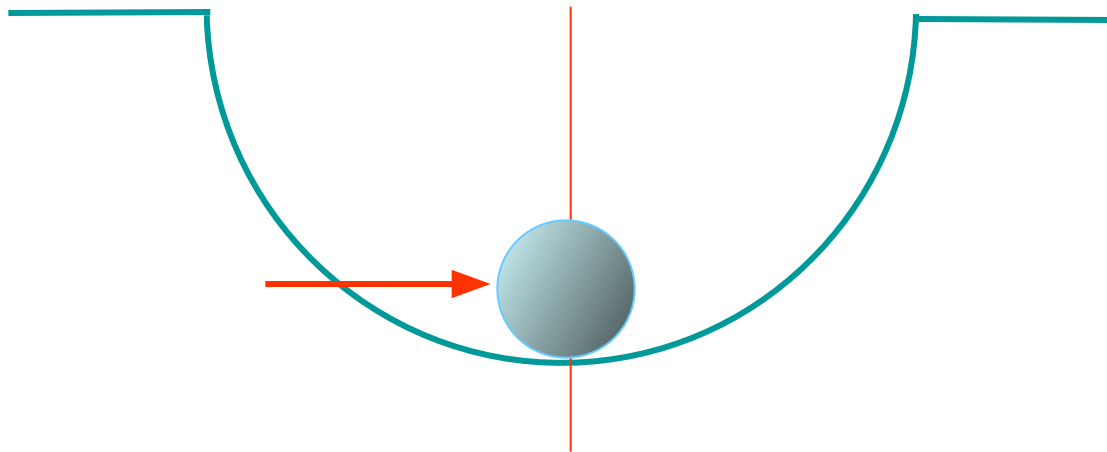


# Лекция

## Устойчивость упругих систем

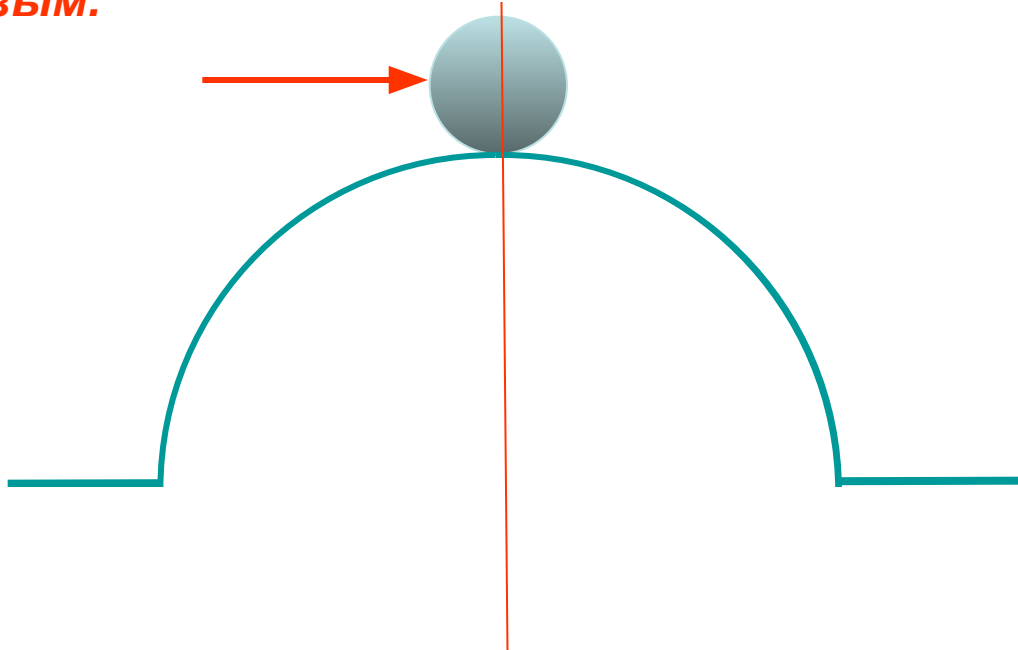
1. Понятие об устойчивости;
2. Формула Эйлера;
3. Формула Ясинского;
4. Диаграмма критических напряжений;
5. Инженерный способ расчета на устойчивость.

**Устойчивым** следует считать такое состояние механической системы, при котором любое внешнее отклонение от состояния равновесия вызывает реакцию системы, восстанавливающую это равновесие.



# Понятие об устойчивости

Состояние равновесия при котором достаточно незначительной случайной внешней силы что бы тело вышло из положения равновесия называется **неустойчивым**.



Значение внешней силы, при которой система переходит из устойчивого состояния в неустойчивое, называется **критической силой**.

Отношение критической силы механической системы к фактической внешней нагрузке приложенной к ней называется **запасом устойчивости**:

$$k_y = \frac{F_{кр}}{F}$$

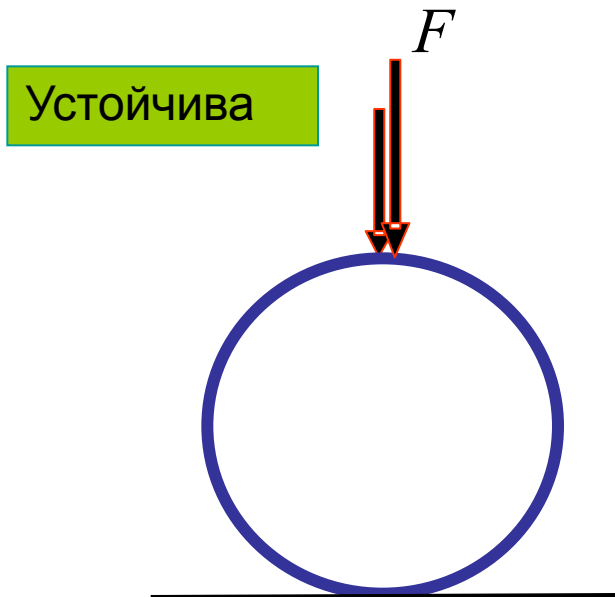
# Понятие об устойчивости



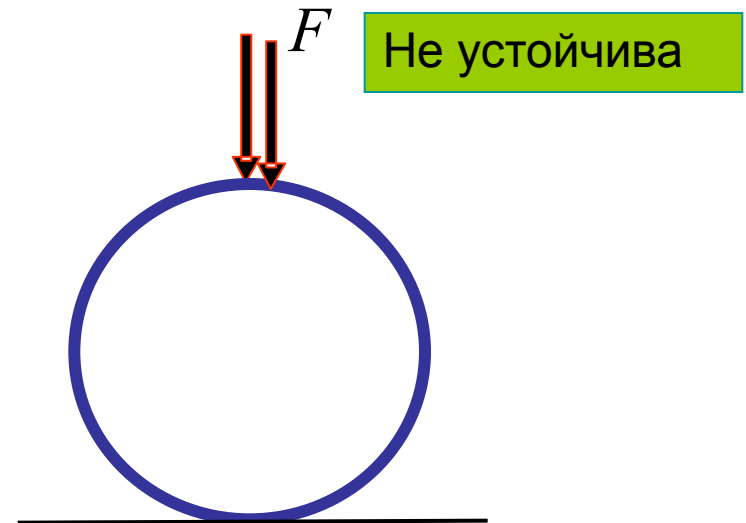
Механическая система находится в состоянии **безразличного равновесия**, если любые изменения в ней происходят только под действием внешней нагрузки.

## Устойчивость упругих систем

В сопротивлении материалов рассматриваются упругие системы в которых в качестве восстанавливающей реакции выступают силы упругости.



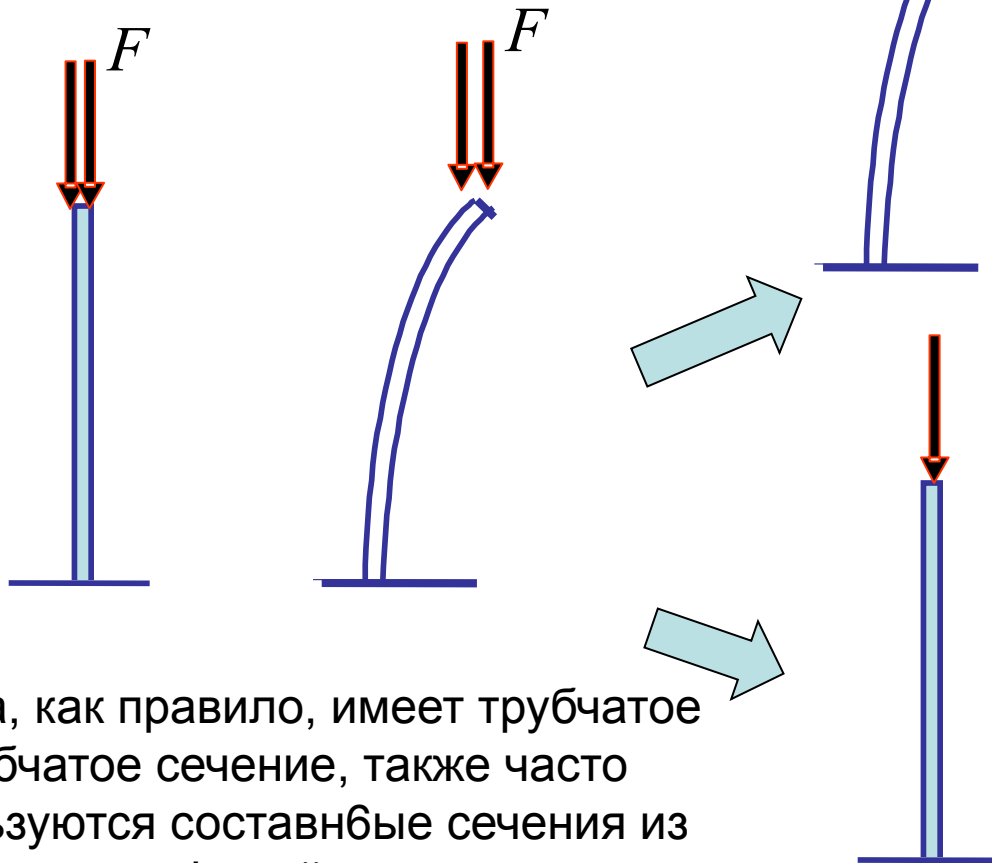
Восстанавливает первоначальную форму



Не восстанавливает первоначальную форму

# Понятие об устойчивости

Брус нагруженный осевой сжимающей силой называется *стойкой*.



Не устойчива

Не восстанавливает первоначальную форму

Восстанавливает первоначальную форму

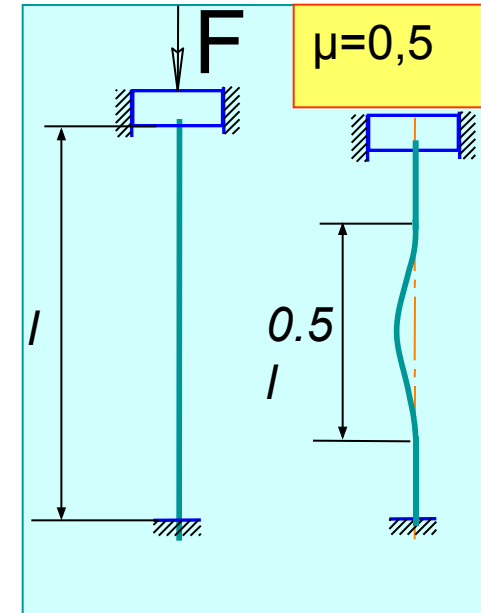
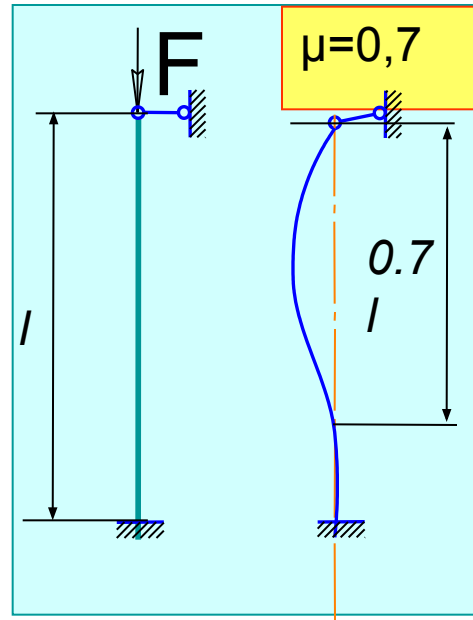
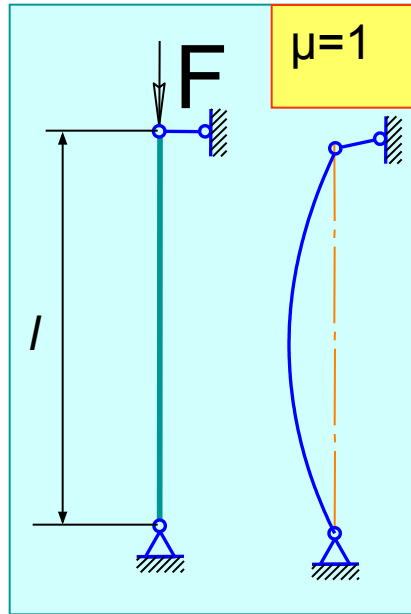
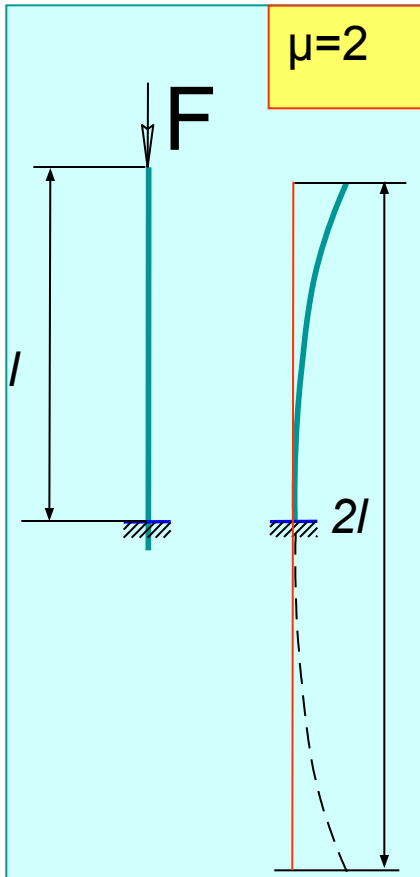
Устойчива

Стойка, как правило, имеет трубчатое и коробчатое сечение, также часто используются составные сечения из прокатных профилей

# Формула Эйлера для критической силы

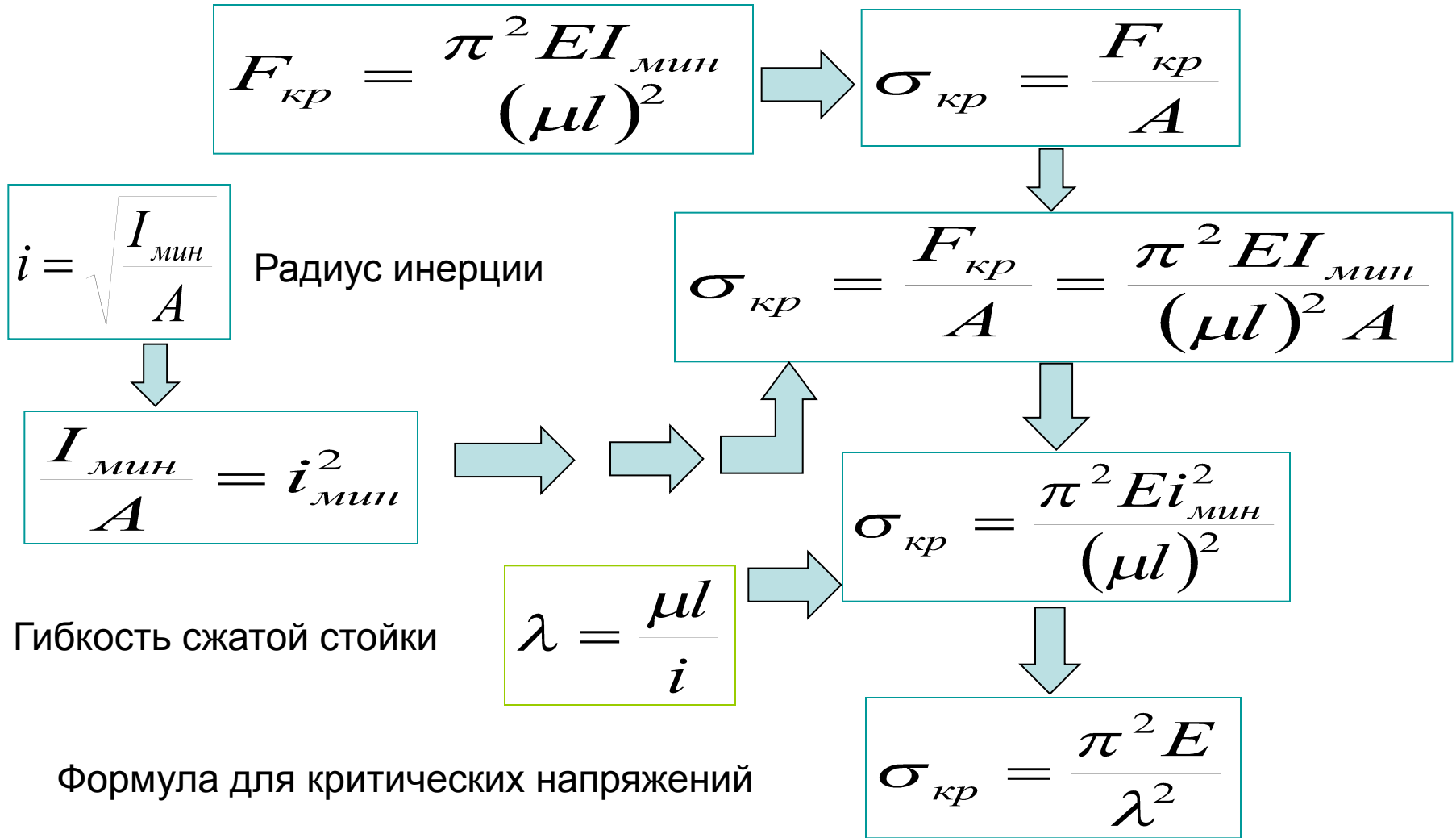
$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{мин}}{(\mu l)^2}$$

$E$  – модуль упругости,  $I_{мин}$  – момент инерции,  $\mu$  - коэффициент закрепления.



Коэффициент закрепления стойки  $\mu$  оценивает на какой части длины стойки укладывается полуволна синусоиды.

# Формула Эйлера для критического напряжения



# Пределы применимости формулы Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Формула Эйлера для критических напряжений

Формула Эйлера применима при условии если напряжения не превышают пределе пропорциональности  $\sigma_{пц}$ .

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}$$

Условие применимости формулы Эйлера

Выразим из этой формулы гибкость стойки

$$\lambda^2 \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}$$

или

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$$

Примем следующее обозначение

$$\lambda_{пр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$$

получим:

$$\lambda \geq \lambda_{пр}$$

Условие применимости формулы Эйлера

$\lambda_{пр}$  - предельная гибкость стойки, зависит только от свойств материала.

Для стали Ст.3:  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{пц}=200$  МПа,  $\lambda_{пр} \approx 100$ .

Для стали Стали 45:  $E=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{пц}=400$  МПа,  $\lambda_{пр} \approx 70$ .

# Формула Феликса Ясинского

Формула Ясинского является обобщением огромного экспериментального материала по устойчивости стержней средней гибкости;

Для критического напряжения

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Для критической силы

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$$

Здесь  $a$  и  $b$  – постоянные коэффициенты зависящие от материала стойки

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , МПа

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа
Ст.3	310	1,14
Ст.5	345	1,24
Сталь 45	360	1,32
Серый чугун	776	12
Древесина		



# Диаграмма критических напряжений

Диаграмма критических напряжений используется для выбора формулы при проведении проверочных расчетов на устойчивость или прочность.

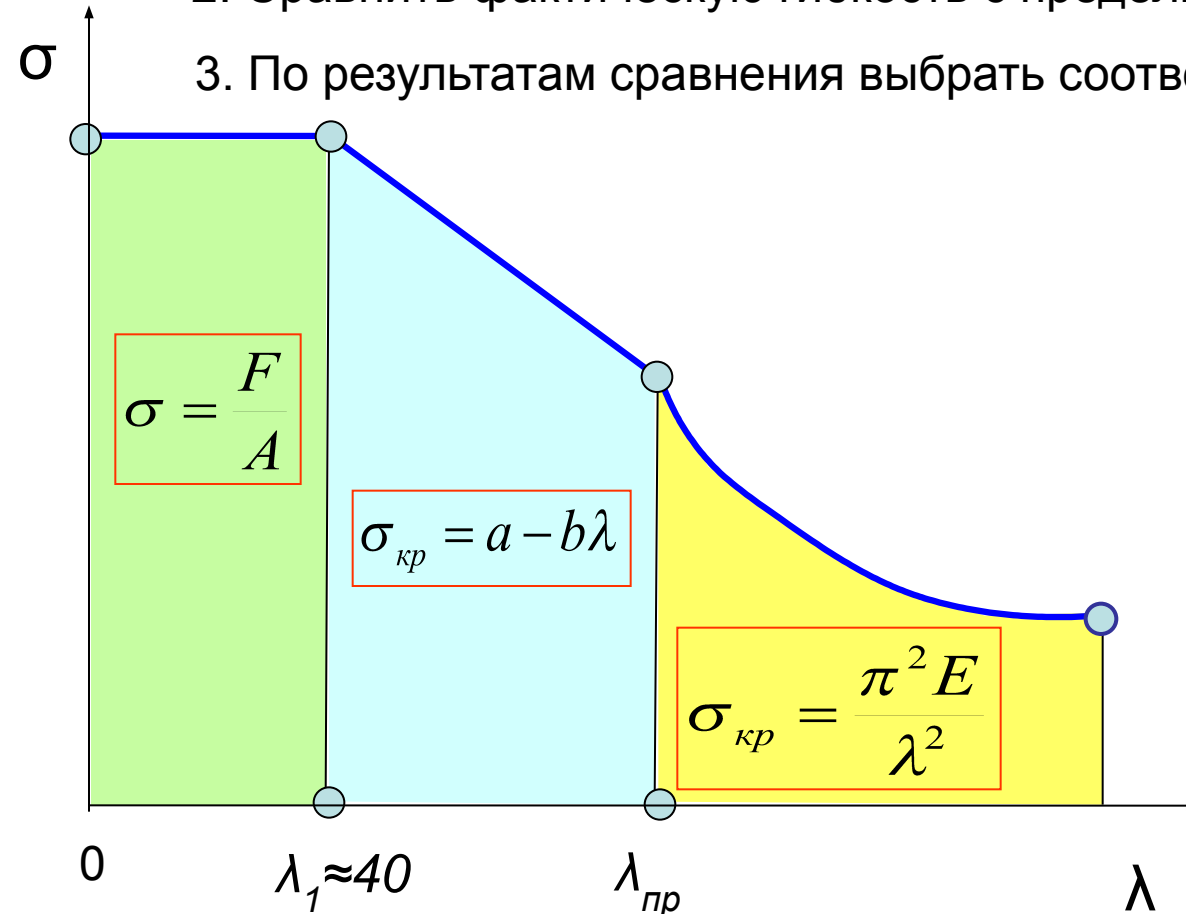
## Алгоритм расчета

1. Определить фактическую гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

2. Сравнить фактическую гибкость с предельной гибкостью  $\lambda_{пр}$  и с  $\lambda_1=40$ .

3. По результатам сравнения выбрать соответствующую формулу



Значение предельной гибкости для различных материалов

Для стали Ст. 3  $\lambda_{пр} = 100$ ;

Для стали Ст.5  $\lambda_{пр} = 85$

Для чугуна  $\lambda_{пр} = 80$

Для древесины  $\lambda_{пр} = 70$

# Инженерный способ расчета на устойчивость

Формулы Эйлера и Ясинского используются для выполнения проверочных расчетов конструкций на устойчивость.

Для выполнения проектных расчетов используется специальная методика основанная на использовании коэффициента понижения допускаемого напряжения  $\phi$

Условие устойчивости записывается в следующем виде

Проверочный расчет

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \phi[\sigma]$$

Проектный расчет

$$A \geq \frac{F}{\phi[\sigma]}$$

Алгоритм выполнения проектного расчета проще показать на конкретном примере.

**Дано:** Сжимающая сила  $F=50$  кН, длина стойки  $L=2,0$  м, стойка имеет круглое поперечное сечение, материал Ст.3, допускаемое напряжение  $[\sigma]=100$  МПа. Обе опоры стойки шарнирные ( $\mu=1$ ).

**Определить** размеры поперечного сечения стойки.

# Инженерный способ расчета на устойчивость

## Алгоритм выполнения проектного расчета

Перед началом расчета неизвестны геометрические размеры поперечного сечения стойки, а следовательно нет возможности определить гибкость стойки и коэффициент  $\phi$ . Принимаем любое значение от 0 до 1.

1. Первое значение коэффициента  $\phi$ :  $\phi_1 = 0,5$

2. Площадь сечения стойки в первом приближении:

$$A_1 = \frac{F}{\phi_1 [\sigma]} = \frac{50000}{0,5 \cdot 100} = 1000 \text{ мм}^2$$

3. Геометрические размеры поперечного сечения

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1000}{3,14}} = 35,69 \text{ мм}$$

4. Радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{4\pi d^4}{32\pi d^2}} = \frac{d}{4} \approx 9 \text{ мм.}$$

5. Фактическая гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2000}{9} \approx 222$$

# Инженерный способ расчета на устойчивость

6. По значению фактической гибкости стойки  $\lambda_1=222$  из таблицы выбираем значение коэффициента  $\phi$  точного значения нет поэтому нужно:

- a) Из таблицы гибкости  $\lambda=190$  соответствует значение  $\phi(190)=0,21$ ;
- b) Гибкости  $\lambda=200$  -  $\phi(200)=0,19$ ;
- c) На десять единиц гибкости приходится  $\Delta\phi=0,02$
- d) На 22 единицы гибкости приходится  $\Delta\phi=0,02 \cdot 22/10=0,044$ ,
- e)  $\phi(222)=0,19-0,044=0,146$ .

Условия  $\phi_{\tau 1}=\phi_1$  не выполняется и нужно повторить расчет приняв новое значение коэффициента  $\phi_2$ .

$$\phi_{\tau 1}=0,146 < \phi_1=0,5$$

Гибкость стойки $\lambda$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\phi$	1,0	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69

Гибкость стойки $\lambda$	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$\phi$	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

# Инженерный способ расчета на устойчивость

7. Второе значение коэффициента  $\phi$ : 
$$\phi_2 = \frac{\phi_1 + \phi_{T1}}{2} = \frac{0,146 + 0,5}{2} = 0,323$$

8. Площадь сечения стойки во втором приближении:

$$A_2 = \frac{F}{\phi_2 [\sigma]} = \frac{50000}{0,323 \cdot 100} = 1548 \text{ мм}^2$$

9. Геометрические размеры поперечного сечения

$$d = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1548}{3,14}} = 44,4 \text{ мм}$$

10. Радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{4\pi d^4}{32\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{44,4}{4} \approx 11,1 \text{ мм.}$$

11. Фактическая гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2000}{11,1} \approx 180$$

Условия  $\phi_{T2} = \phi_2$  не выполняется и нужно повторить расчет приняв новое значение коэффициента  $\phi_3$ .

$$\phi_{T2} = 0,23 < \phi_2 = 0,323$$

Гибкость стойки $\lambda$	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$\phi$	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

# Инженерный способ расчета на устойчивость

12. Третье значение коэффициента  $\phi$ :

$$\phi_3 = \frac{\phi_2 + \phi_{T2}}{2} = \frac{0,323 + 0,230}{2} = 0,277$$

13. Площадь сечения стойки в третьем приближении:

$$A_3 = \frac{F}{\phi_3 [\sigma]} = \frac{50000}{0,277 \cdot 100} = 1805 \text{ мм}^2$$

14. Геометрические размеры поперечного сечения

$$d = \sqrt{\frac{4A_3}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1805}{3,14}} = 48 \text{ мм}$$

15. Радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{4\pi d^4}{32\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{48}{4} \approx 12 \text{ мм.}$$

16. Фактическая гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2000}{12} \approx 167$$

a) Из таблицы гибкости  $\lambda=160$  соответствует значение  $\phi(160)=0,29$ ;

b) Гибкости  $\lambda=170$  -  $\phi(170)=0,26$ ;

c)												
d)	Гибкость стойки $\lambda$	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
e)	$\phi$	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

Ошибка:  $\Delta\phi = \frac{\phi_{T3} - \phi_3}{\phi_{T3}} 100\% = \frac{0,269 - 0,277}{0,269} 100\% = 2,98\%$  что допустимо