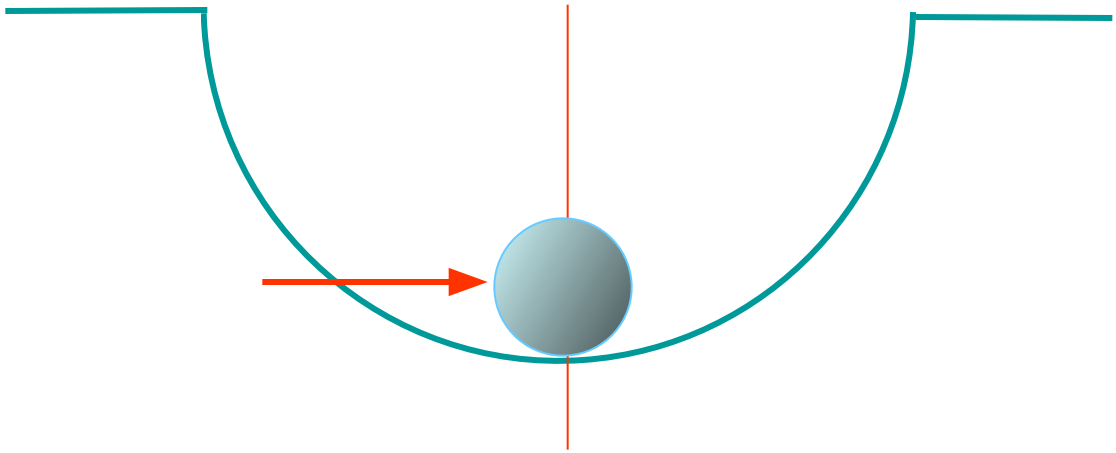
Лекция

Устойчивость упругих систем

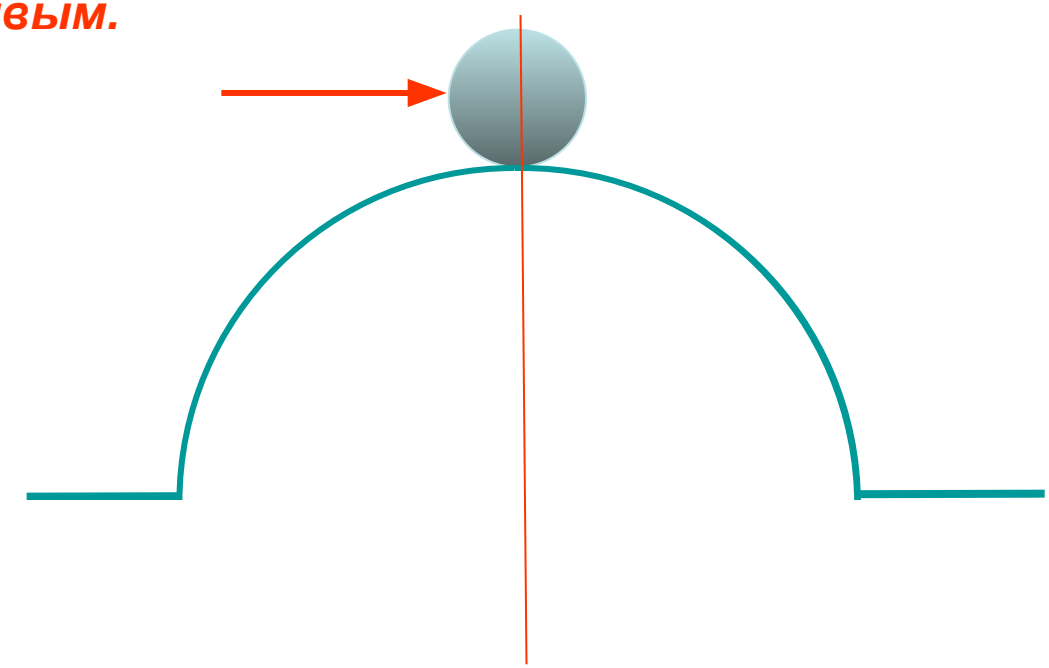
1. Понятие об устойчивости;
2. Формула Эйлера;
3. Формула Ясинского;
4. Диаграмма критических напряжений;
5. Инженерный способ расчета на устойчивость.

Устойчивым следует считать такое состояние механической системы, при котором любое внешнее отклонение от состояния равновесия вызывает реакцию системы, восстанавливающую это равновесие.



Понятие об устойчивости

Состояние равновесия при котором достаточно незначительной случайной внешней силы что бы тело вышло из положения равновесия называется ***неустойчивым.***



Значение внешней силы, при которой система переходит из устойчивого состояния в неустойчивое, называется ***критической силой***.

Отношение критической силы механической системы к фактической внешней нагрузке приложенной к ней называется ***запасом устойчивости***:

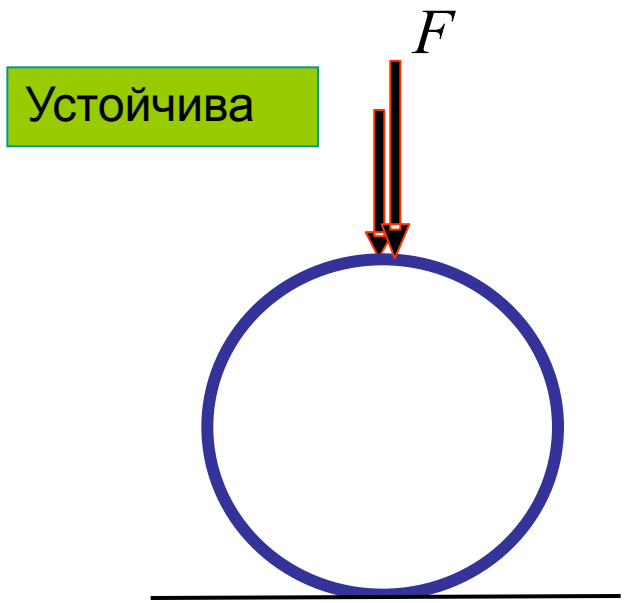
$$\boxed{k_y = \frac{F_{кр}}{F}}$$

Понятие об устойчивости

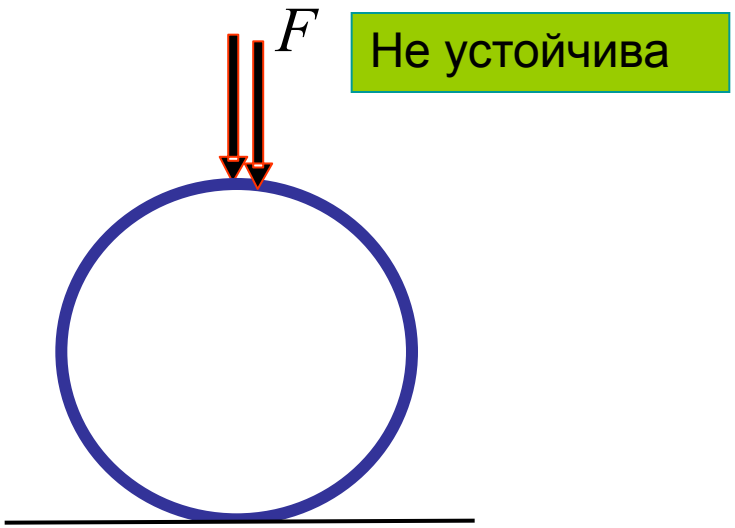
Механическая система находится в состоянии ***безразличного равновесия,*** если любые изменения в ней происходят только под действием внешней нагрузки.

Устойчивость упругих систем

В сопротивлении материалов рассматривается упругие системы в которых в качестве восстанавливающей реакции выступают силы упругости.



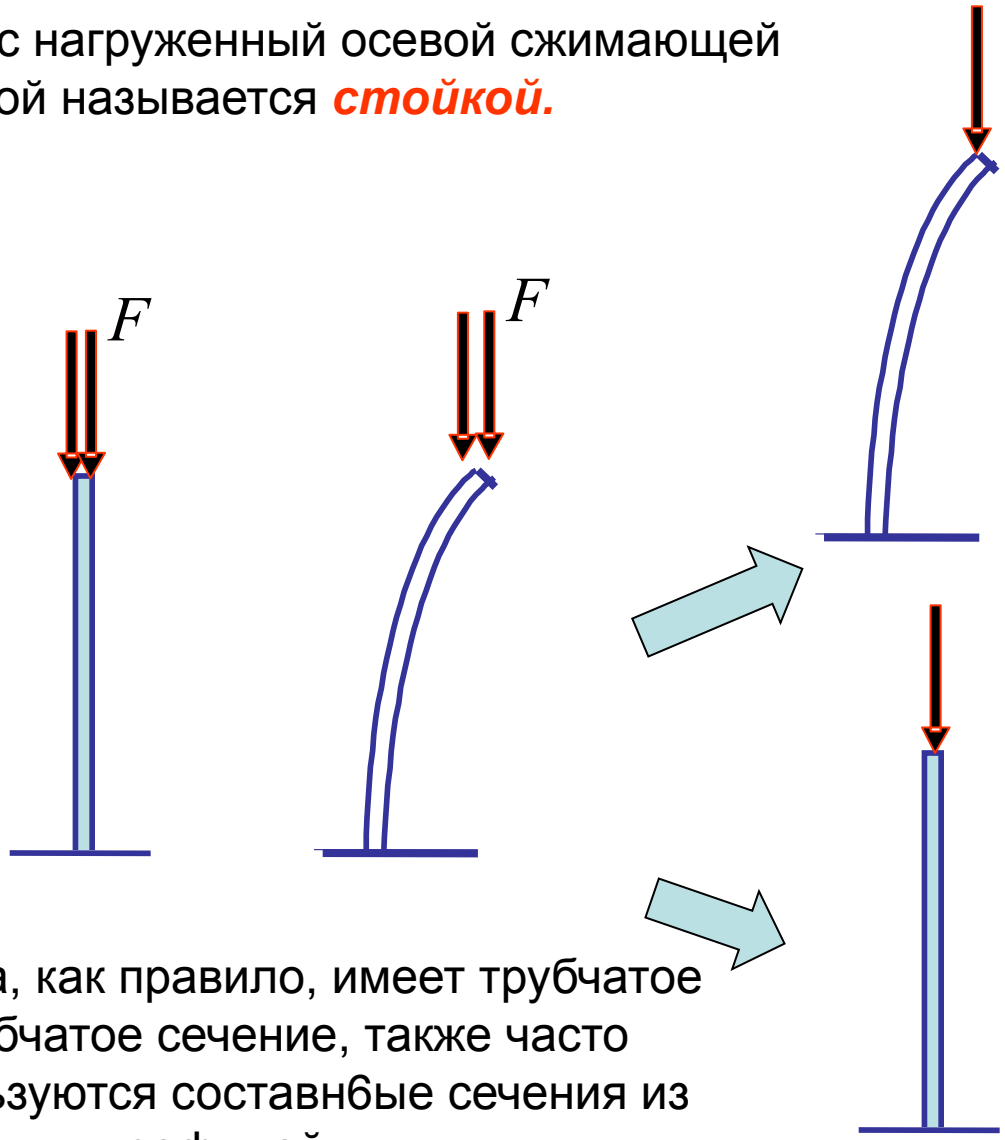
Восстанавливает первоначальную форму



Не восстанавливает первоначальную форму

Понятие об устойчивости

Брус нагруженный осевой сжимающей силой называется ***стойкой.***



Не устойчива

Не восстанавливает первоначальную форму

Восстанавливает первоначальную форму

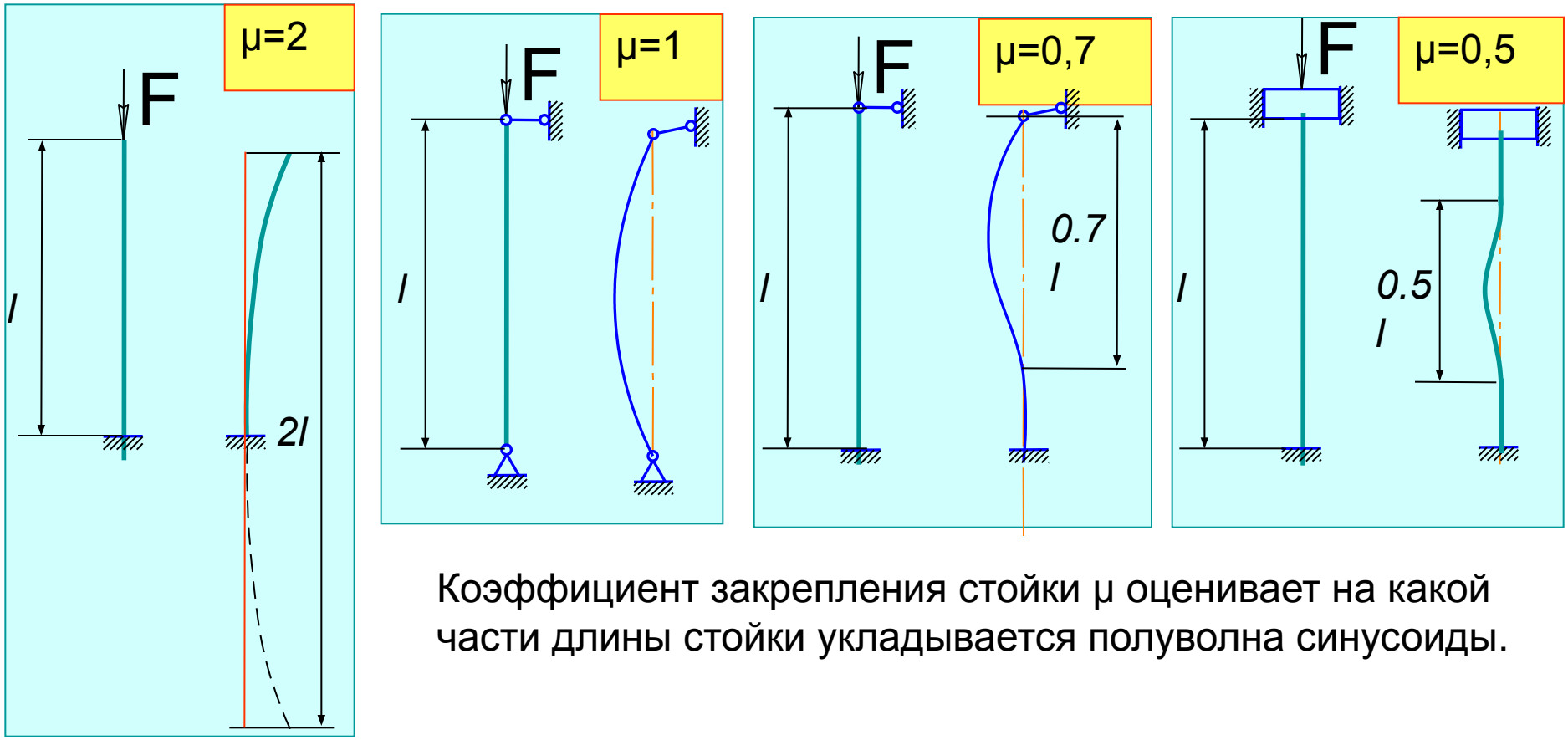
Устойчива

Стойка, как правило, имеет трубчатое и коробчатое сечение, также часто используются составн6ые сечения из прокатных профилей

Формула Эйлера для критической силы

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2}$$

E – модуль упругости, $I_{мин}$ – момент инерции, μ - коэффициент закрепления.



Коэффициент закрепления стойки μ оценивает на какой части длины стойки укладывается полуволна синусоиды.

Формула Эйлера для критического напряжения

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2}$$

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A}$$

$$i = \sqrt{\frac{I_{мин}}{A}}$$

Радиус инерции

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2 A}$$

$$\frac{I_{мин}}{A} = i_{мин}^2$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{мин}^2}{(\mu l)^2}$$

Гибкость сжатой стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

Формула для критических напряжений

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Пределы применимости формулы Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Формула Эйлера для критических напряжений

Формула Эйлера применима при условии если напряжения не превышают пределе пропорциональности $\sigma_{пц}$.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц}$$

Условие применимости формулы Эйлера

Выразим из этой формулы гибкость стойки $\lambda^2 \ge \frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}$ или $\lambda \ge \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$

Примем следующее обозначение $\lambda_{пр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$ получим:

$$\lambda \ge \lambda_{пр}$$

Условие применимости формулы Эйлера

$\lambda_{пр}$ - предельная гибкость стойки, зависит только от свойств материала.

Для стали Ст.3: $E=2\cdot10^5$ МПа, $\sigma_{пц}$=200 МПа, $\lambda_{пр}\approx100$.

Для стали Стали 45: $E=2\cdot10^5$ МПа, $\sigma_{пц}$=400 МПа, $\lambda_{пр}\approx70$.

Формула Феликса Ясинского

Формула Ясинского является обобщением огромного экспериментального материала по устойчивости стержней средней гибкости;

Для критического напряжения

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

Для критической силы

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$$

Здесь a и b – постоянный коэффициенты зависящие от материала стойки

Значения коэффициентов a и b, МПа

Материал	a, МПа	b, МПа
Ст.3	310	1,14
Ст.5	345	1,24
Сталь 45	360	1,32
Серый чугун	776	12
Древесина		

Диаграмма критических напряжений

Диаграмма критических напряжений используется для выбора формулы при проведении проверочных расчетов на устойчивость или прочность.

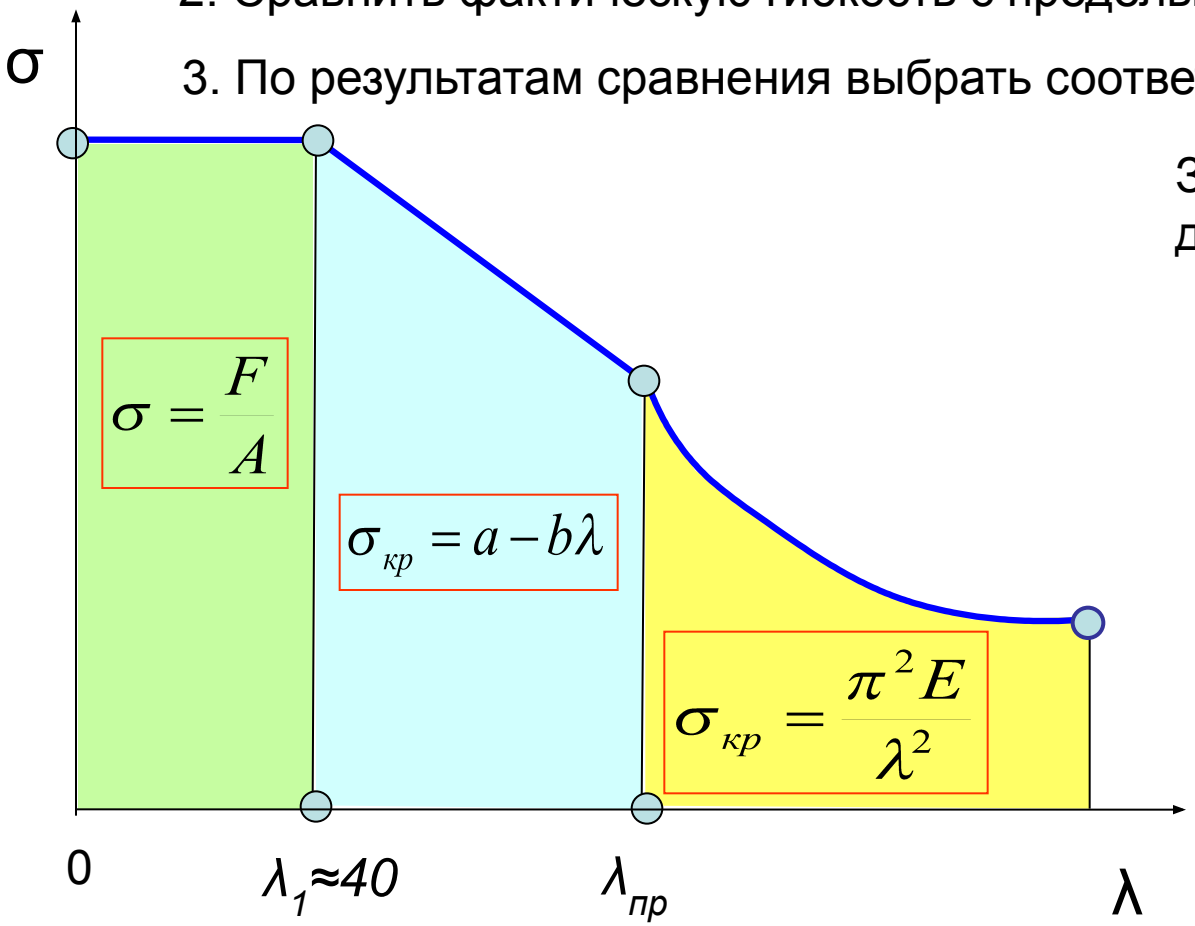
Алгоритм расчета

1. Определить фактическую гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

2. Сравнить фактическую гибкость с предельной гибкостью $\lambda_{пр}$ и с λ_1=40.

3. По результатам сравнения выбрать соответствующую формулу



Значение предельной гибкости для различных материалов

Для стали Ст. 3 $\lambda_{пр}$ =100;
Для стали Ст.5 $\lambda_{пр}$=85

Для чугуна $\lambda_{пр}$=80
Для древесины $\lambda_{пр}$=70

Инженерный способ расчета на устойчивость

Формулы Эйлера и Ясинского используются для выполнения проверочных расчетов конструкций на устойчивость.

Для выполнения проектных расчетов используется специальная методика основанная на использовании коэффициента понижения допускаемого напряжения ϕ

Условие устойчивости записывается в следующем виде

Проверочный расчет

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \varphi[\sigma]$$

Проектный расчет

$$A \ge \frac{F}{\varphi[\sigma]}$$

Алгоритм выполнения проектного расчета проще показать на конкретном примере.

Дано: Сжимающая сила F=50 кН, длина стойки L=2,0 м, стойка имеет круглое поперечное сечение, материал Ст.3, допускаемое напряжение [σ]=100 МПа. Обе опоры стойки шарнирные (μ=1).

Определить размеры поперечного сечения стойки.

Инженерный способ расчета на устойчивость

Алгоритм выполнения проектного расчета

Перед началом расчета неизвестны геометрические размеры поперечного сечения стойки, а следовательно нет возможности определить гибкость стойки и коэффициент ϕ. Принимаем любое значение от 0 до 1.

1. Первое значение коэффициента ϕ: $\phi_1=0,5$

2. Площадь сечения стойки в первом приближении:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{50000}{0,5 \cdot 100} = 1000\ мм^2$$

3. Геометрические размеры поперечного сечения

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1000}{3,14}} = 35,69\ мм$$

4. Радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{4\pi d^4}{32\pi d^2}} = \frac{d}{4} \approx 9\ мм.$$

5. Фактическая гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2000}{9} \approx 222$$

Инженерный способ расчета на устойчивость

6. По значению фактической гибкости стойки λ_1=222 из таблицы выбираем значение коэффициента ϕ точного значения нет поэтому нужно:

a) Из таблицы гибкости λ=190 соответствует значение ϕ(190)=0,21;

b) Гибкости λ=200 - ϕ(200)=0,19;

c) На десять единиц гибкости приходится Δϕ=0,02

d) На 22 единицы гибкости приходится Δϕ=0,02 ·22/10=0,044,

e) ϕ(222)=0,19-0,044=0,146.

Условия $\phi_{т1}=\phi_1$не выполняется и нужно повторить расчет приняв новое значение коэффициента ϕ_2.

$\phi_{т1}=0,146< \phi_1=0,5$

Гибкость стойки λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϕ	1,0	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69

Гибкость стойки λ	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
ϕ	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

Инженерный способ расчета на устойчивость

7. Второе значение коэффициента ϕ: $$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{T1}}{2} = \frac{0{,}146 + 0{,}5}{2} = 0{,}323$$

8. Площадь сечения стойки во втором приближении: $$A_2 = \frac{F}{\varphi_2[\sigma]} = \frac{50000}{0{,}323 \cdot 100} = 1548\ мм^2$$

9. Геометрические размеры поперечного сечения $$d = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1548}{3{,}14}} = 44{,}4\ мм$$

10. Радиус инерции сечения $$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{4\pi d^4}{32\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{44{,}4}{4} \approx 11{,}1\ мм.$$

11. Фактическая гибкость стойки: $$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2000}{11{,}1} \approx 180$$

Условия $\phi_{т2}=\phi_2$ не выполняется и нужно повторить расчет приняв новое значение коэффициента ϕ_3.

$\phi_{т2}=0{,}23 < \phi_2=0{,}323$

Гибкость стойки λ	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
ϕ	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

Инженерный способ расчета на устойчивость

12. Третье значение коэффициента ϕ:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{T2}}{2} = \frac{0{,}323 + 0{,}230}{2} = 0{,}277$$

13. Площадь сечения стойки в третьем приближении:

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3[\sigma]} = \frac{50000}{0{,}277 \cdot 100} = 1805\ мм^2$$

14. Геометрические размеры поперечного сечения

$$d = \sqrt{\frac{4A_3}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1805}{3{,}14}} = 48\ мм$$

15. Радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{4\pi d^4}{32\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{48}{4} \approx 12\ мм.$$

16. Фактическая гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2000}{12} \approx 167$$

a) Из таблицы гибкости λ=160 соответствует значение ϕ(160)=0,29;

b) Гибкости λ=170 - ϕ(170)=0,26;

c)

d)

e)

Гибкость стойки λ	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
ϕ	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

Ошибка: $\Delta\varphi = \frac{\varphi_{T3} - \varphi_3}{\varphi_{T3}} 100\% = \frac{0{,}269 - 0{,}277}{0{,}269} 100\% = 2{,}98\%$ что допустимо