Семинар 1

доцент Волков Н.П.

Занятие 1

Линейные операции над векторами. Линейная зависимость системы векторов, разложение по базису.

Определение 1 Операции сложения векторов и умножения их на число из $\mathbb{R}$ называются линейными операциями.

Определение 2 1) Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$, где A - начало вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, а C - конец вектора $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, т.е. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (метод треугольника).

2) Произведением числа $\lambda\in\mathbb{R}$ на вектор $\vec{a}$ называется вектор $\vec{c}$: $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, а также $\vec{c}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\lambda>0$ и $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\lambda<0$.

Определение 3 Система векторов $\{\vec{a}_j\}_{j=1}^n$ называется

1) линейно зависимой, если $\exists\{\lambda_j\}_{j=1}^n\subset\mathbb{R}$: $\sum\limits_{j=1}^n|\lambda_j|\neq0$, а $\sum\limits_{j=1}^n\lambda_j\vec{a}_j=\vec{0}$ (*)

2) линейно независимой, если равенство (*) выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_j=0$ $\forall j=\overline{1,n}$.

Определение 4 Система векторов $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n\subset V$ называется базисом, если

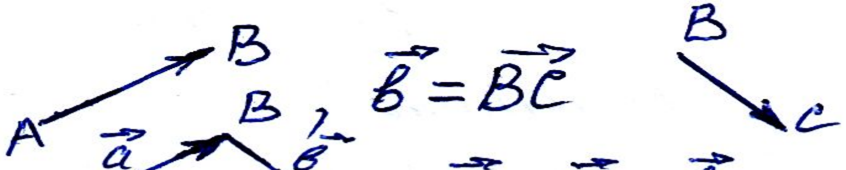
1) $\vec{e}_j\in V$ $\forall j=\overline{1,n}$

2) $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ - линейно независимая система

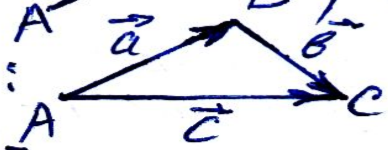
3) $\forall\vec{b}\in V$ $\exists$ числа $\{\beta_j\}_{j=1}^n\subset\mathbb{R}$: $\vec{b}=\beta_1\vec{e}_1+\ldots+\beta_n\vec{e}_n$ (**)

Равенство (**) называется разложением вектора $\vec{b}$ по базису $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$.

761 1) $\vec a + \vec b$

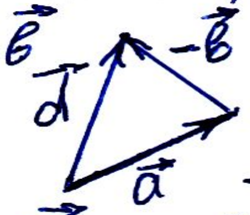
Пусть $\vec a = \vec{AB}$  , $\vec b = \vec{BC}$

тогда $\vec c = \vec{AC}$:

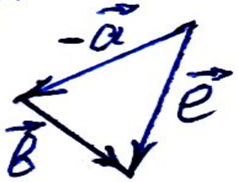


$\vec c = \vec a + \vec b$

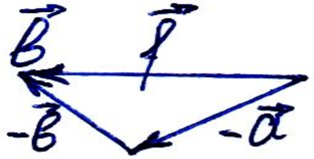
2) $\vec d = \vec a - \vec b$



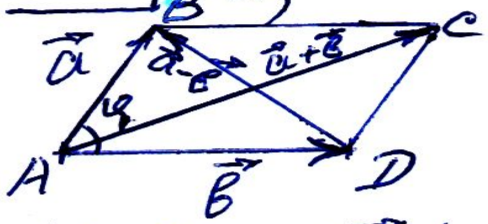
3) $\vec e = \vec b - \vec a$



4) $\vec f = -\vec a - \vec b$



765 $\vec a, \vec b$: $|\vec a| = 5$, $|\vec b| = 8$, $\varphi = (\widehat{\vec a, \vec b}) = 60^\circ$



$|\vec a + \vec b| = ?$

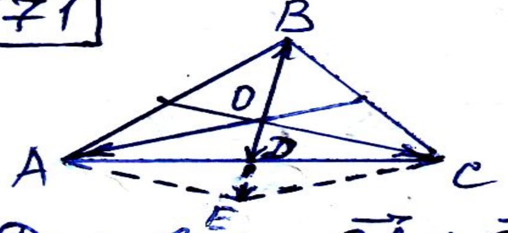
$|\vec a - \vec b| = ?$

$$|\vec a + \vec b| = |\vec{AC}| = \sqrt{|\vec a|^2 + |\vec b|^2 - 2|\vec a|\cdot|\vec b|\cos(\pi - \varphi)} =$$

$$= \sqrt{25 + 64 - 80\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{89 + 80\cdot\frac{1}{2}} = \boxed{\sqrt{129}}$$

$$|\vec a - \vec b| = |\vec{DB}| = \sqrt{|\vec a|^2 + |\vec b|^2 - 2|\vec a|\cdot|\vec b|\cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{25 + 64 - 80\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{89 - 80\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = \boxed{7}$$

771) 

O - центр тяжести (точка пересечения медиан треугольника ABC)

$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC} \stackrel{?}{=} \vec{0}$

Док-во: $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OE}$

$\vec{OE}=2\vec{OD}$, $\vec{OD}=-\frac{1}{2}OB \Rightarrow \vec{OE}=2(-\frac{1}{2}\vec{OB})=$
$=-\vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{OA}+\vec{OC}=-\vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{OA}+\vec{OC}+\vec{OB}=\vec{0}$

775) $\vec{a}=\{3;-2;6\}$, $\vec{b}=\{-2;1;0\}$

Решение $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+0\cdot\vec{k}$

1) $\vec{a}+\vec{b}=\{1;-1;6\}=\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k}$
2) $\vec{a}-\vec{b}=\{5;-3;6\}=5\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$
3) $2\vec{a}=\{6;-4;12\}=6\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$
4) $-\frac{1}{2}\vec{b}=\{1;-\frac{1}{2};0\}=\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}+0\cdot\vec{k}$
5) $2\vec{a}+3\vec{b}=\{6;-4;12\}+\{-6;3;0\}=0\cdot\vec{i}-\vec{j}+12\vec{k}$
6) $\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}=\{1;-\frac{2}{3};2\}+\{2;-1;0\}=3\vec{i}-\frac{5}{3}\vec{j}+2\vec{k}$

781) $\vec{a}=\{3;4;-12\}$ $\vec{e}_{\vec{a}}=?$

Решение: $\vec{e}_{\vec{a}}$: $\vec{e}_{\vec{a}}\uparrow\uparrow\vec{a}$, $|\vec{e}_{\vec{a}}|=1$

$|\vec{a}|=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$

$$\boxed{\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left\{\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right\}}$$

783) $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$, $\vec{d} \uparrow\downarrow \vec{c}$,
$|\vec{d}| = 75$

Решение: Из $\vec{d} \uparrow\downarrow \vec{c} \Rightarrow \vec{d} = x\vec{c}$
причем $x < 0$

$\Rightarrow \vec{d} = 16x\vec{i} - 15x\vec{j} + 12x\vec{k}$

$\Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(16x)^2 + (-15x)^2 + (12x)^2} = |x|\sqrt{625} =$
$= 25|x|$

$25|x| = 75 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$

Из $x < 0 \Rightarrow x = -3$

$\Rightarrow \boxed{\vec{d} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}}$

787) $\vec{p} = \{2; -3\}$, $\vec{q} = \{1; 2\}$
$\vec{a} = \{9; 4\}$

Решение

$\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 9 & \Big| \cdot (-2) \; + \\ -3x + 2y = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow -7x = -14 \Rightarrow x = 2$

$y = 5$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}}$

791) $A(1;-2)$, $B(2;1)$, $C(3;2)$, $D(-2;3)$

$\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ - базис

Решение

$\vec{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A\} = \{1, 3\}$

$\vec{AC} = \{x_C - x_A, y_C - y_A\} = \{2; 4\}$

$\vec{AD} = \{-3; 5\}$; $\vec{BD} = \{-4; 2\}$; $\vec{CD} = \{-5; 1\}$

$\vec{AD} = x_1\vec{AB} + y_1\vec{AC}$

$\begin{cases} x_1 + 2y_1 = -3 \\ 3x_1 + 4y_1 = 5 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2y_1 = 14 \Rightarrow y_1 = -7 \\ x_1 = 11 \end{matrix}$

$\boxed{\vec{AD} = 11\vec{AB} - 7\vec{AC}}$

$\vec{BD} = x_2\vec{AB} + y_2\vec{AC}$

$\begin{cases} x_2 + 2y_2 = -4 \\ 3x_2 + 4y_2 = 2 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 10 \\ y_2 = -7 \end{matrix}$

$\boxed{\vec{BD} = 10\vec{AB} - 7\vec{AC}}$

$\vec{CD} = x_3\vec{AB} + y_3\vec{AC}$

$\begin{cases} x_3 + 2y_3 = -5 \\ 3x_3 + 4y_3 = 1 \end{cases} \Big| \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 11 \\ y_3 = -8 \end{matrix}$

$\boxed{\vec{CD} = 11\vec{AB} - 8\vec{AC}}$

$\vec{AD} + \vec{BD} + \vec{CD} = (11+10+11)\vec{AB} + (-7-7-8)\vec{AC} =$

$= \boxed{32\vec{AB} - 22\vec{AC}}$

Вычисление определителей $2^{ого}$ и $3^{ьего}$ порядков

Определение 5 1) Число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{def}{=} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем второго порядка.

2) Число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ называется определителем третьего порядка.

1204) 1) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 20 = 18$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$

5) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 = 0$

7) $\begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & ab-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a(a+1) & a(b-c) \end{vmatrix} =$

$= (a+1)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 0$

1205 Решить уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$8 - x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 12}$

3) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

$x(x+1) + 4(x+1) = 0 \quad (x+1)(x+4) = 0$

$\boxed{x_1 = -1, \; x_2 = -4}$

1211 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$= 3(-2-0) + 2(4-6) + (0-2) = -6-4-2 = \boxed{-12}$

1213 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 0 + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 2(30+16) - 5 = \boxed{87}$

1215 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -30 + 1 = \boxed{-29}$

К. – Клетеник Д. В. „Сборник задач по аналитической геометрии"

Дома: К. 762, 764, 768, 774, 776, 782, 784, 784, 788, 794; 1204(чётн.), 1205(2,4), 1212, 1214, 1216.