801-1861

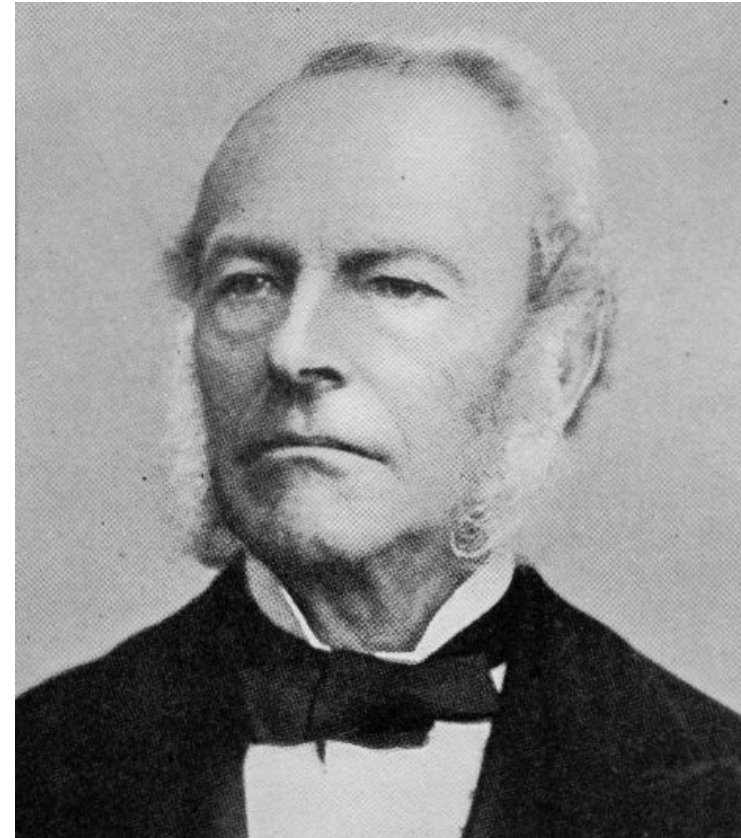
$$\iiint_V \operatorname{div} A dV = \iint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}) dS$$



Теорема Стокса



$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} \, dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$



Сэр Джордж Габриэль Стокс
1819-1903

Теорема о
градиенте

$$\iiint_V \mathbf{grad} \varphi \, dV = \iint_S \varphi \mathbf{n} \, dS$$

Теоремы Грина

Примем $\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi$ тогда

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \varphi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

и из теоремы Остроградского-Гаусса

$$\iiint_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV = \iint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

Приме $\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi$

$$\iiint_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \iint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

Если $\varphi = const$, то

$$\iiint_V (\Delta \psi) dV = \iint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$



Грин Джордж
14.7.1793 — 31.3.1841

Уравнения Максвелла

$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ *Первое уравнение: электрический заряд порождает электрическое поле*

$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ *Второе уравнение: изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле*

$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ *Третье уравнение: магнитных зарядов не существует*

$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ *Четвертое уравнение: электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле*

Переменных 5, а уравнений 4. Необходимо дополнить систему уравнениями, описывающими материал.

Материальные уравнения

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \mathbf{H} \quad \mu(\mathbf{r}, \mathbf{H}, \mathbf{E}, t) \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \quad \text{магнетики}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{H}, \mathbf{E}, t) \quad \text{диэлектрики}$$

Закон Ома

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{H}, \mathbf{E}, t, \dots) \quad \mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{H}, \mathbf{E}, t, \dots \mathbf{j}) \cdot \mathbf{E} \quad \text{металлы}$$



Спасибо за внимание