

## § 6. Следствия из аксиом I—III

**Теорема 13.** Пусть даны три точки  $A, B, C$  на прямой  $a$  и три точки  $A', B', C'$  на прямой  $a'$ . Пусть, далее,  $AB \equiv A'B'$  и  $AC \equiv A'C'$ . Тогда, если  $B$  лежит между  $A$  и  $C$ , а  $B'$  на прямой  $a'$  лежит с той же стороны от точки  $A'$ , что и  $C'$ , то  $B'$  лежит между  $A'$  и  $C'$ .

В отличие от теоремы 12 здесь заранее не предполагается конгруэнтность  $BC \equiv B'C'$ .

**Определение 8.** Треугольник  $ABC$  называется *конгруэнтным* треугольнику  $A'B'C'$ , если

$$\begin{aligned} AB &\equiv A'B', & AC &\equiv A'C', & BC &\equiv B'C', \\ \angle A &\equiv \angle A', & \angle B &\equiv \angle B', & \angle C &\equiv \angle C' \end{aligned}$$

(символическая запись:  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ).

**Т е о р е м а 14** (первая теорема о конгруэнтности треугольников).  
*Если для двух треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{и} \quad \angle A \equiv \angle A',$$

*то треугольник  $ABC$  конгруэнтен треугольнику  $A'B'C'$ .*

**Т е о р е м а 15** (вторая теорема о конгруэнтности треугольников).  
*Если для треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad \angle A \equiv \angle A', \quad \angle B \equiv \angle B',$$

*то треугольник  $ABC$  конгруэнтен треугольнику  $A'B'C'$ .*

**Теорема 16.** Пусть  $h, k, l$  и  $h', k', l'$  — лучи, исходящие соответственно из точек  $O$  и  $O'$ , и каждая из этих троек лучей расположена в одной плоскости. Пусть, далее, один из лучей  $h, k, l$  проходит внутри угла, образованного двумя другими, а соответствующий ему луч тройки  $h', k', l'$  (т.е. обозначенный той же буквой) так же расположен по отношению к двум другим лучам этой тройки. Тогда из

$$\angle(h, l) \equiv \angle(h', l') \text{ и } \angle(l, k) \equiv \angle(l', k')$$

следует

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

*Теорема 16а. Пусть в некоторой плоскости даны лучи  $h, k, l$  и  $h', k', l'$ , исходящие соответственно из точек  $O$  и  $O'$ . Пусть лучи  $k$  и  $l$  лежат по одну сторону от прямой, содержащей луч  $h$ , а лучи  $k'$  и  $l'$  аналогично расположены относительно  $h'$ . Тогда, если  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ ,  $\angle(h, l) \equiv \angle(h', l')$  и если луч  $k$  лежит внутри угла  $\angle(h, l)$ , то луч  $k'$  лежит внутри угла  $\angle(h', l')$ .*

*Теорема 17. Если в треугольнике  $ABC$  имеем  $AC \equiv CB$ , то  $\angle CAB \equiv \angle CBA$  и  $\angle CBA \equiv \angle CAB$ .*

*Доказательство.* Теорема следует из аксиомы III.5 в применении к треугольникам  $CAB$  и  $CBA$ .

Т е о р е м а 18 (третья теорема о конгруэнтности треугольников).  
 Если для треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  имеют место конгруэнтности

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$

то треугольник  $ABC$  конгруэнтен треугольнику  $A'B'C'$ .

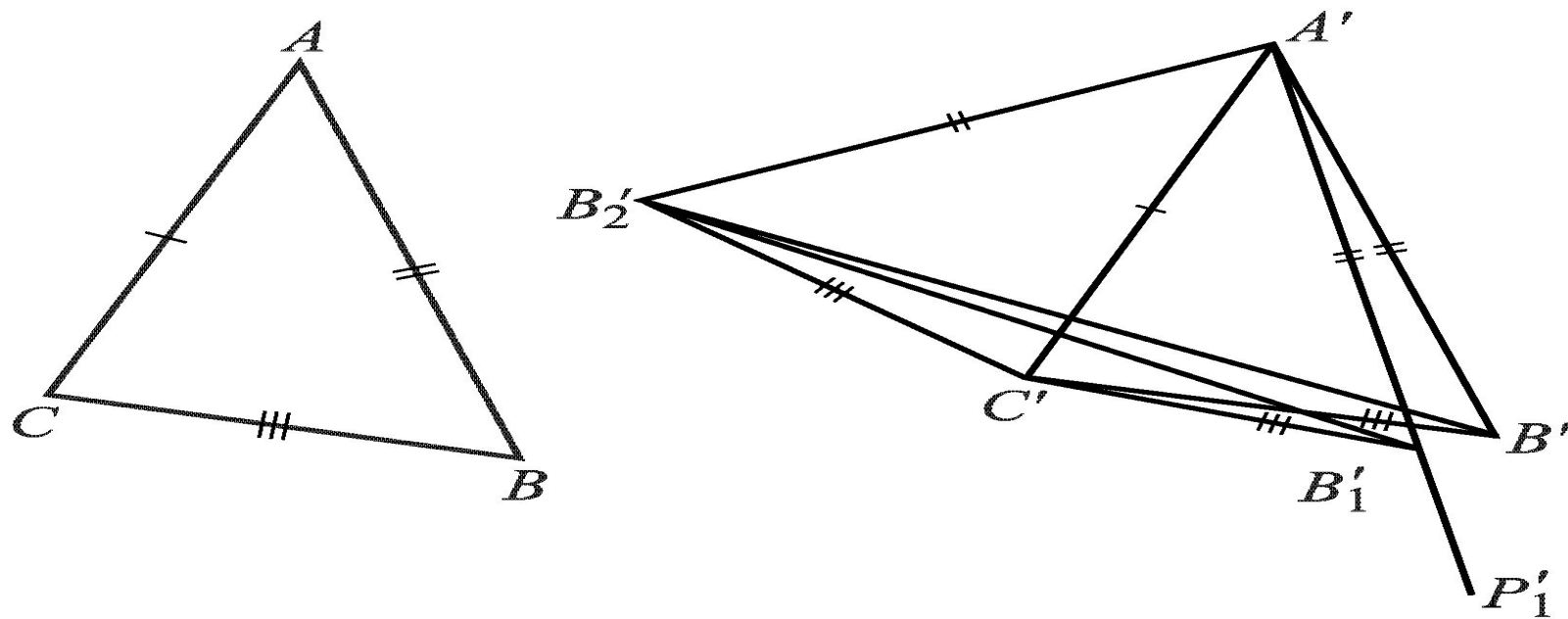


Рис. 24

**Теорема 19.** Если  $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$  и  $\angle(h,k) \equiv \angle(h'',k'')$ , то  $\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'')$ .

**Определение 9.** Два угла, у которых имеются общая вершина и одна общая сторона, а другие стороны которых составляют прямую линию, называются *смежными углами*. Два угла с общей вершиной, стороны которых попарно составляют прямые линии, называются *вертикальными углами*.

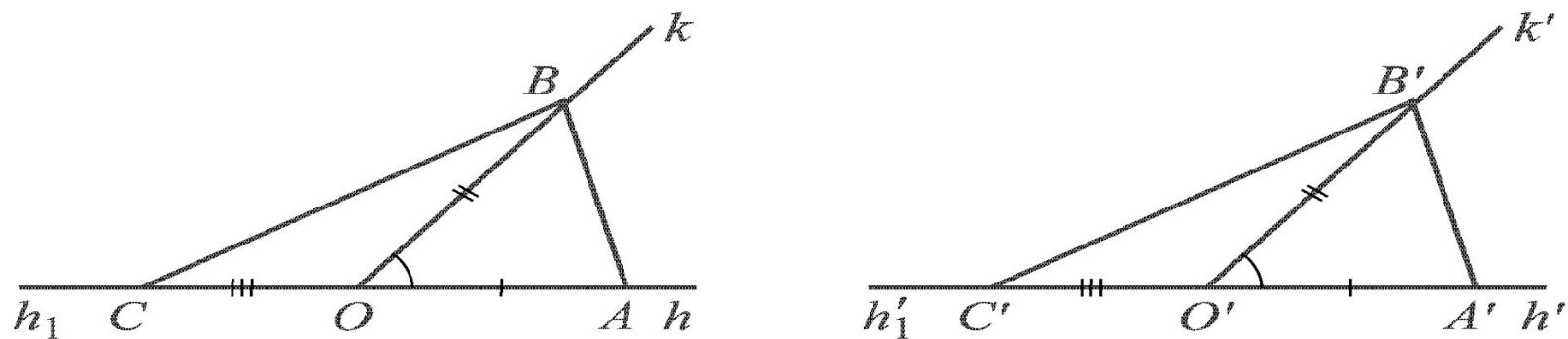


Рис. 25

**Т е о р е м а 20.** *Если два угла взаимно конгруэнтны, то смежные с ними углы также взаимно конгруэнтны.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Пусть  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$  (рис. 25); обозначим через  $h_1$  — луч, дополняющий  $h$  до прямой, через  $h'_1$  — луч, дополняющий  $h'$ ; вершины  $\angle(h, k)$  и  $\angle(h', k')$  обозначим через  $O$  и  $O'$ . Возьмем на лучах  $h$ ,  $k$  и  $h_1$  соответственно точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . По аксиоме III.1 на лучах  $h'$ ,  $k'$  и  $h'_1$  найдутся точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  такие, что  $OA \equiv O'A'$ ,  $OB \equiv O'B'$  и  $OC \equiv O'C'$ . Отсюда по аксиоме III.3  $AC \equiv A'C'$ ; по аксиоме III.5  $\angle OAB \equiv \angle O'A'B'$  (или  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ ), по теореме 14  $AB \equiv A'B'$ . Так как  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$  и  $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$  то, снова используя теорему 14, находим, что  $BC \equiv B'C'$ . Так как  $OB \equiv O'B'$ ,  $OC \equiv O'C'$  и  $BC \equiv B'C'$ , то по теореме 18  $\angle BOC \equiv \angle B'O'C'$ , т. е.  $\angle(k, h_1) \equiv \angle(k', h'_1)$ , что и требовалось.

Теорема 21. Вертикальные углы конгруэнтны между собой.

Теорема 22. Все прямые углы конгруэнтны между собой.

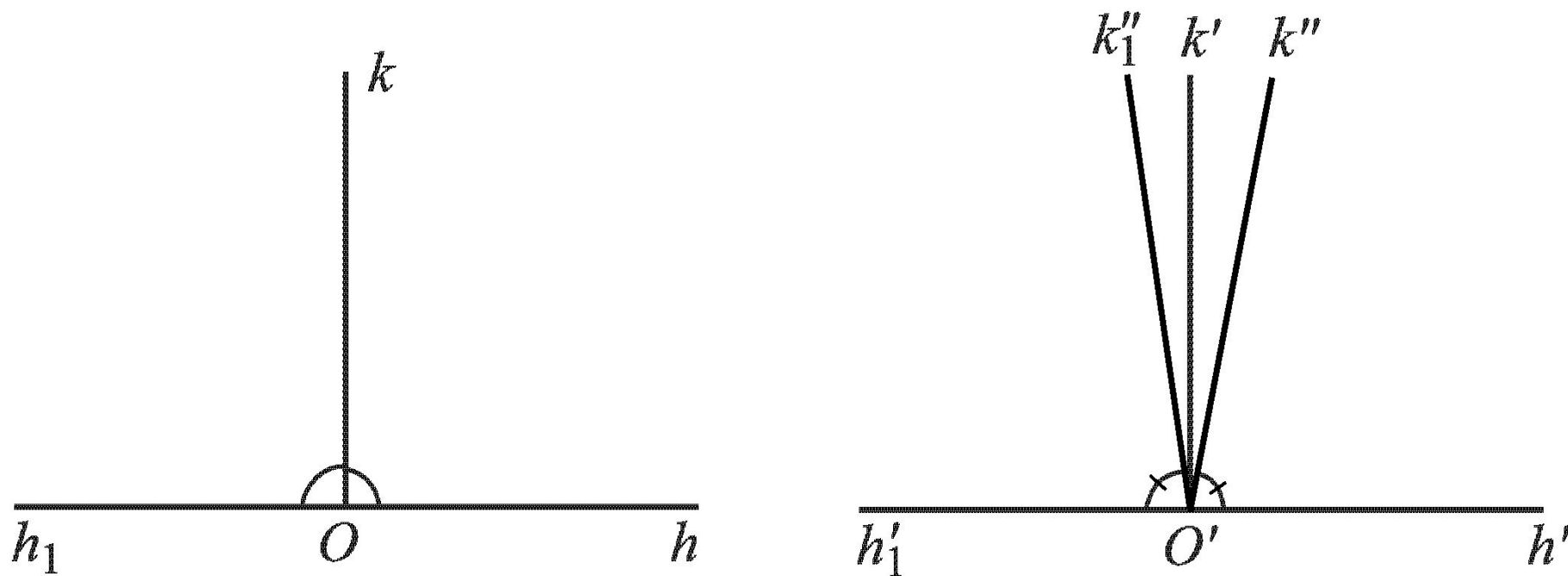
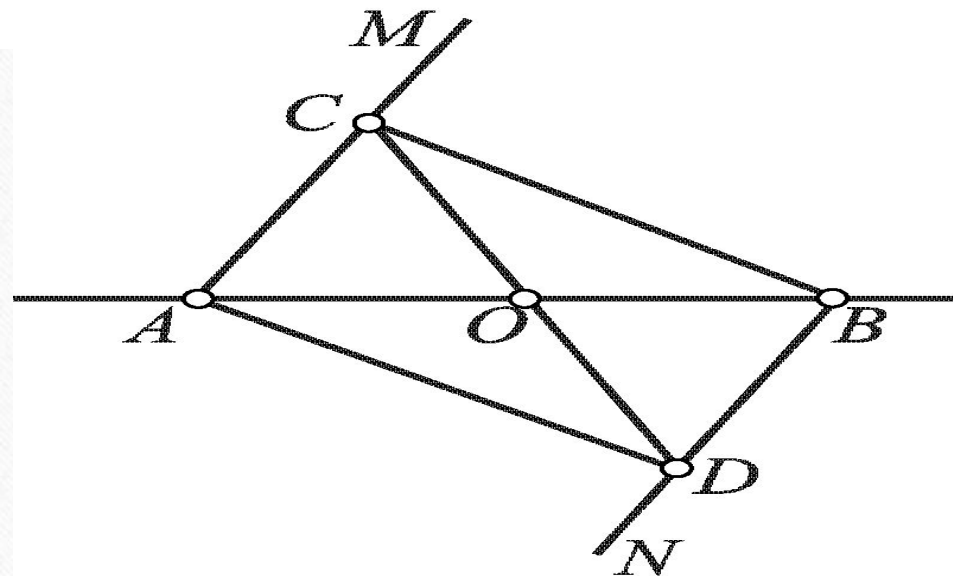


Рис. 26

**О п р е д е л е н и е .** Пусть  $A$  и  $B$  — различные точки; точку  $O$  будем называть *серединой отрезка  $AB$* , если она лежит на прямой  $AB$  и удовлетворяет условию  $AO \equiv OB$ .

**Т е о р е м а 23.** Для каждого отрезка существует единственная середина; середина отрезка является его внутренней точкой.

Другими словами: каждый отрезок можно разделить пополам, и притом единственным образом.



**Рис. 27**

*Теорема 17 bis. В равнобедренном треугольнике медиана основания есть в то же время высота и биссектриса угла при вершине.*

*Теорема 24. Каждый угол можно разделить пополам и притом единственным образом.*

*Теорема 25. Из любой точки можно опустить на данную прямую один и только один перпендикуляр.*

*Теорема 26. Из каждой точки на прямой можно восставить к этой прямой единственный перпендикуляр.*

О п р е д е л е н и е 10. Если даны два отрезка  $AB$  и  $A'B'$  и внутри  $AB$  существует такая точка  $C$ , что

$$AC \equiv A'B',$$

то говорят, что *отрезок  $AB$  больше отрезка  $A'B'$  или отрезок  $A'B'$  меньше отрезка  $AB$* ; пишут  $AB > A'B'$  или  $A'B' < AB$ .

О п р е д е л е н и е 11. Если даны  $\angle(h,k)$  и  $\angle(h',k')$  и среди полупрямых, проходящих через вершину внутри  $\angle(h,k)$ , существует полупрямая  $l$  такая, что

$$\angle(h,l) \equiv \angle(h',k'),$$

то говорят, что  $\angle(h,k)$  *больше*  $\angle(h',k')$  или  $\angle(h',k')$  *меньше*  $\angle(h,k)$ .

Т е о р е м а 27. Для произвольных двух отрезков  $AB$  и  $CD$  всегда выполняется одно из трех соотношений

$$AB \equiv CD, \quad AB > CD, \quad AB < CD,$$

причем каждое из них исключает два других.

*Теорема 28. Если  $AB < A'B'$  и  $A'B' < A''B''$ , то  $AB < A''B''$ .*

Доказательство может быть получено очевидными рассуждениями при помощи теоремы 13 и теоремы 8 (или леммы 2).

Как следствие теоремы 28 отметим следующую теорему.

*Теорема 29. Если отрезок  $CD$  есть часть отрезка  $AB$ , то  $CD < AB$ .*

*Теорема 30. Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, не смежного с ним.*

Т е о р е м а 31. Во всяком треугольнике по крайней мере два угла острые.

Т е о р е м а 32. В треугольнике бо́льшая сторона лежит против бо́льшего угла, и обратно, бо́льший угол лежит против бо́льшей стороны.

Т е о р е м а 33. Перпендикуляр короче наклонной.

Т е о р е м а 34. Каждая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других его сторон.

*Т е о р е м а I. Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, также лежащие на некоторой прямой.*

*Т е о р е м а II. Точки, лежащие на плоскости, при движении переходят в точки, также лежащие на некоторой плоскости.*

*Т е о р е м а III. Угол между двумя отрезками, соединяющими какую-нибудь точку множества с двумя другими его точками, конгруэнтен углу между соответствующими отрезками конгруэнтного множества.*

*Теорема А. Пусть  $M, N, P, Q$  — четыре точки некоторой фигуры  $\Omega$  (т.е. некоторого множества точек), не лежащие в одной плоскости;  $M'$  — произвольная точка пространства;  $a$  — некоторая прямая, проходящая через  $M'$ , и  $\alpha$  — какая-нибудь плоскость, проходящая через прямую  $a$ . Тогда фигуру  $\Omega$  можно движением переместить так, что точка  $M$  совместится с  $M'$ , точка  $N$  расположится на прямой  $a$  с любой заранее указанной стороны от точки  $M'$ ; точка  $P$  попадет на плоскость  $\alpha$  с любой заранее указанной стороны от прямой  $a$ , а точка  $Q$  займет положение с любой заранее указанной стороны от плоскости  $\alpha$ .*

*Теорема Б. Если три не лежащие на одной прямой точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  фигуры  $\Omega$  совпадают с соответствующими точками  $M'$ ,  $N'$ ,  $P'$  конгруэнтной фигуры  $\Omega'$ , то возможны два случая: 1) каждая точка фигуры  $\Omega$  совпадает с соответствующей точкой фигуры  $\Omega'$ ; 2) каждая точка фигуры  $\Omega$ , лежащая в плоскости  $MNP$ , совпадает с соответствующей точкой фигуры  $\Omega'$ , остальные же соответствующие точки этих фигур лежат по разные стороны от плоскости  $MNP$ , и каждая точка фигуры  $\Omega'$  однозначно определена положением соответствующей точки фигуры  $\Omega$  (в последнем случае фигуры называются симметричными или взаимно зеркальными относительно плоскости  $MNP$ ).*

**Теорема В.** Пусть  $M, N, P$  — три точки некоторой фигуры  $\Omega$ , не лежащие на одной прямой,  $M'$  — произвольная точка плоскости,  $a$  — какая-нибудь прямая, проходящая через  $M'$ . Тогда фигуру  $\Omega$  можно движением переместить так, что точка  $M$  совместится с  $M'$ , точка  $N$  расположится на прямой  $a$  с любой заранее указанной стороны от точки  $M'$ , а точка  $P$  займет положение с любой заранее указанной стороны от прямой  $a$ .

*Теорема Г. Если две различные точки  $M$  и  $N$  фигуры  $\Omega$  совпадают с соответствующими точками  $M'$  и  $N'$  конгруэнтной фигуры  $\Omega'$ , то возможны два случая: 1) каждая точка фигуры  $\Omega$  совпадает с соответствующей точкой фигуры  $\Omega'$ , 2) каждая точка фигуры  $\Omega$ , лежащая на прямой  $MN$ , совпадает с соответствующей точкой фигуры  $\Omega'$ , остальные же соответствующие точки этих фигур лежат по разные стороны от прямой  $MN$ , и каждая точка фигуры  $\Omega'$  однозначно определена положением соответствующей точки фигуры  $\Omega$  (в последнем случае фигуры называются симметричными относительно прямой  $MN$ ).*

*Т е о р е м а . Произведение двух движений есть движение.*

Доказательство этой важной теоремы вполне очевидно. В самом деле, пусть произвольные точки  $M$  и  $N$  пространства первым из двух данных движений переводятся в точки  $M'$  и  $N'$ , а эти точки в результате второго движения в свою очередь переходят в  $M''$  и  $N''$ . Нужно показать, что отрезок  $MN$  конгруэнтен отрезку  $M''N''$ . Но по условию теоремы  $MN = M'N'$  и  $M'N' = M''N''$ , откуда вследствие аксиомы III.2 и идущих за ней предложений имеем  $MN \equiv M''N''$ .