Транспортная задача

Выполнил:
Кривогузов М. Г.

Имеется m поставщиков и n потребителей некоторого товара. Запасы i-го поставщика составляют a_i единиц товара, $i = 1, ..., m$. Потребности j-го потребителя равны b_i единиц товара, $j = 1, 2, \ldots, n$. Стоимость перевозки единицы товара от i-го поставщика j-му потребителю равна c_{ij} единиц. Требуется так закрепить поставщиков за потребителями, чтобы минимизировать суммарные затраты на перевозку товара.

Описание неизвестных. Здесь неизвестно, сколько единиц товара должен каждый поставщик передать каждому потребителю. Обозначим через x_{ij} количество единиц товара, поставляемых i-м поставщиком j-му потребителю, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Всего неизвестных $m \times n$.

Описание целевой функции. Определим суммарные затраты на перевозку товара. Например, затраты на перевозку x_{11} единиц товара от первого поставщика первому потребителю равны произведению $c_{11}x_{11}$. В общем случае затраты на перевозку x_{ij} единиц товара от i-го поставщика j-му потребителю равны произведению $c_{ij}x_{ij}$. Суммарные затраты равны

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Описание системы ограничений. Будем считать, что сумма всех запасов не меньше суммы всех потребностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Тогда ограничения сводятся к требованию удовлетворить потребности каждого потребителя и к условию невозможности вывезти от каждого поставщика больше, чем есть у него в запасе.

Первый поставщик вывозит всем потребителям

$$x_{11} + x_{12} + \ldots x_{1n}$$

единиц товара. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} \leq a_1.$$

Так как поставщиков всего m, то число ограничений по запасам равно m. Для i-го поставщика имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Опишем ограничения по потребностям. Первый потребитель получает от всех поставщиков

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1}$$

единиц товара. Тогда должно быть

$$x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = \sum_{i=1}^{m} x_{i1} = b_1.$$

Число ограничений по потребностям равно n, так как всего n потребителей. Для j-го потребителя имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Кроме того, величины x_{ij} не могут быть отрицательными, $x_{ij} \geq 0,$

$$i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n.$$