Факультет информационно-измерительных и биотехнических систем (ФИБС)
Кафедра биотехнических систем (БТС)

Моделирование биотехнических систем

Тема 1. Основные понятия и методы моделирования

Лекция 2. Основы статистического моделирования

Основы статистического моделирования

Задача математического моделирования состоит в построении математической модели объекта и в количественной оценке её неопределённости.

Решение задачи осуществляется в условиях неполной информации о свойствах моделируемого объекта, характеристиках входного воздействия (входных сигналов) и неопределённости выходного результата. Математическим инструментом решения задачи в этих случаях является теория вероятностей, а подход к решению задачи – статистическим моделированием.

Математические модели

статически
е

динамически
е

Основы статистического моделирования

Статические модели описывают связь между входными и выходными параметрами объекта в стационарном состоянии.

Стационарное состояние – такое условие пребывания объекта, что ни входные, ни выходные параметры не изменяются во времени.
Это соответствует ситуации, когда на вход объекта подаётся постоянное, не изменяющееся во времени воздействие, а значение выходного параметра фиксируется лишь после того, как его величина установится, т.е. перестанет изменяться во времени.

С математической точки зрения статическая модель представляет собой функцию.

Функция - математический объект, который одному или нескольким числам (значениям входных параметров) ставит в соответствие число (или несколько чисел), равное величине выходного параметра (параметров).

$P = n/N$

$v_0(m_1+m_2) = v_1 m_1 + v_2 m_2$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$$

Основы статистического моделирования

Динамические модели связывают вход и выход объекта в переходных состояниях.

Переходное состояние – это такое условие пребывания объекта, когда после воздействия на него каждый момент его текущего состояния зависит от предшествующих состояний, в которых этот объект находился ранее.
На практике - это проявляется как присущие объекту свойства: инерционность, способность «помнить» свои предыдущие состояния и т.д.

Математически динамическая модель представляет собой оператор

Оператор - математический объект, который одной или нескольким функциям времени, задающим изменение во времени входных параметров, ставит в соответствие функцию (или несколько функций) времени, задающих изменение во времени выходного параметра (параметров).
Конкретные математические структуры, реализующие оператор, могут быть различны. Наиболее часто используются дифференциальные уравнения, передаточные функции, корреляционные и спектральные зависимости и т.д.

$$\frac{dy}{dt}=\int_{t=0}^{T} \sec(2\pi t+\varphi)dt$$

Основы статистического моделирования / Статическое моделирование

«Самой лучшей» модели не существует. Каждому реальному объекту можно сопоставить *множество* одинаково хорошо описывающих его моделей.

При выборе вида математической модели руководствуются соответствием модели и эксперимента - адекватной моделью.
Дополнительно руководствуются критерием простоты: если нет достаточно веских физических соображений, указывающих на вид модели, то используется самая простая (как правило – полиномиальная) модель.

Многочлен (или полином) от n переменных — это сумма одночленов или, строго, — конечная формальная сумма вида:

$$\sum_I c_I x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n},$$

$I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — набор из целых неотрицательных чисел, именуемых мультииндекс,

c — число, именуемое коэффициент многочлена, зависящее только от мультииндекса I.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определения

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи. С событиями связываются некоторые числа, характеризующие степень объективной возможности появления этих событий, называемые вероятностями событий.

Вероятностью события ***A*** в некотором процессе операции называется отношение *среднего* числа единичных операций ***n***, в которых событие ***A*** происходит, к объему массовой операции ***m***:

$$P(A) = \frac{n}{m}. \qquad (1.1)$$

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (1.2)$$

$$P(\overline{A}) = \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m} = 1 - P(A). \qquad (1.3)$$

события ***A*** и ***B*** несовместны:

$$A \cap B = \varnothing. \qquad (1.4)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определения

Достоверным называется событие W, которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие Æ, которое в результате опыта произойти не может.

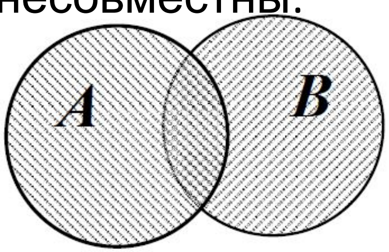
Несовместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A \cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B, или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается A×B, $A \cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.

события ***A*** и ***B*** несовместны:

$$A \cap B = \varnothing. \qquad (1.4)$$



Теорема сложения вероятностей для произвольных событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (1.6)$$

Теорема сложения вероятностей для несовместных событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (1.7)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обобщение

$$\forall \{A \mid A_i \cap A_j = \varnothing\} \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \qquad (1.8)$$

Определение

Полная группа событий - если n событий A_i взаимно несовместны и они вместе исчерпывают все возможные исходы эксперимента.

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1. \qquad (1.9)$$

УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Теорема умножения вероятностей для произвольных событий

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A). \qquad (1.10)$$

$P(AB)$ и $P(B A)$ – условные вероятности: $P(AB)$ – вероятность осуществления события A при условии, что событие B достоверно произошло, а $P(B A)$ – вероятность осуществления события B при условии, что событие A достоверно произошло.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Определение

События *A* и *B* называются ***независимыми*** (или, по-другому, ***взаимно-независимыми***)

$$P(A|B)=P(A) \text{ и } P(B|A)=P(B). \tag{1.11}$$

Следствие

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B). \tag{1.12}$$

Теорема умножения вероятностей для независимых событий

Обобщение

$$\forall \{A, | \ P(A_i | A_j) = P(A_i) \}$$

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1.13}$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

<***A***> - полная группа. Тогда, если известны условные вероятности осуществления произвольного события ***B*** при условии осуществления каждого из событий, составляющих полную группу, можно найти безусловную вероятность осуществления события ***B***:

$$P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + \ldots + P(B|A_n)\cdot P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\cdot P(A_i). \quad (1.14)$$

Задача

Две медсистры играют на деньги. В двух ящиках лежат таблетки: в первом восемь снотворных и две слабительных, а во втором – четыре снотворных и пять слабительных. Из первого ящика во второй наугад (не глядя) переносится одна таблетка, после чего второй ящик перетряхивается, и из него достается одна таблетка и дается пациенту. Какова вероятность, что он не уснёт?

Определим **полную группу** событий. Возьмем в качестве события ***A1*** перенесение из первого ящика во второй таблетки слабительного, а в качестве события ***A2*** – снотворного. Эти события удовлетворяют условиям полной группы. Безусловные вероятности этих событий очевидно равны вероятностям доставания из первого ящика соответственно таблетки слабительного ***P***(***A1***) или снотворного ***P***(***A2***), поэтому

P(***A1***) = ***0,2*** и ***P***(***A2***) = ***0,8*** .

Если произошло событие ***A1*** (т.е. во второй ящик перенесено слабительное), то во втором ящике стало шесть слабительных и четыре снотворных таблеток, и поэтому вероятность осуществления события ***B*** (вытаскивания слабительного из второго ящика) будет равна ***P***(***B***|***A1***) = ***0,6*** . Аналогично для события ***A2*** (перенесена таблетка снотворного) ***P***(***B***|***A2***)= ***0,5***

По формуле полной вероятности получим, что вероятность достать слабительное из второго ящика

P(***B***) = ***0.6*** · ***0.2*** + ***0.5*** · ***0.8*** = ***0.52*** .

ФОРМУЛА БАЙЕСА

$<A>$ - полная группа, $\exists \, B \mid P(B) \neq 0$,

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\cdot P(A_j)}. \qquad (1.15)$$

- эта формула позволяет определять вероятности причин по данному (наступившему) следствию

<u>Задача</u>

Известно, что томограф состоит из двух независимо работающих узлов 1- система датчиков и 2- система обработки о отображения информации. Работоспособность каждого из них безусловно необходима для работоспособности прибора в целом. Вероятность безотказной работы первого узла за время наработки на отказ по формуляру равна ***p1***, а второго узла – ***p2***. Прибор работал в течение некоторого времени и отказал. Найти вероятность того, что отказал узел 1, а узел 2 остался работоспособным.

ФОРМУЛА БАЙЕСА

Полная группа событий : ***A1*** – оба узла работоспособны, ***A2*** – первый узел отказал, а второй работоспособен, ***A3*** – первый узел работоспособен, а второй отказал, ***A4*** – отказали оба узла. Отказ прибора в целом обозначим через ***B***. Рассчитаем вероятности событий:

априори

$$P(B|A_1)=0; \qquad P(A_1)=p_1p_2;$$
$$P(B|A_2)=1; \qquad P(A_2)=(1-p_1)p_2;$$
$$P(B|A_3)=1; \qquad P(A_3)=p_1(1-p_2);$$
$$P(B|A_4)=1; \qquad P(A_4)=(1-p_1)(1-p_2).$$

$$P(A_2|B)=\frac{1\cdot(1-p_1)p_2}{0\cdot p_1p_2+1\cdot(1-p_1)p_2+1\cdot p_1(1-p_2)+1\cdot(1-p_1)(1-p_2)}.$$

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Основой комбинаторики является ***базовый принцип подсчета:***

Пусть имеется k независимых операций, и при этом ***i***-я операция имеет n_i исходов (***i*** меняется от ***1*** до k). Тогда общее количество N исходов в такой системе будет равно произведению числа исходов всех операций:

$$N = n_1 n_2 \cdots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i \,. \qquad (1.16)$$

Основные комбинаторные схемы

РАЗМЕЩЕНИЕ (*arrangement*)

Постановка задачи: Существует n объектов. Их необходимо разместить в k мест (k<n).

Решение:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \qquad (1.17)$$

Знаем, что факториал

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n. \qquad (1.18)$$

$$1! = 1 \text{ и } 0! = 1.$$

окончательно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1.19)$$

Основные комбинаторные схемы

ПЕРЕСТАНОВКА (*permutation*)

Постановка задачи: Существует n объектов. Их необходимо разместить в *k* мест. Причём *k=n* .

Решение:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \qquad (1.20)$$

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Основные комбинаторные схемы

КОМБИНАЦИЯ (*combination*)

<u>Постановка задачи</u>: Рассчитать сочетание (комбинацию) возможных наборов из *k* элементов, выбранных из заданного множества, содержащего *n* различных элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.21)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

КОМБИНАЦИЯ (*combination*)

Пример

Вы знаете, что в интернете находится 10 сайтов, на которых пишут о том как стать умным, причём по отзывам друзей 4 из них написаны шарлатанами. Если зайти наугад на 4 сайта, то какова вероятность, что
а) среди отобранных сайтов два написаны шарлатанами?
б) среди отобранных сайтов как минимум два написаны шарлатанами?

Решение

Вначале найдем общее число способов отобрать 4 сайта из 10 возможных:

$$N = C_{10}^{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210 .$$

Два шарлатанских сайта из четырех можно вынуть $C^2_4 = 6$ способами, а две нешарлатанских из шести – $C^2_6 = 15$. В соответствии с базовым принципом подсчета, число исходов, благоприятствующих событию «а», будет равно: $N = 6\cdot 15 = 90$.

$$P(2) = \frac{N_2}{N} = \frac{C_4^2\cdot C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} .$$

Вариант (б) – домашнее задание

СХЕМА И ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Схемой Бернулли называется система из n независимых испытаний, в каждом из которых могут иметь место «успех» или «неудача» с постоянными вероятностями p.

Вероятность того, что число «успехов» μ_n будет равно некоторому конкретному числу k, равна:

$$P\{\mu_n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad (1.23)$$

где p – вероятность «успеха» в единичном испытании, а

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Следствие

Вероятность того, что число «успехов» будет не больше

$$P\{\mu_n \le m\} = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \qquad (1.24$$

Вероятность того, что число «успехов» будет больше

$$P\{\mu_n > m\} = \sum_{k=m+1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \qquad (1.25)$$

функция распределения

Определение

Величина, значение которой не может быть предсказано в точности до тех пор, пока не произведен эксперимент, называется недетерминированной.

Во множестве недетерминированных величин можно выделить подмножество таких величин, обладающих статистической устойчивостью, значение которых можно предсказать в среднем. Такие величины называются случайными.

Исчерпывающим описанием любой случайной величины является функция распределения.

Обозначим через ξ некоторую случайную величину, а через x – произвольное действительное число. Вероятность того, что ξ примет значение, меньшее, чем x, называется функцией распределения вероятностей случайной величины ξ:

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \quad (1.26)$$

Переопределение

Случайной величиной называется такая величина, значение которой нельзя определить заранее, и для которой существует функция распределения.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

Свойства функции распределения

1. Так как функция распределения представляет собой вероятность, то она изменяется от нуля до единицы: $0 \le F(x) \le 1$.
2. Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. из того, что $x2 > x1$, следует, что $F(x1) \ge F(x2)$, что в математической записи выглядит как

$$x2 > x1 \Rightarrow F(x2) \ge F(x1) .$$

3. Вероятность того, что случайная величина находится в интервале от $x1$ до $x2$, равна разности значений функции распределения от этих аргументов:

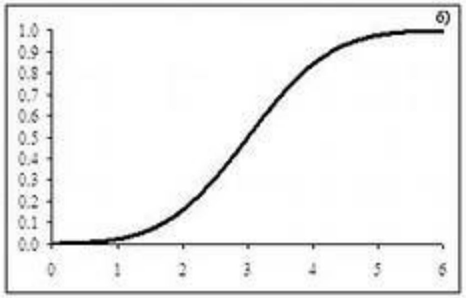
$$P\{x1 < \xi \le x2 = F(x2) - F(x1) .$$

4. Значение функции распределения в минус бесконечности равно нулю:

$$F(-\infty) = 0 .$$

5. Значение функции распределения в плюс бесконечности равно единице:

$$F(\infty) = 1.$$



СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

Определение

Дискретной называется такая случайная величина, множество значений которой либо *конечно*, либо *счётно*.

Непрерывной называется такая случайная величина, множество значений которой *несчётно*.

Определение

Для исчерпывающего описания ***дискретной*** случайной величины, кроме функции распределения, можно использовать *функцию массы*.

Функция массы – это перечень значений ***x1 , x2***, …, принимаемых случайной величиной, которым сопоставлены вероятности ***p1 , p2*** ,…, с которыми эти значения принимаются. Функция массы может быть задана при помощи таблицы, формулы и т.д.

Зная функцию массы, можно определить функцию распределения:

$$F(x) = \sum p_k ,$$

функция плотности распределения

Для *непрерывных* случайных величин также наряду с функцией распределения имеется еще один способ исчерпывающего описания – функция плотности распределения, которая представляет собой производную от функции распределения:

$$\rho(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{1.29}$$

Свойства функции плотности распределения

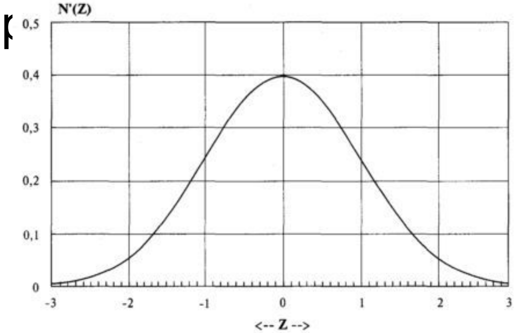
1. Функция плотности всегда неотрицательна $\rho(x) \geq 0$, что с учетом (1.29) следует из того, что функция распределения – неубывающая.

2.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(z)dz$$

3. Вероятность того, что случайная величина находится в интер
от x_1 до x_2, равна:

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = \int^{x_2} \rho(x)dx.$$



4. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1.$$


КОНЕЦ