

Моделирование биотехнических систем

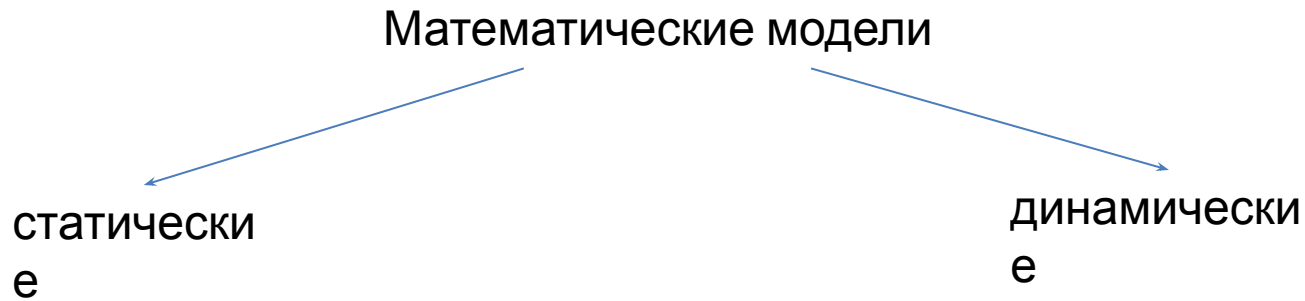
Тема 1. Основные понятия и методы моделирования

Лекция 2. Основы статистического моделирования

Основы статистического моделирования

Задача математического моделирования состоит в построении математической модели объекта и в количественной оценке её неопределённости.

Решение задачи осуществляется в условиях неполной информации о свойствах моделируемого объекта, характеристиках входного воздействия (входных сигналов) и неопределённости выходного результата. Математическим инструментом решения задачи в этих случаях является **теория вероятностей**, а подход к решению задачи – **статистическим моделированием**.



Основы статистического моделирования

Статические модели описывают связь между входными и выходными параметрами объекта в **стационарном состоянии**.

Стационарное состояние – такое условие пребывания объекта, что ни входные, ни выходные параметры не изменяются во времени.

Это соответствует ситуации, когда на вход объекта подаётся постоянное, не изменяющееся во времени воздействие, а значение выходного параметра фиксируется лишь после того, как его величина установится, т.е. перестанет изменяться во времени.

С математической точки зрения статическая модель представляет собой **функцию**.

Функция - математический объект, который одному или нескольким числам (значениям входных параметров) ставит в соответствие число (или несколько чисел), равное величине выходного параметра (параметров).

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots$$

Основы статистического моделирования

Динамические модели связывают вход и выход объекта в **переходных состояниях**.

Переходное состояние – это такое условие пребывания объекта, когда после воздействия на него каждый момент его текущего состояния зависит от предшествующих состояний, в которых этот объект находился ранее. На практике - это проявляется как присущие объекту свойства: инерционность, способность «помнить» свои предыдущие состояния и т.д.

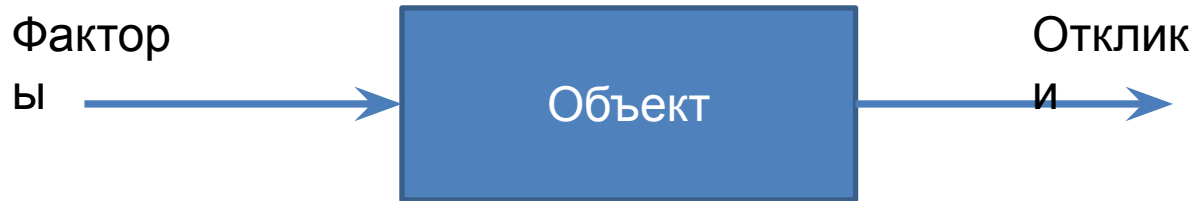
Математически динамическая модель представляет собой **оператор**

Оператор - математический объект, который одной или несколькими функциями времени, задающим изменение во времени входных параметров, ставит в соответствие функцию (или несколько функций) времени, задающих изменение во времени выходного параметра (параметров).

Конкретные математические структуры, реализующие оператор, могут быть различны. Наиболее часто используются дифференциальные уравнения, передаточные функции, корреляционные и спектральные зависимости и т.д.

$$\frac{dy}{dt} = \int_{t=0}^T \sec(2\pi t + \varphi) dt$$

Основы статистического моделирования / Статическое моделирование



«Самой лучшей» модели не существует. Каждому реальному объекту можно сопоставить *множество* одинаково хорошо описывающих его моделей.

При выборе вида математической модели руководствуются соответствием модели и эксперимента - **адекватной** моделью.

Дополнительно руководствуются **критерием простоты**: если нет достаточно веских физических соображений, указывающих на вид модели, то используется самая простая (как правило – полиномиальная) модель.

Многочлен (или полином) от n переменных — это сумма одночленов или, строго, — конечная формальная сумма вида:

$$\sum_I c_I x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n},$$

$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ — набор из целых неотрицательных чисел, именуемых мультииндекс,

c — число, именуемое коэффициентом многочлена, зависящее только от мультииндекса I .

Основы статистического моделирования / Статическое моделирование

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определени

Событием называется любой факт, который в результате опыта может произойти или не произойти. Примеры случайных событий: выпадение шестерки при подбрасывании игральной кости, отказ технического устройства, искажение сообщения при передаче его по каналу связи. С событиями связываются некоторые числа, характеризующие степень объективной возможности появления этих событий, называемые вероятностями событий.

Вероятностью события A в некотором процессе операции называется отношение *среднего* числа единичных операций n , в которых событие A происходит, к объему массовой операции m :

$$P(A) = \frac{n}{m}. \quad (1.1)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.2)$$

$$P(\bar{A}) = \frac{m - n}{m} = 1 - \frac{n}{m} = 1 - P(A). \quad (1.3)$$

события A и B
несовместны:

$$A \cap B = \emptyset. \quad (1.4)$$

Основы статистического моделирования / Статическое моделирование

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Определени

Доверным называется событие W , которое происходит в каждом опыте.

Невозможным называется событие A , которое в результате опыта произойти не

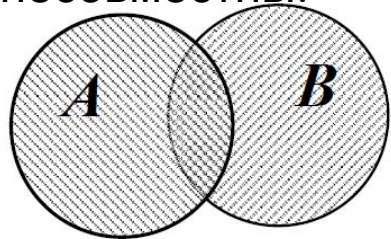
совместными называются события, которые в одном опыте не могут произойти одновременно

Суммой (объединением) двух событий A и B (обозначается $A+B$, $A \cup B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходит хотя бы одно из событий, т.е. A или B , или оба одновременно.

Произведением (пересечением) двух событий A и B (обозначается $A \times B$, $A \cap B$) называется такое событие, которое заключается в том, что происходят оба события A и B вместе.

события A и B
несовместны:

$$A \cap B = \emptyset. \quad (1.4)$$



Теорема сложения вероятностей для произвольных событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (1.6)$$

Теорема сложения вероятностей для несовместных событий

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1.7)$$

Основы статистического моделирования / Статическое моделирование

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

Обобщени

$$\text{е } \forall \{A \mid A_i \cap A_j = \emptyset\} \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.8)$$

Определени

е **Полная группа событий** - если n событий A_i взаимно несовместны и они вместе исчерпывают все возможные исходы эксперимента.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1. \quad (1.9)$$

УСЛОВНЫЕ ВЕРоятности

Теорема умножения вероятностей для произвольных событий

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A). \quad (1.10)$$

$P(AB)$ и $P(BA)$ – условные вероятности: $P(AB)$ – вероятность осуществления события A при условии, что событие B достоверно произошло, а $P(BA)$ – вероятность осуществления события B при условии, что событие A достоверно произошло.

Основы статистического моделирования / Статическое
моделирование
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / УСЛОВНЫЕ
ВЕРОЯТНОСТИ

Определени

е События **A** и **B** называются **независимыми** (или, по-другому, **взаимно-независимыми**)

$$P(A|B) = P(A) \text{ и } P(B|A) = P(B). \quad (1.11)$$

Следстви

е

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (1.12)$$

Теорема умножения вероятностей для независимых событий

Обобщени

е

$$\forall \{A_i \mid P(A_i | A_j) = P(A_i)\}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = \prod_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.13)$$

Основы статистического моделирования / Статическое

моделирование ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

$\langle A \rangle$ - полная группа. Тогда, если известны условные вероятности осуществления произвольного события B при условии осуществления каждого из событий, составляющих полную группу, можно найти безусловную вероятность осуществления события B :

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i). \quad (1.14)$$

Задача Две медсестры играют на деньги. В двух ящиках лежат таблетки: в первом восемь снотворных и две слабительных, а во втором – четыре снотворных и пять слабительных. Из первого ящика во второй наугад (не глядя) переносится одна таблетка, после чего второй ящик перетряхивается, и из него достается одна таблетка и дается пациенту. Какова вероятность, что он не уснет?

Определим **полную группу** событий. Возьмем в качестве события A_1 перенесение из первого ящика во второй таблетки слабительного, а в качестве события A_2 – снотворного. Эти события удовлетворяют условиям полной группы. Безусловные вероятности этих событий очевидно равны вероятностям доставания из первого ящика соответственно таблетки слабительного $P(A_1)$ или снотворного $P(A_2)$, поэтому

$$P(A_1) = 0,2 \text{ и } P(A_2) = 0,8.$$

Если произошло событие A_1 (т.е. во второй ящик перенесено слабительное), то во втором ящике стало шесть слабительных и четыре снотворных таблеток, и поэтому вероятность осуществления события B (вытаскивания слабительного из второго ящика) будет равна $P(B|A_1) = 0,6$. Аналогично для события A_2 (перенесена таблетка снотворного) $P(B|A_2) = 0,5$

По формуле полной вероятности получим, что вероятность достать слабительное из второго ящика

$$P(B) = 0,6 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,8 = 0,52.$$

моделирование ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ФОРМУЛА БАЙЕСА

$\langle A \rangle$ - полная группа, $\exists B \mid P(B) \neq$

0,

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j)}. \quad (1.15)$$

- эта формула позволяет определять вероятности причин по данному (наступившему) следствию

Задач

а

Известно, что томограф состоит из двух независимо работающих узлов 1- система датчиков и 2- система обработки и отображения информации. Работоспособность каждого из них безусловно необходима для работоспособности прибора в целом. Вероятность безотказной работы первого узла за время наработки на отказ по формуляру равна p_1 , а второго узла – p_2 . Прибор работал в течение некоторого времени и отказал. Найти вероятность того, что отказал узел 1, а узел 2 остался работоспособным.

моделирование ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ФОРМУЛА БАЙЕСА

Полная группа событий : **A1** – оба узла работоспособны, **A2** – первый узел отказал, а второй работоспособен, **A3** – первый узел работоспособен, а второй отказал, **A4** – отказали оба узла. Отказ прибора в целом обозначим через **B**.
Рассчитаем вероятности событий:

*априор
и*

$$\begin{aligned}P(B|A_1) &= 0; & P(A_1) &= p_1 p_2; \\P(B|A_2) &= 1; & P(A_2) &= (1 - p_1) p_2; \\P(B|A_3) &= 1; & P(A_3) &= p_1 (1 - p_2); \\P(B|A_4) &= 1; & P(A_4) &= (1 - p_1)(1 - p_2).\end{aligned}$$

$$P(A_2|B) = \frac{1 \cdot (1 - p_1) p_2}{0 \cdot p_1 p_2 + 1 \cdot (1 - p_1) p_2 + 1 \cdot p_1 (1 - p_2) + 1 \cdot (1 - p_1)(1 - p_2)}.$$

Основы статистического моделирования / Статическое
моделирование
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ
КОМБИНАТОРИКИ
ЭЛЕМЕНТЫ
КОМБИНАТОРИКИ

Основой комбинаторики является **базовый принцип подсчета**:

Пусть имеется k независимых операций, и при этом i -я операция имеет n_i исходов (i меняется от 1 до k). Тогда общее количество N исходов в такой системе будет равно произведению числа исходов всех операций:

$$N = n_1 n_2 \cdots n_k = \prod_{i=1}^k n_i . \quad (1.16)$$

Основы статистического моделирования / Статическое
моделирование
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ
КОМБИНАТОРИКИ

Основные комбинаторные схемы

РАЗМЕЩЕНИЕ (*arrangement*)

Постановка задачи: Существует n объектов. Их необходимо разместить в k мест ($k < n$).

Решени

е:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1). \quad (1.17)$$

Знаем, что
факториал

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n. \quad (1.18)$$

$$1! = 1 \text{ и } 0! = 1.$$

окончательн

о

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.19)$$

Основы статистического моделирования / Статическое
моделирование
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ
КОМБИНАТОРИКИ

Основные комбинаторные схемы

ПЕРЕСТАНОВКА

(permutation)

Постановка задачи: Существует n объектов. Их необходимо разместить в k мест.
Причём $k=n$.

Решени

е:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \quad (1.20)$$

Основы статистического моделирования / Статическое

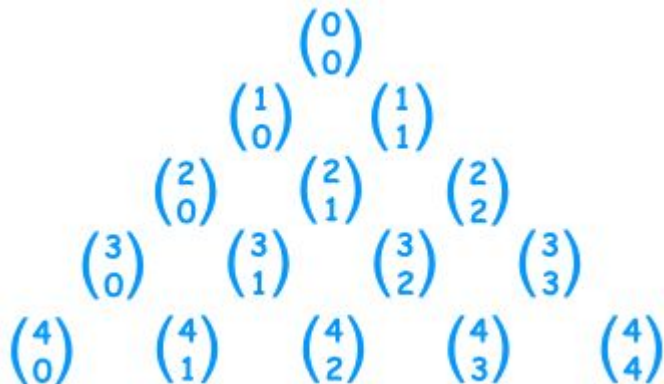
моделирование ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Основные комбинаторные схемы

КОМБИНАЦИЯ (*combination*)

Постановка задачи: Рассчитать сочетание (комбинацию) возможных наборов из k элементов, выбранных из заданного множества, содержащего n различных элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.21)$$



моделирование ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ Основные комбинаторные схемы

КОМБИНАЦИЯ (*combination*)

Пример Вы знаете, что в интернете находится 10 сайтов, на которых пишут о том как стать умным, причём по отзывам друзей 4 из них написаны шарлатанами. Если зайти наугад на 4 сайта, то какова вероятность, что

а) среди отобранных сайтов два написаны шарлатанами?
б) среди отобранных сайтов как минимум два написаны шарлатанами?

Решение Вначале найдем общее число способов отобрать 4 сайта из 10 возможных:

$$N = C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

Два шарлатанских сайта из четырех можно вынуть $C_4^2 = 6$ способами, а две нешарлатанских из шести – $C_6^2 = 15$. В соответствии с базовым принципом подсчета, число исходов, благоприятствующих событию «а», будет равно: $N = 6 \cdot 15 = 90$.

$$P(2) = \frac{N_2}{N} = \frac{C_4^2 \cdot C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}.$$

Вариант (б) – домашнее задание

моделирование ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ Основные комбинаторные схемы

СХЕМА И ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Схемой Бернулли называется система из n независимых испытаний, в каждом из которых могут иметь место «успех» или «неудача» с постоянными вероятностями p .

Вероятность того, что число «успехов» μ будет равно некоторому конкретному числу k , равна:
$$P\{\mu_n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (1.23)$$

где p – вероятность «успеха» в единичном испытании, а

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Следстви

е

Вероятность того, что число «успехов» будет не больше

$$P\{\mu_n \leq m\} = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \sum_{k=m+1}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (1.24)$$

Вероятность того, что число «успехов» будет больше

$$P\{\mu_n > m\} = \sum_{k=m+1}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (1.25)$$

Основы статистического моделирования / Статическое

моделирование ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

Определени

Величина, значение которой не может быть предсказано в точности до тех пор, пока не произведен эксперимент, называется **недетерминированной**.

Во множестве недетерминированных величин можно выделить подмножество таких величин, обладающих статистической устойчивостью, значение которых можно предсказать в среднем. Такие величины называются **случайными**.

Исчерпывающим описанием любой случайной величины является **функция распределения**.

Обозначим через ξ некоторую случайную величину, а через x – произвольное действительное число. Вероятность того, что ξ примет значение, меньшее, чем x , называется **функцией распределения вероятностей случайной величины ξ** :

$$F(x) = P\{\xi < x\}. \quad (1.26)$$

Переопределен

Случайной величиной называется такая величина, значение которой нельзя определить заранее, и для которой **существует функция распределения**.

1. Так как функция распределения представляет собой вероятность, то она изменяется от нуля до единицы: $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. Функция распределения является неубывающей функцией, т.е. из того, что $x_2 > x_1$, следует, что $F(x_2) \geq F(x_1)$, что в математической записи выглядит как

$$x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1) .$$

3. Вероятность того, что случайная величина находится в интервале от x_1 до x_2 , равна разности значений функции распределения от этих аргументов:

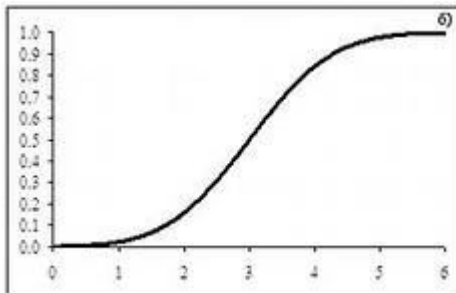
$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) .$$

4. Значение функции распределения в минус бесконечности равно нулю:

$$F(-\infty) = 0 .$$

5. Значение функции распределения в плюс бесконечности равно единице:

$$F(\infty) = 1 .$$



Основы статистического моделирования / Статическое моделирование ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ / ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ОПИСАНИЕ

Определени

е

Дискретной называется такая случайная величина, множество значений которой либо *конечно*, либо *счётно*.

Непрерывной называется такая случайная величина, множество значений которой *несчётно*.

Определени

е

Для исчерпывающего описания **дискретной** случайной величины, кроме функции распределения, можно использовать **функцию массы**.

Функция массы – это перечень значений x_1, x_2, \dots , принимаемых случайной величиной, которым сопоставлены вероятности p_1, p_2, \dots , с которыми эти значения принимаются. Функция массы может быть задана при помощи таблицы, формулы и т.д.

Зная функцию массы, можно определить функцию распределения:

$$F(x) = \sum p_k,$$

Для *непрерывных* случайных величин также наряду с функцией распределения имеется еще один способ исчерпывающего описания – *функция плотности распределения*, которая представляет собой производную от функции распределения:

$$\rho(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.29)$$

Свойства функции плотности распределения

1. Функция плотности всегда неотрицательна $\rho(x) \geq 0$, что с учетом (1.29) следует из того, что функция распределения – неубывающая.

2.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \rho(z) dz$$

3. Вероятность того, что случайная величина находится в интервале от x_1 до x_2 , равна:

$$P\{x_1 < \xi \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx.$$

4. Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = 1.$$

