

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Оптимальной среди систем данного класса называют ту систему, для которой показатель ее качества имеет экстремальное значение (минимум или максимум в зависимости от смысла показателя). Выбранный показатель качества называют, как говорилось выше, критерием оптимальности.

Рассмотрим случай, когда заданы структура системы и статистические характеристики входных сигналов. Требуется найти такие значения параметров системы, при которых обеспечивается экстремум критерия оптимальности. Эти значения параметров называют оптимальными параметрами системы.

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Такая задача широко распространена на практике, так как структура системы часто выбирается, исходя из ее функционального назначения. Можно специально вводить корректирующие звенья с изменяемыми параметрами [125].

Перейдем к рассмотрению задачи. Ясно, что ошибка системы состоит из двух составляющих. Одна из них вызвана тем, что система не может абсолютно точно воспроизводить полезный сигнал $m(t)$, а другая — реакцией на помеху $n(t)$. Стремление уменьшить первую составляющую приводит к увеличению второй составляющей ошибки и наоборот. *Задача синтеза состоит в том, чтобы обеспечить минимально возможную сумму обеих составляющих при заданной структуре системы (рис. 3.1).*

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

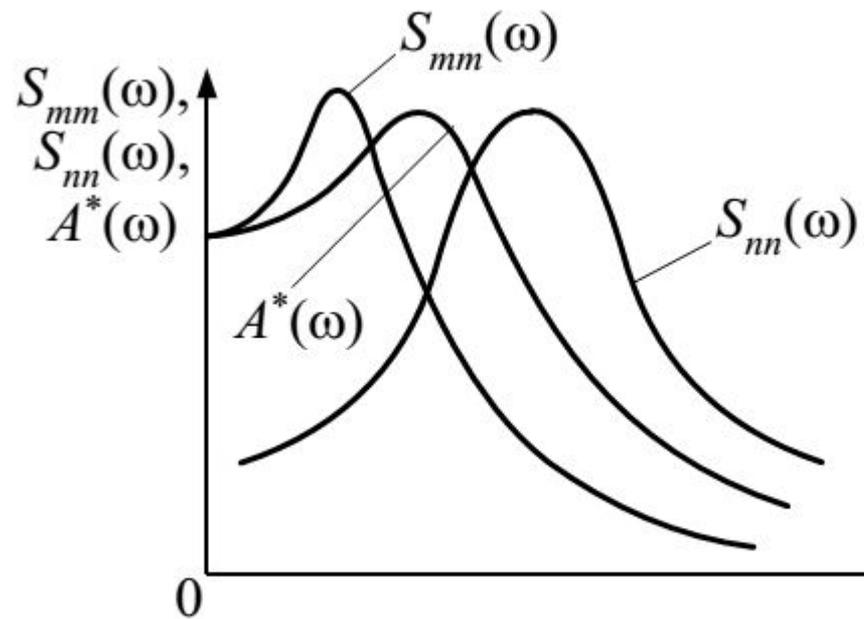


Рис. 3.1. К задаче нахождения оптимальной ПФ системы

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

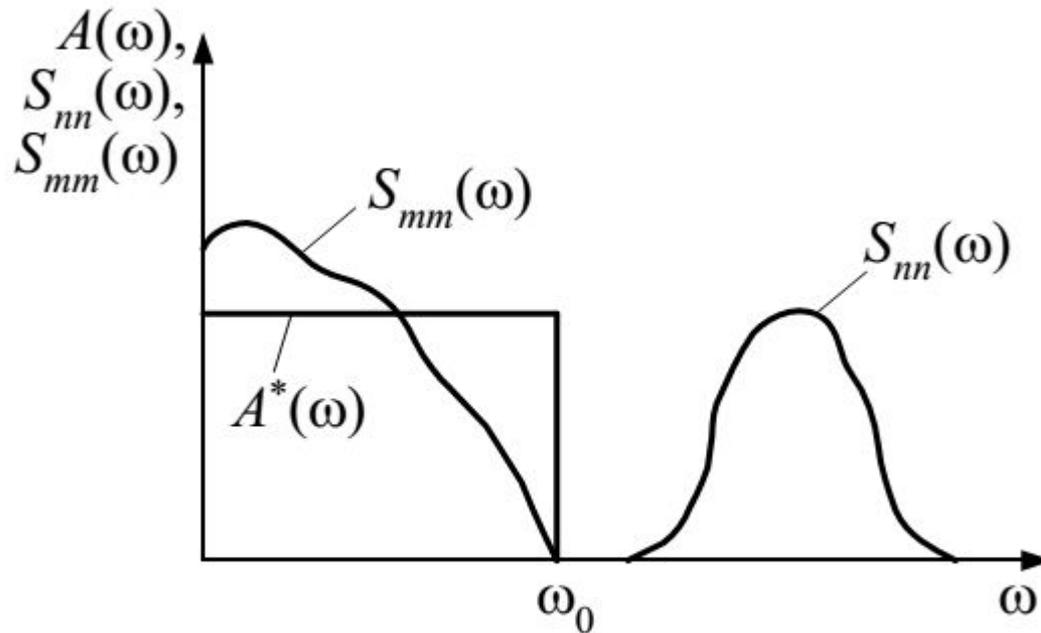


Рис. 3.2. К иллюстрации задачи фильтрации

Наиболее простым является случай, когда полезный сигнал имеет более низкочастотный спектр, чем помеха (рис. 3.2).

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

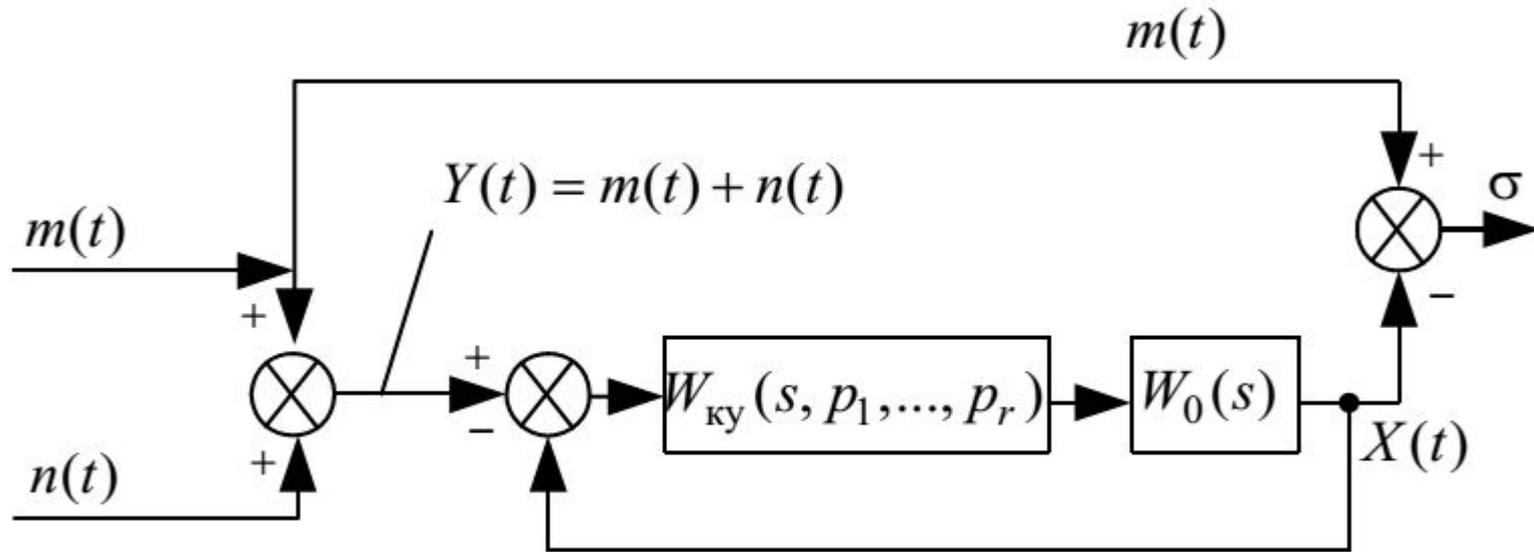


Рис. 3.3. К постановке задачи фильтрации

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда спектры $S_{mm}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ перекрываются.

Пусть в структуру системы (рис. 3.3) введено корректирующее устройство с ПФ $W_{ky}(s, p)$, причем параметры p_1, p_2, \dots, p_r могут меняться. Для простоты положим, что параметры остальной части системы фиксированы; эта часть имеет ПФ $W_0(s)$.

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Тогда ПФ замкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{W_{\text{кy}}(s, p)W_0(s)}{1 + W_{\text{кy}}(s, p)W_0(s)} = W(s, p). \quad (3.1)$$

Запишем выражение для СКО в предположении, что полезный сигнал $m(t)$ и помеха $n(t)$ не коррелированы, а $S_{mm}(\omega)$ и $S_{nn}(\omega)$ — дробно-рациональные функции частоты ω , и, следовательно, СП можно факторизовать:

$$\begin{aligned} S_{mm}(\omega) &= S_{mm}^+(j\omega)S_{mm}^-(j\omega) = S_{mm}(j\omega)S_{mm}(-j\omega); \\ S_{nn}(\omega) &= S_{nn}^+(j\omega)S_{nn}^-(j\omega) = S_{nn}(j\omega)S_{nn}(-j\omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Справедлива зависимость

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - W(s, p) \right|^2 \Big|_{s=j\omega} S_{mm}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \left| W(s, p) \right|^2 \Big|_{s=j\omega} S_{nn}(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - W(s, p))(1 - W(-j\omega, p)) S_{mm}(j\omega) S_{mm}(-j\omega) d\omega + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega, p) W(-j\omega, p) S_{nn}(j\omega) S_{nn}(-j\omega) d\omega = \\ &= 2\pi I_n^1(p_1, \dots, p_r) + 2\pi I_n^2(p_1, \dots, p_r) = \bar{\sigma}^2(p_1, p_2, \dots, p_r).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Таким образом, $\bar{\sigma}^2(p_1, p_2, \dots, p_r)$ является функцией параметров p_1, p_2, \dots, p_r

Оптимальной системе соответствуют такие значения p_1^*, \dots, p_r^* , при которых $\bar{\sigma}^2$ достигает минимума.

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Предположим, что минимум выпуклой функции $\bar{\sigma}^2$ существует и единственен, а ограничения на параметры отсутствуют. Тогда условие минимума находится приравниванием частных производных от $\bar{\sigma}^2$ по p_v к нулю, т.е.

$$\frac{d\bar{\sigma}^2(p_1, p_2, \dots, p_r)}{dp_v} = 0; \quad v = \overline{1, r}. \quad (3.4)$$

Введем векторные обозначения: $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)^T$ — вектор-столбец параметров; $\nabla \bar{\sigma}^2(\mathbf{p})$ — градиент вектор-столбец частных производных:

$$\nabla \bar{\sigma}^2(\mathbf{p}) = \text{grad } \bar{\sigma}^2(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p_1}, \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial \bar{\sigma}^2}{\partial p_r} \right)^T.$$

Тогда систему уравнений (3.4) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\nabla \bar{\sigma}^2(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.5)$$

Решение этого уравнения и определяет оптимальный вектор параметров

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_r^*)^T.$$

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация

Для решения системы (3.5) наиболее часто используют численные методы; кроме того, для нахождения $\min \bar{\sigma}^2(\mathbf{p})$ можно применять методы оптимизации.

Если на параметры системы наложены ограничения, то для решения задачи оптимизации необходимо использовать аппарат нелинейного программирования.

Фильтр с заданной структурой.
Параметрическая оптимизация.
Пример 3.1

Пример 3.1. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 3.4.

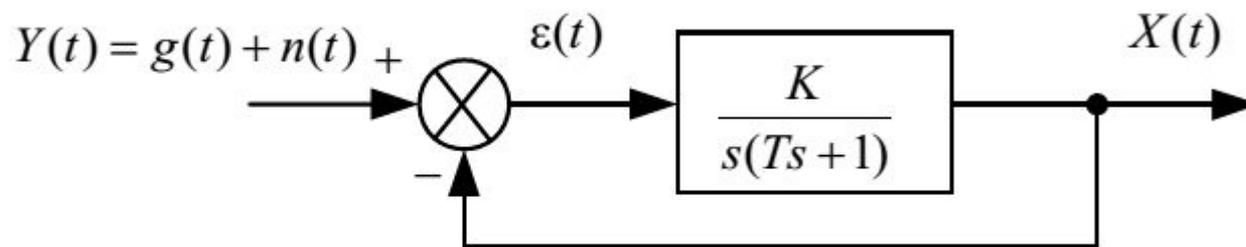


Рис. 3.4. Структурная схема системы

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация. Пример 3.1

На вход системы поступает аддитивная смесь полезного сигнала $m(t)$ и помехи $n(t)$, причем

$$S_{mm}(\omega) = \frac{2D_{mm}\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}; \quad S_{nn}(\omega) = S_0.$$

Между помехой и полезным сигналом отсутствует корреляция.

Исходные данные: $T_1 = 0,1$ с; $D_{mm} = 100$ град²; $S_0 = 0,01$ град²/Гц.

Необходимо определить оптимальное значение коэффициента усиления K^* , соответствующее минимуму СКО.

Фильтр с заданной структурой. Параметрическая оптимизация. Пример 3.1

Необходимо определить оптимальное значение коэффициента усиления K^* , соответствующее минимуму СКО.

Имеем зависимость, определяющую СКО через параметры системы:

$$\bar{\sigma}^2(K) = \frac{2D_{mm}\alpha(1 + \alpha T + KT)}{K + \alpha + \alpha^2 T^2} + \pi S_0 K.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \bar{\sigma}^2(K)}{\partial K} = \frac{2D_{mm}\alpha T(1 + \alpha + \alpha^2 T^2) - 2D_{mm}\alpha(1 + \alpha T + KT)}{K + \alpha + \alpha^2 T^2} + \pi\sqrt{S_0} = 0.$$

Отсюда находим

$$2D_{mm}\alpha T(K + \alpha + \alpha^2 T^2) - 2D_{mm}\alpha(1 + \alpha T + KT) = -\pi S_0 (K + \alpha + \alpha^2 T^2)^2;$$
$$2D_{mm}\alpha TK - 2D_{mm}\alpha KT + \pi S_0 (K + \alpha + \alpha^2 T^2)^2 = -2D_{mm}\alpha T(\alpha + \alpha^2 T^2) + 2D_{mm}\alpha(1 + 2T).$$

Последняя зависимость определяет оптимальное значение K^* .

Принцип комплексирования

Для решения задач управления самолетами, ракетами, кораблями часто применяются системы, использующие принципы комплексирования, предполагающие получение информации о координатах и параметрах движения с помощью измерителей, отличающихся по используемым в них физическим законам. Примером может служить стабилизация антенных систем радиотехнических головок самонаведения ракет с помощью сигналов гироскопических датчиков. Здесь осуществляется комплексирование измерителей, работающих на различных принципах. Гироскопы измеряют положение продольной оси в инерциальном пространстве, а радиотехнический пеленгатор определяет положение цели относительно этой оси. Комплексные угломерные устройства решают стоящие перед ними задачи значительно более успешно, чем устройства, работающие независимо

Схема компенсации

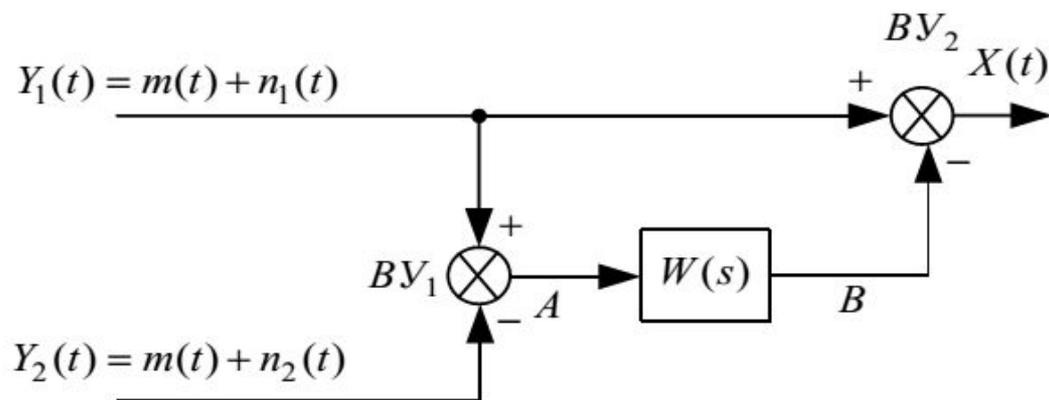


Рис. 3.7. Структурная схема системы

Сигналы первого и второго измерителей (рис. 3.7) $Y_1(t) = m(t) + n_1(t)$ и $Y_2(t) = m(t) + n_2(t)$, содержащие измеряемую величину $m(t)$ и помехи $n_1(t)$ и $n_2(t)$, поступают на вычитающее устройство ВУ, в результате чего выходной сигнал вычитающего устройства (в точке A) равен разности $n_1(t) - n_2(t)$. Пусть $n_1(t)$ имеет спектральную плотность в *низкочастотной области*, а спектр $n_2(t)$ — *весьма широкополосен* (рис. 3.8, a). Если теперь фильтр $W(s)$ выбрать так, чтобы он с минимальными искажениями пропускал помеху $n_1(t)$ и возможно полнее подавлял помеху $n_2(t)$, то на его выходе (в точке B) будет почти полностью воспроизведена помеха $n_1(t)$. Если ее вычесть из сигнала $Y_1(t)$, то полученный на выходе сигнал будет очень близок к требуемому значению $m(t)$. Действительно, если бы с помощью фильтра удалось полностью подавить помеху $n_2(t)$ и пропустить без искажений помеху $n_1(t)$, то сигнал на выходе воспроизводился бы идеально точно:

$$X(t) = m(t) + n_1(t) - n_1(t) = m(t).$$

В действительности такую фильтрацию осуществить не удастся, и в выходном сигнале помимо требуемой функции $m(t)$ будет содержаться ошибка $\sigma(t)$:

$$X(t) = m(t) + \sigma(t).$$

Ошибка $\sigma(t)$ будет тем меньше, чем сильнее различие в спектральных характеристиках помех $n_1(t)$ и $n_2(t)$.

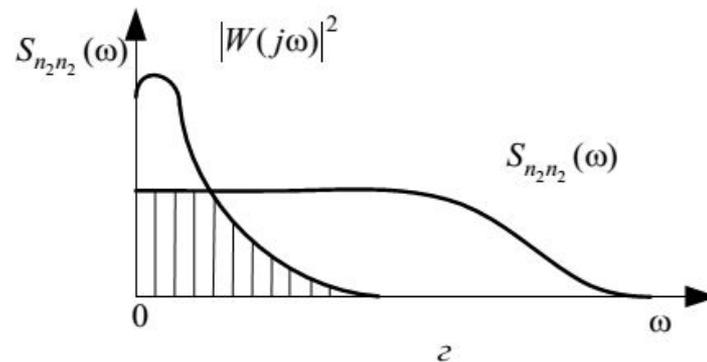
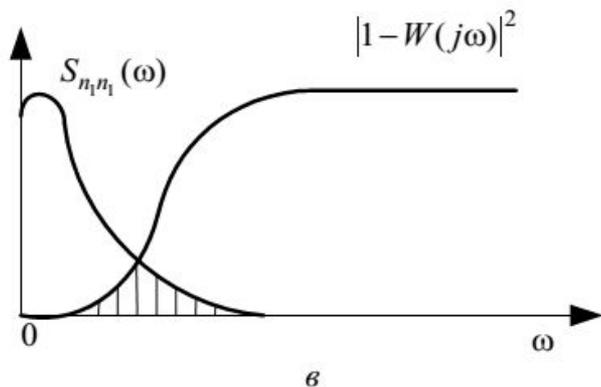
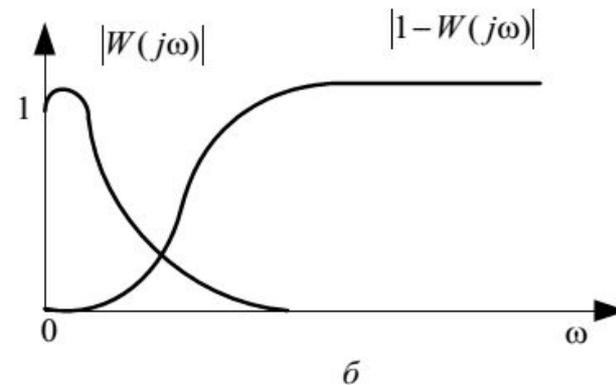
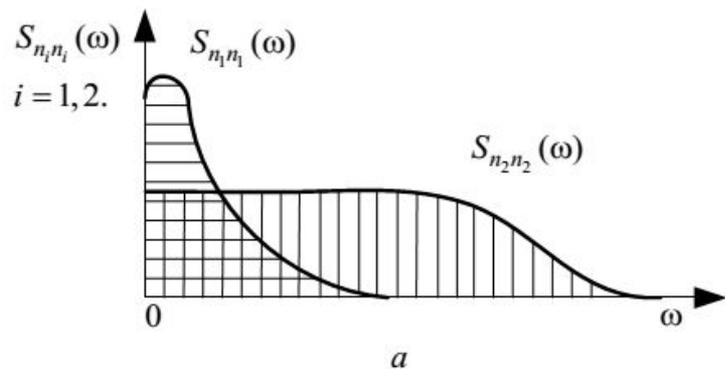


Рис. 3.8. Графики, иллюстрирующие преобразование сигналов в системе, представленной на рис. 3.7

Имеем (используем формальное преобразование Лапласа)

$$\begin{aligned} X(s) &= Y_1(s) - X_B(s) = M(s) + N_1(s) - (N_1(s) - N_2(s))W(s) = \\ &= M(s) + (1 - W(s))N_1(s) + W(s)N_2(s). \end{aligned}$$

Ошибка определяется зависимостью

$$\sigma(s) = (1 - W(s))N_1(s) + W(s)N_2(s). \quad (3.6)$$

Согласно принятому условию, $W(j\omega)$ должен быть *фильтром низких частот* (рис. 3.8, б). Тогда фильтр с характеристикой $1-W(j\omega)$ будет фильтром верхних частот. На выход проходят составляющие низких частот $n_1(t)$, пропущенные через фильтр верхних частот $1-W(j\omega)$, а также составляющие высоких частот $n_2(t)$, прошедшие через фильтр низких частот. Если сигналы $n_1(t)$ и $n_2(t)$ являются стационарными и статистически независимыми случайными функциями времени со спектральными плотностями $S_{n_1n_1}(\omega)$ и $S_{n_2n_2}(\omega)$, то дисперсия сигнала ошибки будет равна

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[S_{n_1n_1}(\omega) |1-W(j\omega)|^2 + S_{n_2n_2}(\omega) |W(j\omega)|^2 \right] d\omega. \quad (3.7)$$

Как видно из рис. 3.8, в, г, эта дисперсия в случае, когда спектральные плотности «разнесены» по оси частот, значительно меньше дисперсии $\bar{\sigma}_1^2$ и $\bar{\sigma}_2^2$ ошибок входных сигналов

$$\bar{\sigma}_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{n_1n_1}(\omega) d\omega; \quad \bar{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_{n_2n_2}(\omega) d\omega. \quad (3.8)$$

Аналогично можно составить схему компенсации с тремя измерителями (рис. 3.9).
Для выходных сигналов справедливы зависимости

$$X_1(s) = M(s) + (1 - W_1(s))N_1(s) + W_1(s)N_2(s);$$

$$X(s) = M(s) + (1 + W_1(s))(1 - W_2(s))N_1(s) + (1 - W_2(s))W_1(s)N_2(s) + W_2(s)N_3(s).$$

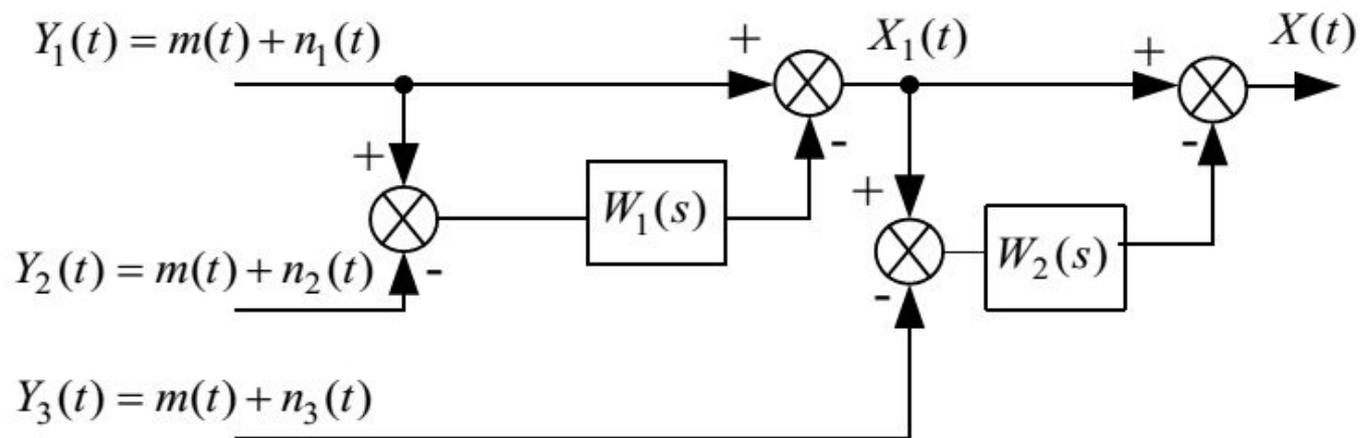


Рис. 3.9. Структурная схема системы

Ослабление помехи $n_3(t)$ может быть достигнуто в том случае, когда ее энергия сосредоточена в области частот, отличной от той, где сосредоточена энергия помехи $n_1(t)$.

Из приведенного анализа схемы компенсации с двумя источниками ясно, что ее можно представить эквивалентной схемой (рис. 3.10), т.е. как систему, в которой полезный сигнал $m(t)$ проходит без искажений, помеха $n_2(t)$ — через фильтр с передаточной функцией $W(s)$, а $n_1(t)$ — через фильтр с передаточной функцией $1-W(s)$. Если при этом фильтр $W(s)$ пропускает нижние частоты, то фильтр $1-W(s)$, напротив, подавляет нижние частоты и пропускает верхние. Поэтому энергия помехи $n_1(t)$ должна быть сосредоточена в области нижних, а $n_2(t)$ — верхних частот.

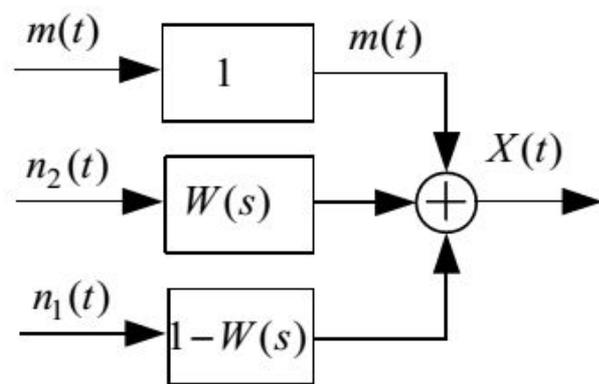


Рис. 3.10. Структурная схема системы

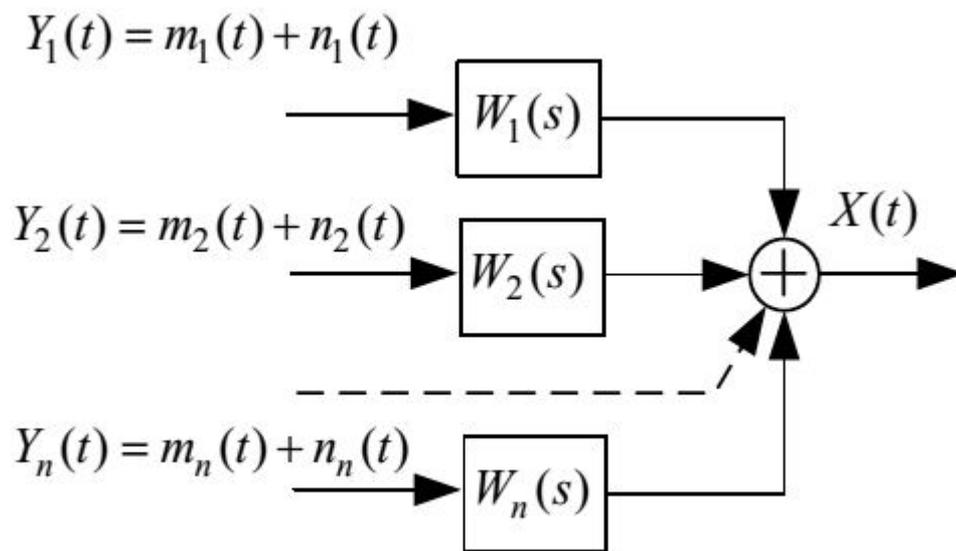


Рис. 3.11. Структурная схема системы

Для того чтобы система не вносила динамических ошибок, вызванных переходными процессами в фильтрах при любых законах изменения $m(t)$, необходимо и достаточно выполнить следующее соотношение (рис. 3.11):

$$\sum_{i=1}^n W_i(s) = 1. \quad (3.9)$$

Рассмотрим схему со следящим радиотехническим измерителем (рис. 3.12) [19].

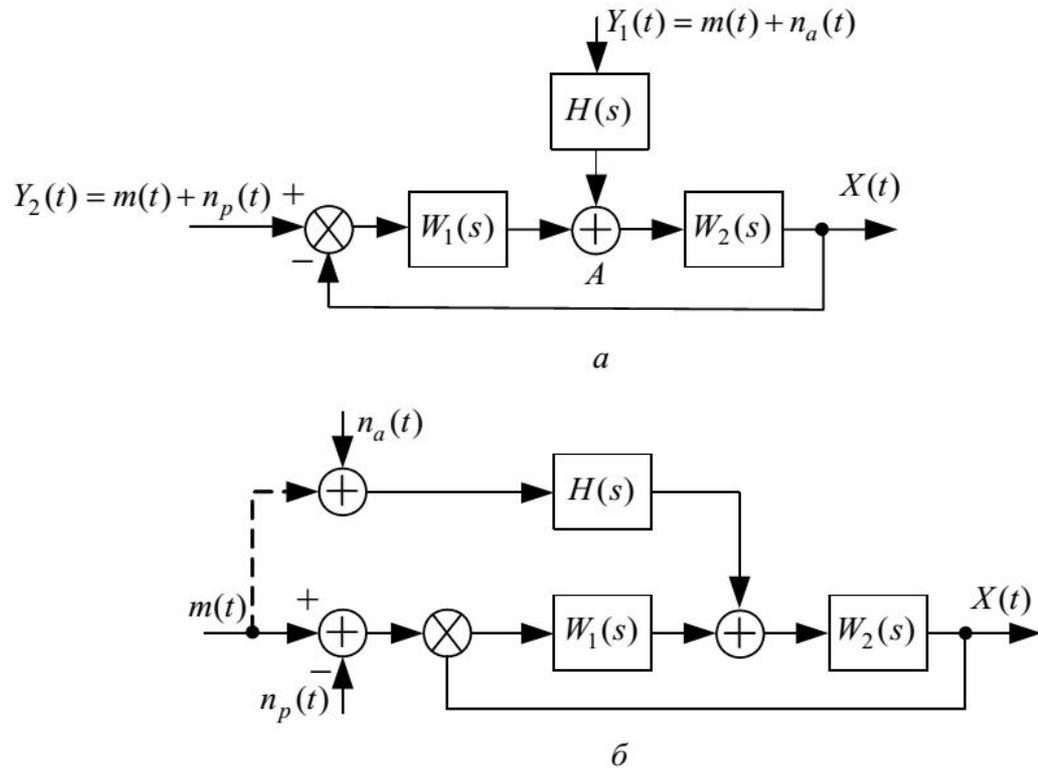


Рис. 3.12. Структурная схема системы:
a — исходная структурная схема; *б* — эквивалентная структурная схема

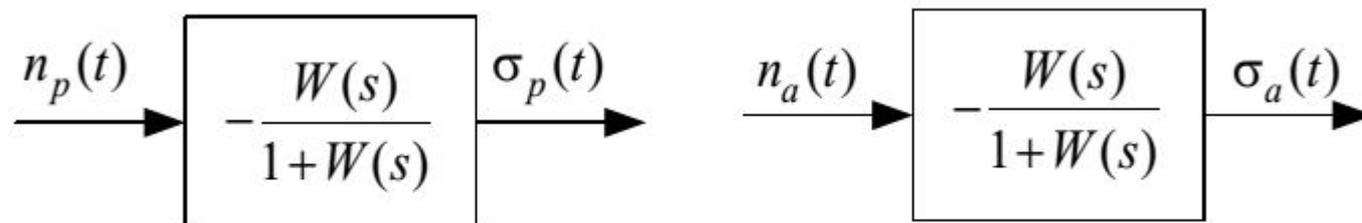


Рис. 3.13. Структурные схемы

В [19] показано, что если условия инвариантности $H(s)W_2(s)=1$ выполнены и автономный измеритель не обладает динамической ошибкой, то комплексная система также не имеет динамической ошибки и полосу радиотехнической системы следует выбирать только исходя из условий обеспечения минимума помеховых ошибок, определяемых формулами (рис. 3.13)

$$\begin{aligned}
 W(j\omega) &= W_1(j\omega)W_2(j\omega); \\
 \sigma_p(j\omega) &= -\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}N_p(j\omega); \\
 \sigma_a(j\omega) &= -\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}N_a(j\omega).
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Отсюда следует важный вывод: *комплексная система работает так, что систематическое рассогласование на выходе измерительного элемента радиотехнической системы, обусловленное динамической ошибкой, отсутствует и создаются наиболее благоприятные условия для предотвращения срыва сопровождения.* Конечно, этот вывод относится к идеализированной системе. Но и в реальной комплексной системе установившееся рассогласование меньше, чем в отдельно взятой радиотехнической системе. Отсюда следует, что *при компенсации получается дополнительный выигрыш в помехоустойчивости в том смысле, что уменьшается вероятность срыва слежения* [19].