# Пояснения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

$$k^2 + \omega_0^2 = 0.$$

$$k = \pm i\omega_0$$

$$x \sim e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega t} - \cos\omega_0 t$$

$$x \sim e^{+i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t} - \sin\omega_0 t$$

Решением (1) является

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

$$x = x_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \Big| \times \dot{x}$$

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x} x = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) + \omega_0^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0 \quad \Big| \times m$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \omega_0^2 m \frac{x^2}{2}\right)}_{E\text{ - полн. энергия осциллятора}} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = const$$

$F_{тр} \sim \dot{x}$ $\qquad F(\dot{x})\Big|_{\dot{x}=0} = 0$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -F(\dot{x})$

пусть $F(\dot{x}) = 2\gamma\dot{x}$

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$ (2)

$k^2 + 2\gamma k + \omega_0^2 = 0.$

$k_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$

$x = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (2) $\Big| \cdot \dot{x}$

$\frac{dE}{dt} = -2m\gamma(\dot{x})^2$

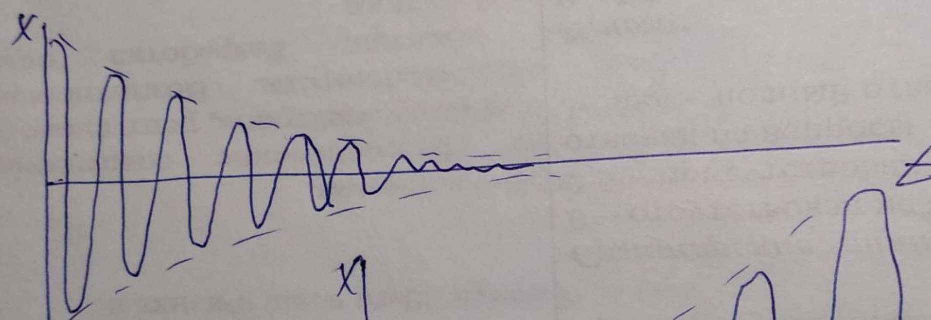
$E(t_2) - E(t_1) = -2m\gamma \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}^2 dt$

Если $\gamma < \omega_0$, то решение (x)

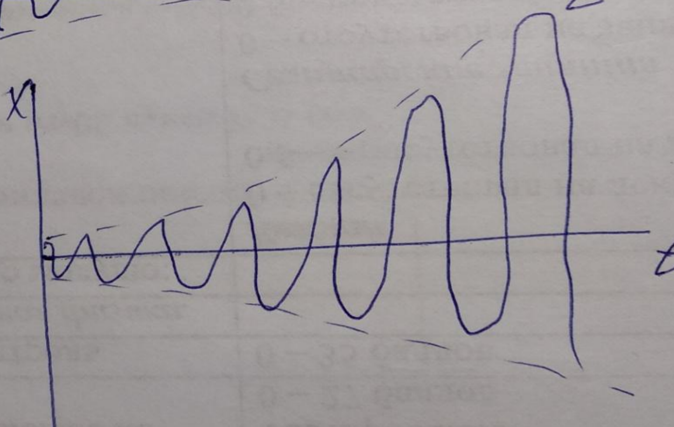
$$x = C_1 e^{-\gamma t}\left(e^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t} + \frac{C_2}{C_1} e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t}\right)$$

или

$$x = A e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t + \varphi_0\right)$$




в неравновесных средах




$$x = A e^{\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t + \varphi_0\right)$$

$$x'' + \omega_0^2 x = F, \quad F = const$$

$$x = y + \frac{F}{\omega_0^2}$$

$$y'' + \omega_0^2 y + \cancel{\omega_0^2} \frac{\cancel{F}}{\cancel{\omega_0^2}} = \cancel{F}$$

$$y'' + \omega_0^2 y = 0.$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F\cos\omega t \quad , \ \omega \neq \omega_0 \qquad (1)$$

$$x = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t + \rho\cos\omega t \qquad (2)$$

$$x\big|_{t=0} = 0 \quad , \quad \dot{x}\big|_{t=0} = 0 \qquad (3)$$

продифференцируем (2) $\rightarrow$ в (3)

$$\begin{cases} x(0) = B + \rho \\ \dot{x}(0) = A\omega_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B + \rho = 0 \\ A\omega_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$A = 0, \quad B = -\rho.$$

(2) примет вид:

$$x(t) = -\rho\cos\omega_0 t + \rho\cos\omega t \qquad (4)$$

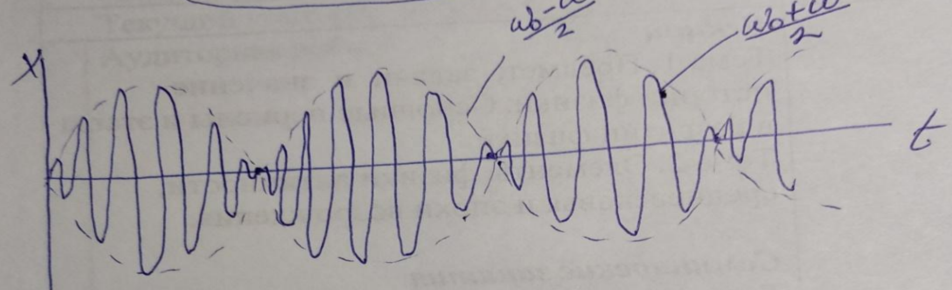
$$(4) \rightarrow (1)$$

$$\rho\omega_0^2\cos\omega_0 t - \rho\omega^2\cos\omega t - \rho\omega_0^2\cos\omega_0 t + \rho\omega_0^2\cos\omega t = F\cos\omega t$$

$$\rho = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (5)$$

$$x(t) = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega t) \qquad (6)$$

$$x(t) = \frac{2F}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\frac{\omega_0-\omega}{2}t\,\sin\frac{\omega_0+\omega}{2}t \quad (7)$$




биения

(1) $\cdot\ \dot{x}$

$$(\ddot{x} + \omega_0^2 x)\dot{x} = \dot{x}F\cos\omega t$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}F\cos\omega t$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dE = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}F\cos\omega t\,dt$$

изменение энергии осциллятора за $(t_2-t_1)$

работа внешних сил за $(t_2-t_1)$

## Вынужденные колебания в системе с трением

1) $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = F, \quad F = const$

$$x = \frac{1}{2\delta} y + \frac{F}{\omega_0^2}$$

$$\frac{1}{2\delta} \ddot{y} + \cancel{2\delta} \frac{1}{\cancel{2\delta}} \dot{y} + \omega_0^2 \frac{1}{2\delta} y + \cancel{\omega_0^2} \frac{\cancel{F}}{\cancel{\omega_0^2}} = \cancel{F}$$

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = 0.$$

2) $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F\cos\omega t, \quad \omega_0 \neq \omega$ (1)

$x \longrightarrow \bar{x}$

$\mathrm{Re}\,\bar{x} = x$

$\bar{x} = \bar{x}_0 e^{i\varphi} = \bar{x}_0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\mathrm{Re}\,\bar{x} = \bar{x}_0\cos\varphi$

(1) принимает вид:

$$\ddot{\bar{x}} + 2\gamma\dot{\bar{x}} + \omega_0^2\bar{x} = Fe^{i\omega t} \quad (2)$$

решение (2) ищем в виде правой части:

$\bar{x} = \bar{x}_0 e^{i\omega t}$

$$\bar{x}_0(-\omega^2)\cancel{e^{i\omega t}} + 2\gamma\bar{x}_0 i\omega\cancel{e^{i\omega t}} + \omega_0^2\bar{x}_0\cancel{e^{i\omega t}} = F\cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\bar{x}_0\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega\right] = F$$

$$\bar{x}_0 = \frac{F}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega}$$

$\Big|\cdot$ на комплекс сопряж. знамен.

$$\bar{x}_0 = \frac{F(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

$$\bar{x}_0 = \underbrace{\frac{F(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}_{a} + i\underbrace{\left(-\frac{2\gamma\omega F}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\right)}_{b}$$

$$\bar{x}_0 = a + ib$$

$$\bar{x}_0 = \rho e^{i\varphi}, \text{ где } \rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Тогда

$$\bar{x} = \bar{x}_0 \cdot e^{i\omega t} =$$

$$= \rho e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = \rho e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$\rho = \frac{F}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}$$