§ 6. Следствия из аксиом I—III

Т е о р е м а 13. *Пусть даны три точки A, B, C на прямой a и три точки A', B',C' на прямой a'. Пусть, далее, $A\ B \equiv A'\ B'$ и $AC \equiv A'\ C'$. Тогда, если B лежит между A и C, а B' на прямой a' лежит с той же стороны от точки A', что и C', то B' лежит между A' и C'.*

В отличие от теоремы 12 здесь заранее не предполагается конгруэнтность $BC \equiv B'C'$.

О п р е д е л е н и е 8. Треугольник ABC называется *конгруэнтным* треугольнику $A'B'C'$, если

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$
$$\angle A \equiv \angle A', \quad \angle B \equiv \angle B', \quad \angle C \equiv \angle C'$$

(символическая запись: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$).

Теорема 14 (первая теорема о конгруэнтности треугольников). *Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{и} \quad \angle A \equiv \angle A',$$

то треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A'B'C'$.

Теорема 15 (вторая теорема о конгруэнтности треугольников). *Если для треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad \angle A \equiv \angle A', \quad \angle B \equiv \angle B',$$

то треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A'B'C'$.

Теорема 16. *Пусть* h, k, l *и* h', k', l' — *лучи, исходящие соответственно из точек* O *и* O', *и каждая из этих троек лучей расположена в одной плоскости. Пусть, далее, один из лучей* h, k, l *проходит внутри угла, образованного двумя другими, а соответствующий ему луч тройки* h', k', l' (т. е. обозначенный той же буквой) *так же расположен по отношению к двум другим лучам этой тройки. Тогда из*

$$\angle(h,l) \equiv \angle(h',l') \text{ и } \angle(l,k) \equiv \angle(l',k')$$

следует

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k').$$

Теорема 16а. *Пусть в некоторой плоскости даны лучи h, k, l и h', k', l', исходящие соответственно из точек O и O'. Пусть лучи k и l лежат по одну сторону от прямой, содержащей луч h, а лучи k' и l' аналогично расположены относительно h'. Тогда, если $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$, $\angle(h,l) \equiv \angle(h',l')$ и если луч k лежит внутри угла $\angle(h,l)$, то луч k' лежит внутри угла $\angle(h',l')$.*

Теорема 17. *Если в треугольнике ABC имеем $AC \equiv CB$, то $\angle CAB \equiv \angle CBA$ и $\angle CBA \equiv \angle CAB$.*

Доказательство. Теорема следует из аксиомы III.5 в применении к треугольникам CAB и CBA.

Теорема 18 (третья теорема о конгруэнтности треугольников). *Если для треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$

то треугольник ABC конгруэнтен треугольнику $A'B'C'$.

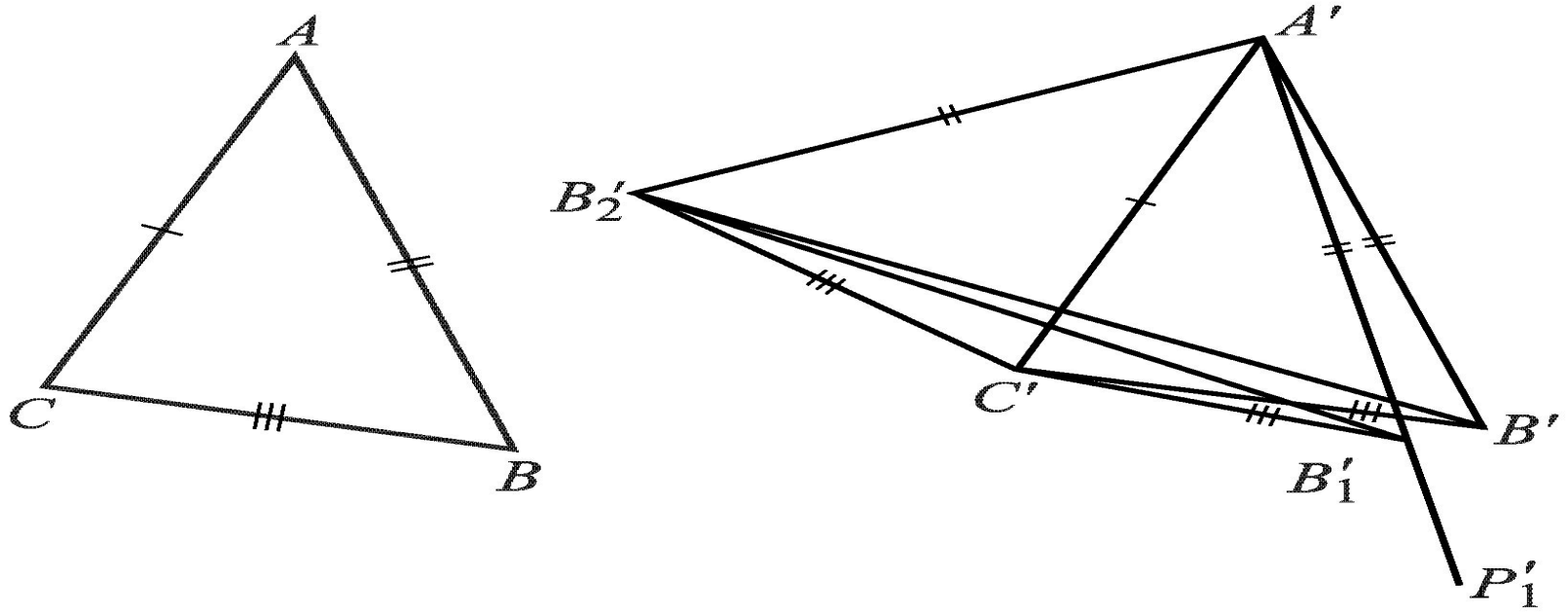

Рис. 24

Теорема 19. *Если* $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ *и* $\angle(h,k) \equiv \angle(h'', k'')$, *то* $\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'')$.

Определение 9. Два угла, у которых имеются общая вершина и одна общая сторона, а другие стороны которых составляют прямую линию, называются *смежными углами*. Два угла с общей вершиной, стороны которых попарно составляют прямые линии, называются *вертикальными углами*.

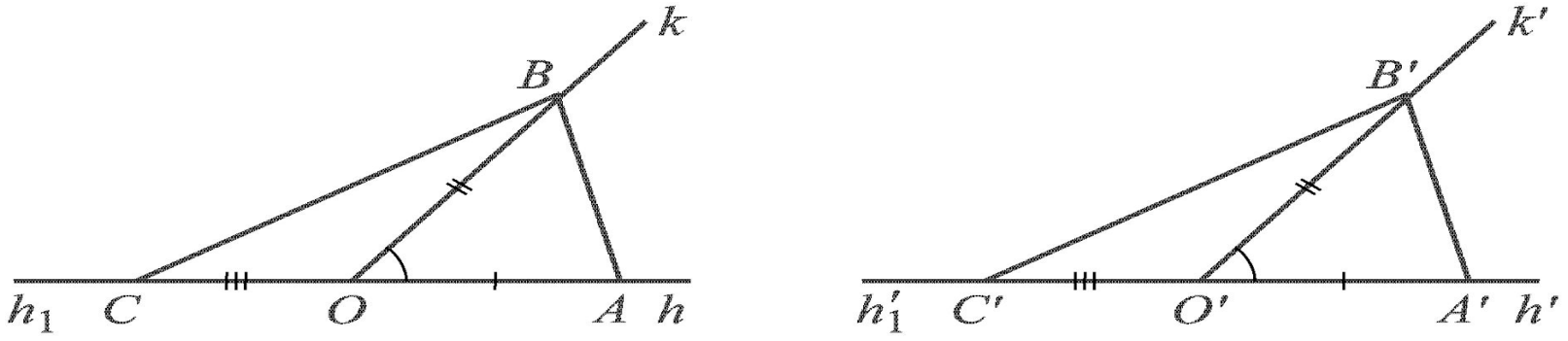

Рис. 25

Теорема 20. *Если два угла взаимно конгруэнтны, то смежные с ними углы также взаимно конгруэнтны.*

Доказательство. Пусть $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ (рис. 25); обозначим через h_1 — луч, дополняющий h до прямой, через h_1' — луч, дополняющий h'; вершины $\angle(h,k)$ и $\angle(h',k')$ обозначим через O и O'. Возьмем на лучах h, k и h_1 соответственно точки A, B и C. По аксиоме III.1 на лучах h', k' и h_1' найдутся точки A',B' и C' такие, что $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$ и $OC \equiv O'C'$. Отсюда по аксиоме III.3 $AC \equiv A'C'$; по аксиоме III.5 $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$ (или $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$), по теореме 14 $AB \equiv A'B'$. Так как $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ и $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ то, снова используя теорему 14, находим, что $BC \equiv B'C'$. Так как $OB \equiv O'B'$, $OC \equiv O'C'$ и $BC \equiv B'C'$, то по теореме 18 $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$, т. е. $\angle(k,h_1) \equiv \angle(k',h_1')$, что и требовалось.

Теорема 21. *Вертикальные углы конгруэнтны между собой.*

Теорема 22. *Все прямые углы конгруэнтны между собой.*

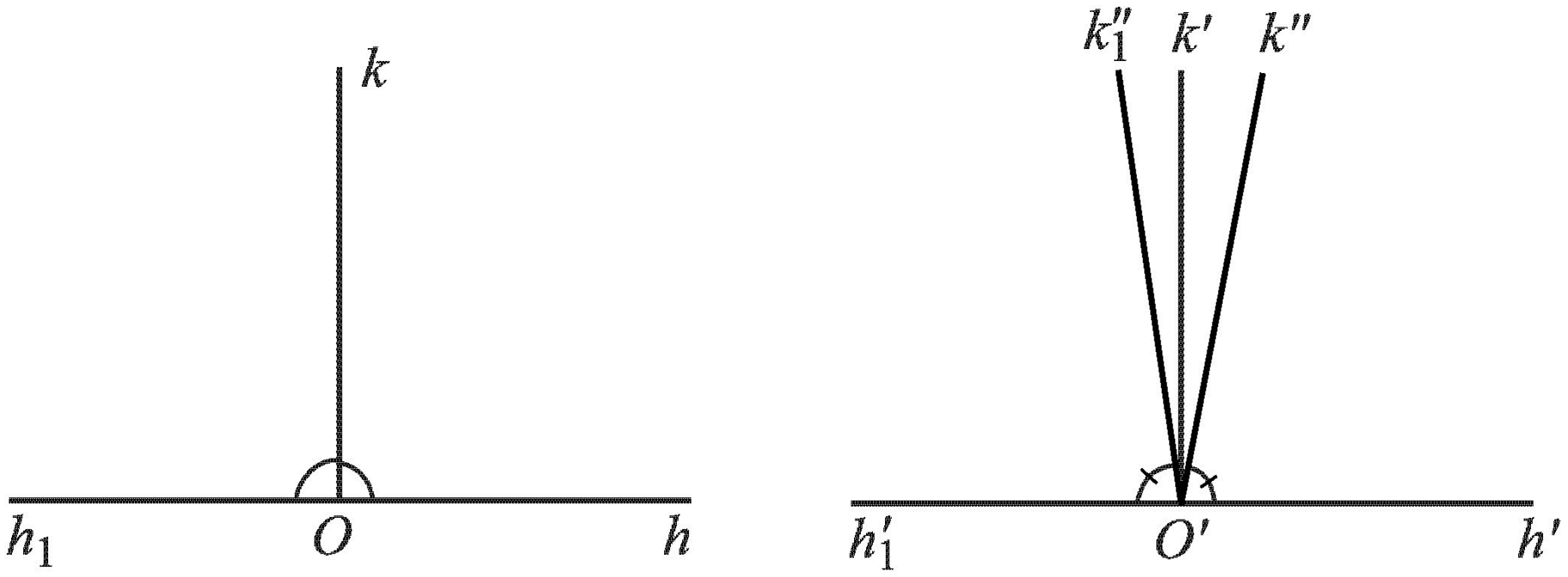

Рис. 26

Определение. Пусть A и B — различные точки; точку O будем называть *серединой отрезка* AB, если она лежит на прямой AB и удовлетворяет условию $AO \equiv OB$.

Теорема 23. *Для каждого отрезка существует единственная середина; середина отрезка является его внутренней точкой.*

Другими словами: *каждый отрезок можно разделить пополам, и притом единственным образом.*

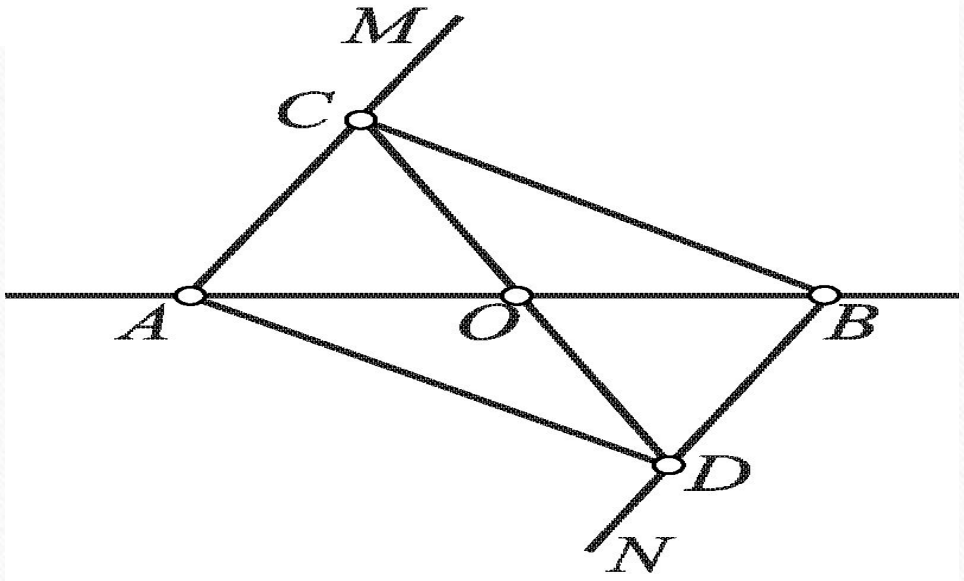

Рис. 27

Теорема 17 bis. *В равнобедренном треугольнике медиана основания есть в то же время высота и биссектриса угла при вершине.*

Теорема 24. *Каждый угол можно разделить пополам и притом единственным образом.*

Теорема 25. *Из любой точки можно опустить на данную прямую один и только один перпендикуляр.*

Теорема 26. *Из каждой точки на прямой можно восставить к этой прямой единственный перпендикуляр.*

Определение 10. Если даны два отрезка AB и $A'B'$ и внутри AB существует такая точка C, что

$$AC \equiv A'B',$$

то говорят, что *отрезок AB больше отрезка $A'B'$* или *отрезок $A'B'$ меньше отрезка AB*; пишут $AB > A'B'$ или $A'B' < AB$.

Определение 11. Если даны $\angle(h,k)$ и $\angle(h',k')$ и среди полупрямых, проходящих через вершину внутри $\angle(h,k)$, существует полупрямая l такая, что

$$\angle(h,l) \equiv \angle(h',k'),$$

то говорят, что $\angle(h,k)$ *больше* $\angle(h',k')$ или $\angle(h',k')$ *меньше* $\angle(h,k)$.

Теорема 27. *Для произвольных двух отрезков AB и CD всегда выполняется одно из трех соотношений*

$$AB \equiv CD, \quad AB > CD, \quad AB < CD,$$

причем каждое из них исключает два других.

Теорема 28. *Если* $AB < A'B'$ *и* $A'B' < A''B''$, *то* $AB < A''B''$.

Доказательство может быть получено очевидными рассуждениями при помощи теоремы 13 и теоремы 8 (или леммы 2).

Как следствие теоремы 28 отметим следующую теорему.

Теорема 29. *Если отрезок* CD *есть часть отрезка* AB, *то* $CD < AB$.

Теорема 30. *Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним.*

Теорема 31. *Во всяком треугольнике по крайней мере два угла острые.*

Теорема 32. *В треугольнике бóльшая сторона лежит против бóльшего угла, и обратно, бóльший угол лежит против бóльшей стороны.*

Теорема 33. *Перпендикуляр короче наклонной.*

Теорема 34. *Каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других его сторон.*

Теорема I. *Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, также лежащие на некоторой прямой.*

Теорема II. *Точки, лежащие на плоскости, при движении переходят в точки, также лежащие на некоторой плоскости.*

Теорема III. *Угол между двумя отрезками, соединяющими какую-нибудь точку множества с двумя другими его точками, конгруэнтен углу между соответствующими отрезками конгруэнтного множества.*

Теорема А. *Пусть M, N, P, Q — четыре точки некоторой фигуры Ω* (т. е. некоторого множества точек), *не лежащие в одной плоскости; M' — произвольная точка пространства; a — некоторая прямая, проходящая через M', и α — какая-нибудь плоскость, проходящая через прямую a. Тогда фигуру Ω можно движением переместить так, что точка M совместится с M', точка N расположится на прямой a с любой заранее указанной стороны от точки M'; точка P попадет на плоскость α с любой заранее указанной стороны от прямой a, а точка Q займет положение с любой заранее указанной стороны от плоскости α.*

Теорема Б. *Если три не лежащие на одной прямой точки M, N, P фигуры Ω совпадают с соответствующими точками M', N', P' конгруэнтной фигуры Ω', то возможны два случая:* 1) *каждая точка фигуры Ω совпадает с соответствующей точкой фигуры Ω';* 2) *каждая точка фигуры Ω, лежащая в плоскости MNP, совпадает с соответствующей точкой фигуры Ω', остальные же соответствующие точки этих фигур лежат по разные стороны от плоскости MNP, и каждая точка фигуры Ω' однозначно определена положением соответствующей точки фигуры Ω* (в последнем случае фигуры называются *симметричными* или *взаимно зеркальными* относительно плоскости MNP).

Теорема В. *Пусть M, N, P — три точки некоторой фигуры Ω, не лежащие на одной прямой, M' — произвольная точка плоскости, a — какая-нибудь прямая, проходящая через M'. Тогда фигуру Ω можно движением переместить так, что точка M совместится с M', точка N расположится на прямой a с любой заранее указанной стороны от точки M', а точка P займет положение с любой заранее указанной стороны от прямой a.*

Теорема Г. *Если две различные точки M и N фигуры Ω совпадают с соответствующими точками M' и N' конгруэнтной фигуры Ω', то возможны два случая:* 1) *каждая точка фигуры Ω совпадает с соответствующей точкой фигуры Ω',* 2) *каждая точка фигуры Ω, лежащая на прямой MN, совпадает с соответствующей точкой фигуры Ω', остальные же соответствующие точки этих фигур лежат по разные стороны от прямой MN, и каждая точка фигуры Ω' однозначно определена положением соответствующей точки фигуры Ω* (в последнем случае фигуры называются *симметричными* относительно прямой MN).

Теорема. *Произведение двух движений есть движение.*

Доказательство этой важной теоремы вполне очевидно. В самом деле, пусть произвольные точки M и N пространства первым из двух данных движений переводятся в точки M' и N', а эти точки в результате второго движения в свою очередь переходят в M'' и N''. Нужно показать, что отрезок MN конгруэнтен отрезку $M''N''$. Но по условию теоремы $MN = M'N'$ и $M'N' = M''N''$, откуда вследствие аксиомы III.2 и идущих за ней предложений имеем $MN \equiv M''N''$.