

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

*Оптимальной среди систем данного класса называют ту систему, для которой показатель ее качества имеет экстремальное значение (минимум или максимум в зависимости от смысла показателя). Выбранный показатель качества называют, как говорилось выше, критерием оптимальности.*

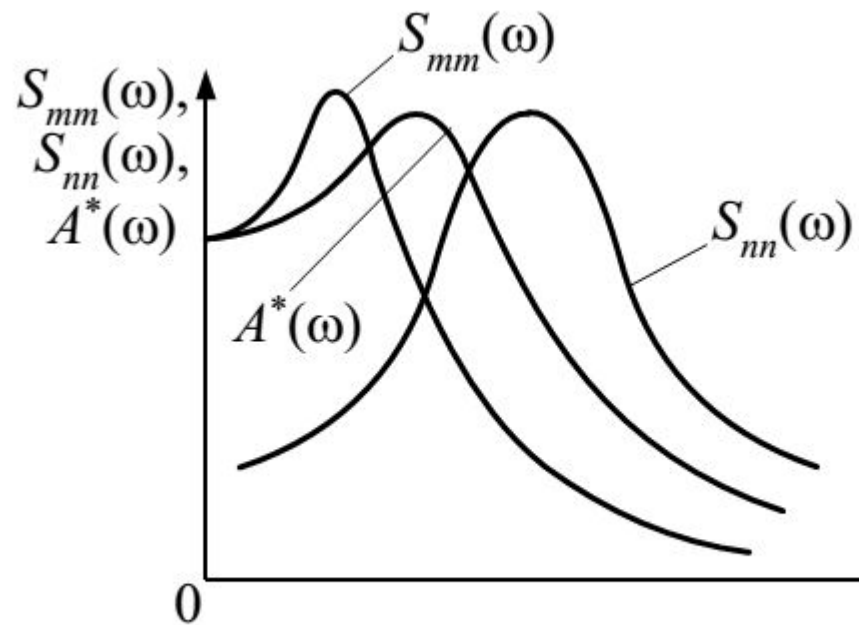
*Рассмотрим случай, когда заданы структура системы и статистические характеристики входных сигналов. Требуется найти такие значения параметров системы, при которых обеспечивается экстремум критерия оптимальности. Эти значения параметров называют оптимальными параметрами системы.*

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Такая задача широко распространена на практике, так как структура системы часто выбирается, исходя из ее функционального назначения. Можно специально вводить корректирующие звенья с изменяемыми параметрами [125].

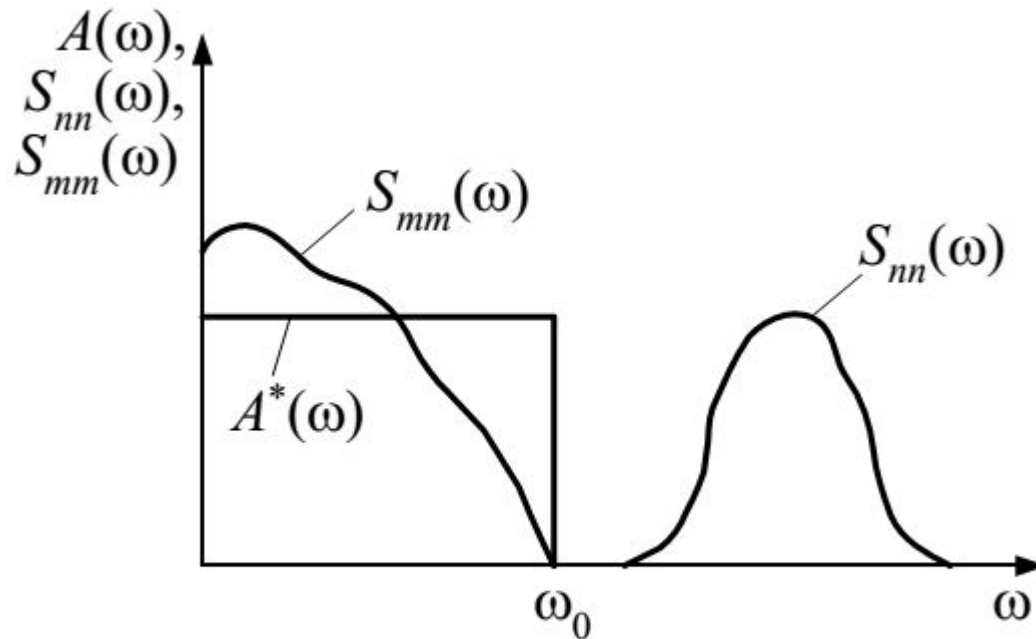
Перейдем к рассмотрению задачи. Ясно, что ошибка системы состоит из двух составляющих. Одна из них вызвана тем, что система не может абсолютно точно воспроизводить полезный сигнал  $m(t)$ , а другая — реакцией на помеху  $n(t)$ . Стремление уменьшить первую составляющую приводит к увеличению второй составляющей ошибки и наоборот. *Задача синтеза состоит в том, чтобы обеспечить минимально возможную сумму обеих составляющих при заданной структуре системы (рис. 3.1).*

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация



**Рис. 3.1.** К задаче нахождения оптимальной ПФ системы

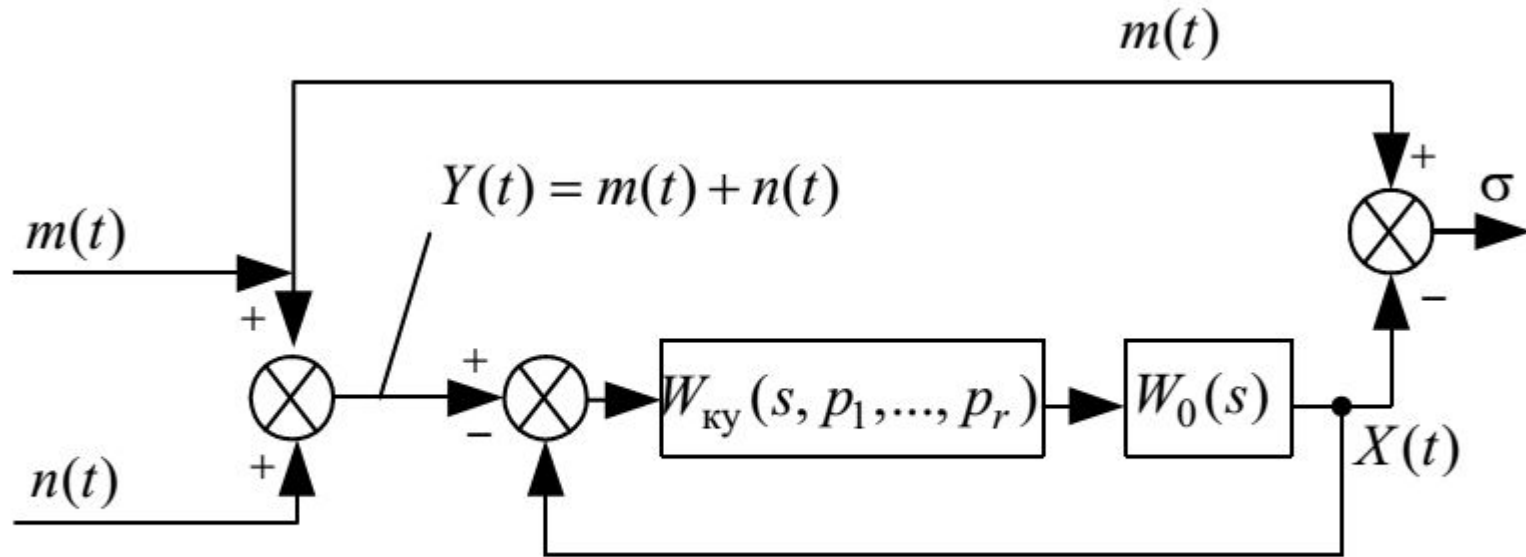
# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация



**Рис. 3.2.** К иллюстрации задачи фильтрации

Наиболее простым является случай, когда полезный сигнал имеет более низкочастотный спектр, чем помеха (рис. 3.2).

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация



**Рис. 3.3.** К постановке задачи фильтрации

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда спектры  $S_{mm}(\omega)$  и  $S_{nn}(\omega)$  перекрываются.

Пусть в структуру системы (рис. 3.3) введено корректирующее устройство с ПФ  $W_{\text{кy}}(s, p)$ , причем параметры  $p_1, p_2, \dots, p_r$  могут меняться. Для простоты положим, что параметры остальной части системы фиксированы; эта часть имеет ПФ  $W_0(s)$ .

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Тогда ПФ замкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{W_{\text{кy}}(s, p)W_0(s)}{1 + W_{\text{кy}}(s, p)W_0(s)} = W(s, p). \quad (3.1)$$

Запишем выражение для СКО в предположении, что полезный сигнал  $m(t)$  и помеха  $n(t)$  не коррелированы, а  $S_{mm}(\omega)$  и  $S_{nn}(\omega)$  — дробно-рациональные функции частоты  $\omega$ , и, следовательно, СП можно факторизовать:

$$\begin{aligned} S_{mm}(\omega) &= S_{mm}^+(j\omega)S_{mm}^-(j\omega) = S_{mm}(j\omega)S_{mm}(-j\omega); \\ S_{nn}(\omega) &= S_{nn}^+(j\omega)S_{nn}^-(j\omega) = S_{nn}(j\omega)S_{nn}(-j\omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Справедлива зависимость

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |1 - W(s, p)|^2 \Big|_{s=j\omega} S_{mm}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} |W(s, p)|^2 \Big|_{s=j\omega} S_{nn}(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - W(s, p))(1 - W(-j\omega, p)) S_{mm}(j\omega) S_{mm}(-j\omega) d\omega + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega, p) W(-j\omega, p) S_{nn}(j\omega) S_{nn}(-j\omega) d\omega = \\ &= 2\pi I_n^1(p_1, \dots, p_r) + 2\pi I_n^2(p_1, \dots, p_r) = \bar{\sigma}^2(p_1, p_2, \dots, p_r).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Таким образом,  $\bar{\sigma}^2(p_1, p_2, \dots, p_r)$  является функцией параметров  $p_1, p_2, \dots, p_r$

Оптимальной системе соответствуют такие значения  $p_1^*, \dots, p_r^*$ , при которых  $\bar{\sigma}^2$  достигает минимума.

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Предположим, что минимум выпуклой функции  $\bar{\sigma}^2$  существует и единственен, а ограничения на параметры отсутствуют. Тогда условие минимума находится приравниванием частных производных от  $\bar{\sigma}^2$  по  $p_v$  к нулю, т.е.

$$\frac{d\bar{\sigma}^2(p_1, p_2, \dots, p_r)}{dp_v} = 0; \quad v = \overline{1, r}. \quad (3.4)$$

Введем векторные обозначения:  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)^T$  — вектор-столбец параметров;  $\nabla \bar{\sigma}^2(\mathbf{p})$  — градиент вектор-столбец частных производных:

$$\nabla \bar{\sigma}^2(\mathbf{p}) = \text{grad } \bar{\sigma}^2(\mathbf{p}) = \left( \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p_1}, \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p_r} \right)^T.$$

Тогда систему уравнений (3.4) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\nabla \bar{\sigma}^2(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.5)$$

Решение этого уравнения и определяет оптимальный вектор параметров

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_r^*)^T.$$



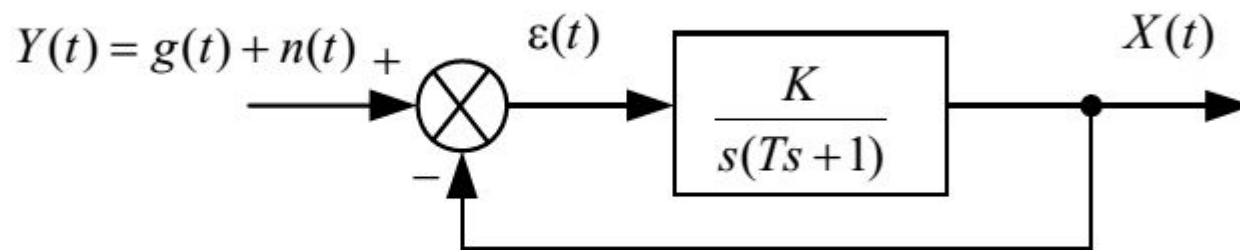
# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Для решения системы (3.5) наиболее часто используют численные методы; кроме того, для нахождения  $\min \bar{\sigma}^2(\mathbf{p})$  можно применять методы оптимизации.

Если на параметры системы наложены ограничения, то для решения задачи оптимизации необходимо использовать аппарат нелинейного программирования.

Фильтр с заданной структурой.  
Параметрическая оптимизация.  
Пример 3.1

**Пример 3.1.** Рассмотрим систему, изображенную на рис. 3.4.



**Рис. 3.4.** Структурная схема системы

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация. Пример 3.1

На вход системы поступает аддитивная смесь полезного сигнала  $m(t)$  и помехи  $n(t)$ , причем

$$S_{mm}(\omega) = \frac{2D_{mm}\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}; \quad S_{nn}(\omega) = S_0.$$

Между помехой и полезным сигналом отсутствует корреляция.

Исходные данные:  $T_1 = 0,1$  с;  $D_{mm} = 100$  град<sup>2</sup>;  $S_0 = 0,01$  град<sup>2</sup>/Гц.

Необходимо определить оптимальное значение коэффициента усиления  $K^*$ , соответствующее минимуму СКО.

# Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация. Пример 3.1

Необходимо определить оптимальное значение коэффициента усиления  $K^*$ , соответствующее минимуму СКО.

Имеем зависимость, определяющую СКО через параметры системы:

$$\bar{\sigma}^2(K) = \frac{2D_{mm}\alpha(1 + \alpha T + KT)}{K + \alpha + \alpha^2 T^2} + \pi S_0 K.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^2(K)}{\partial K} = \frac{2D_{mm}\alpha T(1 + \alpha + \alpha^2 T^2) - 2D_{mm}\alpha(1 + \alpha T + KT)}{K + \alpha + \alpha^2 T^2} + \pi\sqrt{S_0} = 0.$$

Отсюда находим

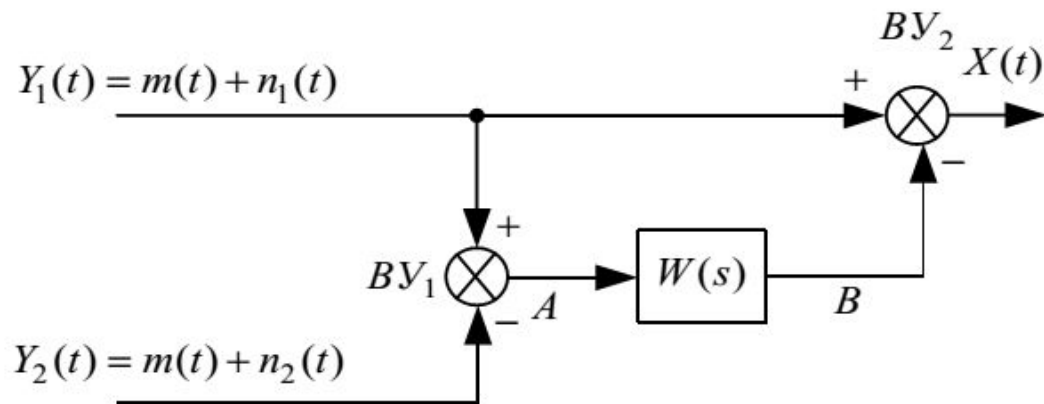
$$2D_{mm}\alpha T(K + \alpha + \alpha^2 T^2) - 2D_{mm}\alpha(1 + \alpha T + KT) = -\pi S_0 (K + \alpha + \alpha^2 T^2)^2;$$
$$2D_{mm}\alpha TK - 2D_{mm}\alpha KT + \pi S_0 (K + \alpha + \alpha^2 T^2)^2 = -2D_{mm}\alpha T(\alpha + \alpha^2 T^2) + 2D_{mm}\alpha(1 + 2T).$$

Последняя зависимость определяет оптимальное значение  $K^*$ .

# Принцип комплексирования

Для решения задач управления самолетами, ракетами, кораблями часто применяются системы, использующие принципы комплексирования, предполагающие получение информации о координатах и параметрах движения с помощью измерителей, отличающихся по используемым в них физическим законам. Примером может служить стабилизация антенных систем радиотехнических головок самонаведения ракет с помощью сигналов гироскопических датчиков. Здесь осуществляется комплексирование измерителей, работающих на различных принципах. Гироскопы измеряют положение продольной оси в инерциальном пространстве, а радиотехнический пеленгатор определяет положение цели относительно этой оси. Комплексные угломерные устройства решают стоящие перед ними задачи значительно более успешно, чем устройства, работающие независимо

### Схема компенсации



**Рис. 3.7.** Структурная схема системы

Сигналы первого и второго измерителей (рис. 3.7)  $Y_1(t) = m(t) + n_1(t)$  и  $Y_2(t) = m(t) + n_2(t)$ , содержащие измеряемую величину  $m(t)$  и помехи  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$ , поступают на вычитающее устройство ВУ, в результате чего выходной сигнал вычитающего устройства (в точке  $A$ ) равен разности  $n_1(t) - n_2(t)$ . Пусть  $n_1(t)$  имеет спектральную плотность в *низкочастотной области*, а спектр  $n_2(t)$  — *весьма широкополосен* (рис. 3.8,  $a$ ). Если теперь фильтр  $W(s)$  выбрать так, чтобы он с минимальными искажениями пропускал помеху  $n_1(t)$  и возможно полнее подавлял помеху  $n_2(t)$ , то на его выходе (в точке  $B$ ) будет почти полностью воспроизведена помеха  $n_1(t)$ . Если ее вычесть из сигнала  $Y_1(t)$ , то полученный на выходе сигнал будет очень близок к требуемому значению  $m(t)$ . Действительно, если бы с помощью фильтра удалось полностью подавить помеху  $n_2(t)$  и пропустить без искажений помеху  $n_1(t)$ , то сигнал на выходе воспроизводился бы идеально точно:

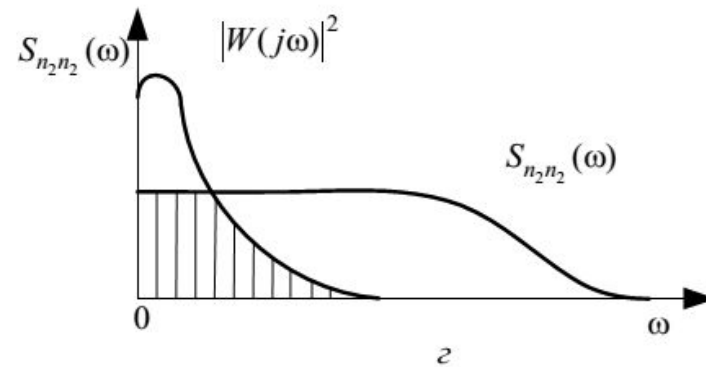
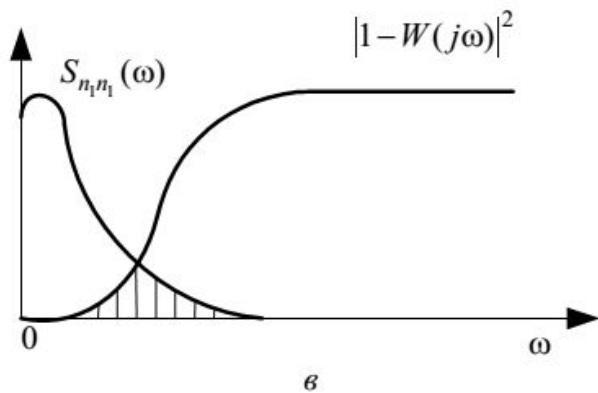
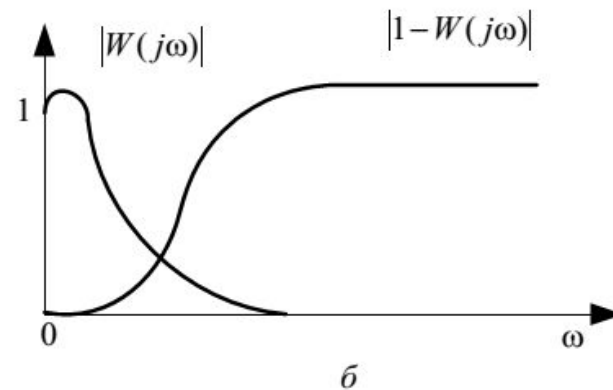
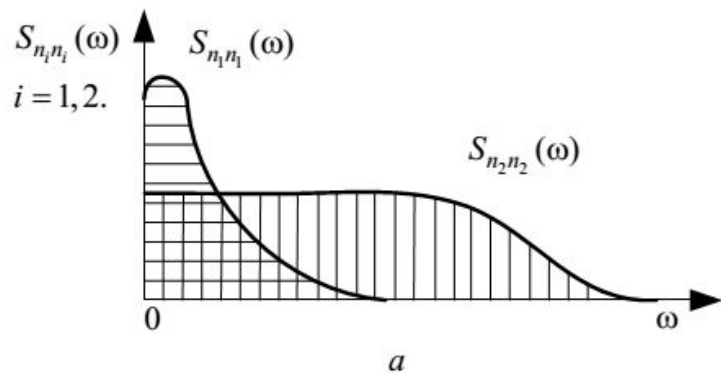
$$X(t) = m(t) + n_1(t) - n_1(t) = m(t).$$

В действительности такую фильтрацию осуществить не удастся, и в выходном сигнале помимо требуемой функции  $m(t)$  будет содержаться ошибка  $\sigma(t)$ :

$$X(t) = m(t) + \sigma(t).$$

Ошибка  $\sigma(t)$  будет тем меньше, чем сильнее различие в спектральных характеристиках помех  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$ .





**Рис. 3.8.** Графики, иллюстрирующие преобразование сигналов в системе, представленной на рис. 3.7

Имеем (используем формальное преобразование Лапласа)

$$\begin{aligned} X(s) &= Y_1(s) - X_B(s) = M(s) + N_1(s) - (N_1(s) - N_2(s))W(s) = \\ &= M(s) + (1 - W(s))N_1(s) + W(s)N_2(s). \end{aligned}$$

Ошибка определяется зависимостью

$$\sigma(s) = (1 - W(s))N_1(s) + W(s)N_2(s). \quad (3.6)$$

Согласно принятому условию,  $W(j\omega)$  должен быть *фильтром низких частот* (рис. 3.8, б). Тогда фильтр с характеристикой  $1-W(j\omega)$  будет фильтром верхних частот. На выход проходят составляющие низких частот  $n_1(t)$ , пропущенные через фильтр верхних частот  $1-W(j\omega)$ , а также составляющие высоких частот  $n_2(t)$ , прошедшие через фильтр низких частот. Если сигналы  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  являются стационарными и статистически независимыми случайными функциями времени со спектральными плотностями  $S_{n_1n_1}(\omega)$  и  $S_{n_2n_2}(\omega)$ , то дисперсия сигнала ошибки будет равна

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ S_{n_1n_1}(\omega) |1-W(j\omega)|^2 + S_{n_2n_2}(\omega) |W(j\omega)|^2 \right] d\omega. \quad (3.7)$$

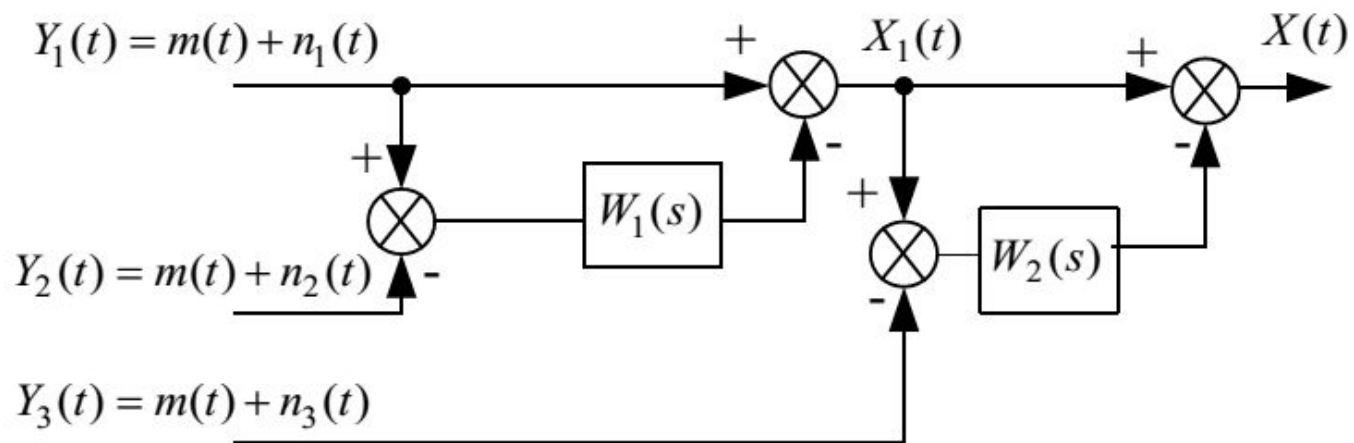
Как видно из рис. 3.8, в, г, эта дисперсия в случае, когда спектральные плотности «разнесены» по оси частот, значительно меньше дисперсии  $\bar{\sigma}_1^2$  и  $\bar{\sigma}_2^2$  ошибок входных сигналов

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{n_1n_1}(\omega) d\omega; \quad \bar{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{n_2n_2}(\omega) d\omega. \quad (3.8)$$

Аналогично можно составить схему компенсации с тремя измерителями (рис. 3.9).  
Для выходных сигналов справедливы зависимости

$$X_1(s) = M(s) + (1 - W_1(s))N_1(s) + W_1(s)N_2(s);$$

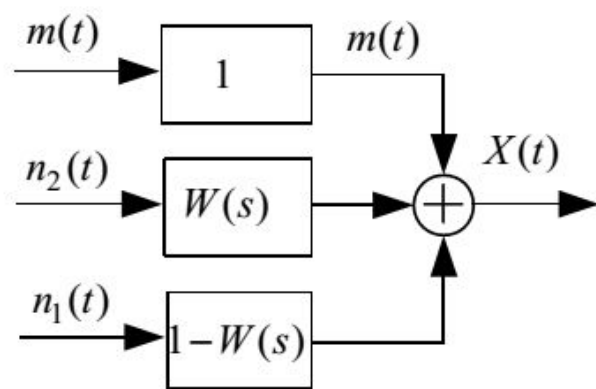
$$X(s) = M(s) + (1 + W_1(s))(1 - W_2(s))N_1(s) + (1 - W_2(s))W_1(s)N_2(s) + W_2(s)N_3(s).$$



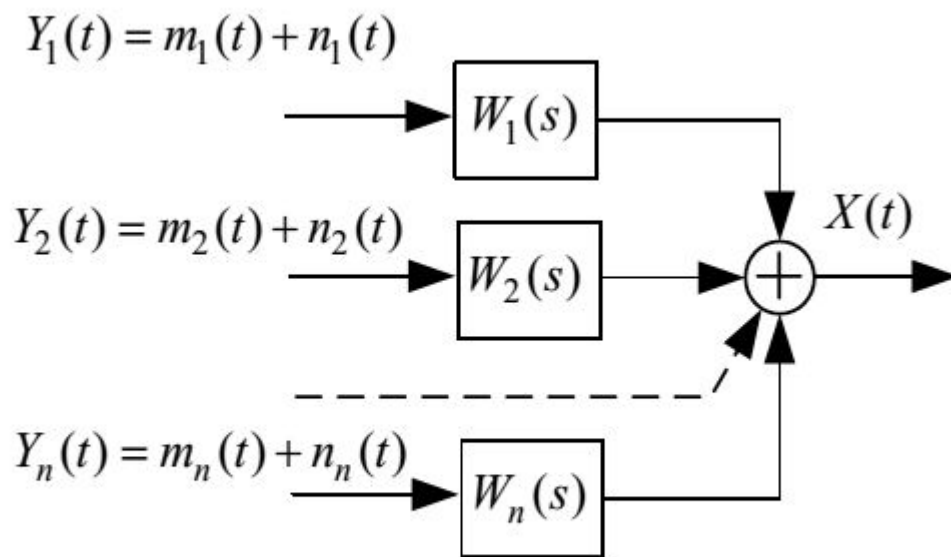
**Рис. 3.9.** Структурная схема системы

Ослабление помехи  $n_3(t)$  может быть достигнуто в том случае, когда ее энергия сосредоточена в области частот, отличной от той, где сосредоточена энергия помехи  $n_1(t)$ .

Из приведенного анализа схемы компенсации с двумя источниками ясно, что ее можно представить эквивалентной схемой (рис. 3.10), т.е. как систему, в которой полезный сигнал  $m(t)$  проходит без искажений, помеха  $n_2(t)$  — через фильтр с передаточной функцией  $W(s)$ , а  $n_1(t)$  — через фильтр с передаточной функцией  $1 - W(s)$ . Если при этом фильтр  $W(s)$  пропускает нижние частоты, то фильтр  $1 - W(s)$ , напротив, подавляет нижние частоты и пропускает верхние. Поэтому энергия помехи  $n_1(t)$  должна быть сосредоточена в области нижних, а  $n_2(t)$  — верхних частот.



**Рис. 3.10.** Структурная схема системы



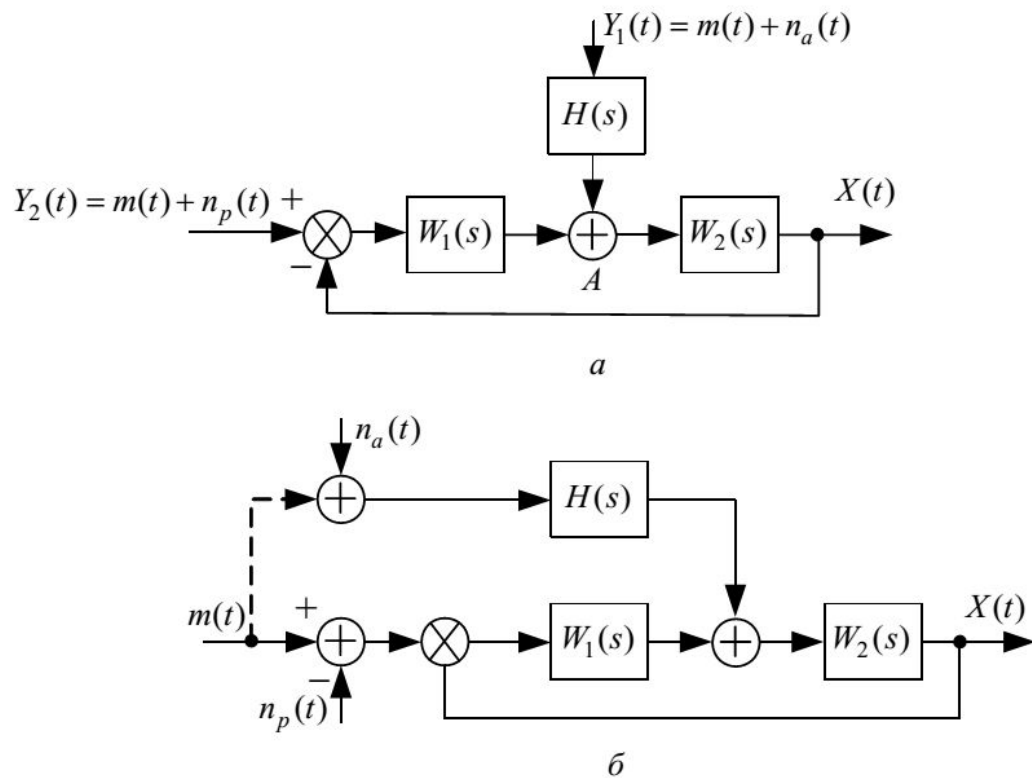
**Рис. 3.11.** Структурная схема системы

Для того чтобы система не вносила динамических ошибок, вызванных переходными процессами в фильтрах при любых законах изменения  $m(t)$ , необходимо и достаточно выполнить следующее соотношение (рис. 3.11):

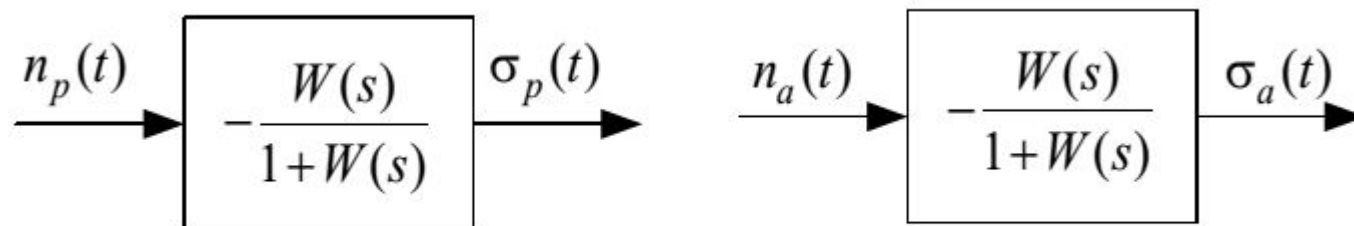
$$\sum_{i=1}^n W_i(s) = 1. \quad (3.9)$$



Рассмотрим схему со следящим радиотехническим измерителем (рис. 3.12) [19].



**Рис. 3.12.** Структурная схема системы:  
*a* — исходная структурная схема; *б* — эквивалентная структурная схема



**Рис. 3.13.** Структурные схемы

В [19] показано, что если условия инвариантности  $H(s)W_2(s)=1$  выполнены и автономный измеритель не обладает динамической ошибкой, то комплексная система также не имеет динамической ошибки и полосу радиотехнической системы следует выбирать только исходя из условий обеспечения минимума помеховых ошибок, определяемых формулами (рис. 3.13)

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= W_1(j\omega)W_2(j\omega); \\
 \sigma_p(j\omega) &= -\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}N_p(j\omega); \\
 \sigma_a(j\omega) &= -\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}N_a(j\omega).
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Отсюда следует важный вывод: *комплексная система работает так, что систематическое рассогласование на выходе измерительного элемента радиотехнической системы, обусловленное динамической ошибкой, отсутствует и создаются наиболее благоприятные условия для предотвращения срыва сопровождения.* Конечно, этот вывод относится к идеализированной системе. Но и в реальной комплексной системе установившееся рассогласование меньше, чем в отдельно взятой радиотехнической системе. Отсюда следует, что *при компенсации получается дополнительный выигрыш в помехоустойчивости в том смысле, что уменьшается вероятность срыва слежения* [19].