



Казанский федеральный  
УНИВЕРСИТЕТ



## Построения циркулем и линейкой

Тимербаева Н.В.,  
кпн, доцент кафедры теории и технологий  
преподавания математики и информатики  
Института математики и механики

В задачах на построение на плоскости фигуру  $F$  мы считаем построенной, если эта фигура, изображена (начерчена).

Вообще, строгого определения этому понятию - построить - не дается.

**Основные требования**, которыми характеризуется это понятие, перечисляются в *аксиомах*; которыми мы пользуемся при решении *любой* задачи на построение.



# Аксиомы конструктивной

## геометрии

**A<sub>1</sub>**. Каждая данная фигура  $F$  построена.

**A<sub>2</sub>**. Если построены фигуры  $F_1$  и  $F_2$ , то построено и объединение этих фигур.

**A<sub>3</sub>**. Если:  $F_1$  и  $F_2$  построены, то можно установить является ли их пересечение пустым множеством или нет. Если пересечение данных фигур не пусто, то оно построено.

**A<sub>4</sub>**. Можно построить точку, принадлежащую данной фигуре.

**A<sub>5</sub>**. Можно построить точку, не принадлежащую данной фигуре (если она не совпадает со всей плоскостью).

Аксиомы  $A_1 - A_5$  называют *общими аксиомами конструктивной геометрии*. Этими аксиомами пользуются при решении задач с использованием любых средств построения.



В классической теории геометрических построений на плоскости (и в школьном курсе геометрии) допустимыми средствами построения являются *циркуль* и *линейка*. При этом имеется в виду идеальные циркуль и линейка (без делений). Конструктивные возможности этих абстрактных инструментов опять-таки указываются в аксиомах.

$A_7$ . Если  $A$  и  $B$  (отличные друг от друга) построены, то можно построить луч  $AB$  (аксиома линейки).

$A_8$ . Если построены точка  $O$  и отрезок  $AB$ , то можно построить окружность  $(O, AB)$  (аксиома циркуля).

Аксиомы  $A_1 - A_8$  называются *системой аксиом построения с помощью циркуля и линейки*. Эта система аксиом позволяет выполнить на плоскости следующие, так называемые, *простейшие построения*:



## *Простейшие построения*

$\Pi_1$ . Построить отрезок  $AB$ , если  $A$  и  $B$  построены.

$\Pi_2$ . Построить прямую  $AB$ , если  $A$  и  $B$  построены.

$\Pi_3$ . Построить точку пересечения двух данных непараллельных прямых.

$\Pi_4$ . Построить точки пересечения данных прямой и окружности, если они существуют.

Решение задачи на построение мы сводим к перечисленным аксиомам и простейшим построениям  $\Pi_1$ - $\Pi_4$ . Но в случае сколько-нибудь сложных задач мы можем получить большое число логических «шагов».

Если найдено решение какой-либо задачи, то в дальнейшем разрешается пользоваться этим решением в целом, не расчленяя его на простейшие построения. Существует целый ряд геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются уже в первых главах школьного курса.

Перечислим эти, так называемые, **основные (элементарные) построения**, которые наиболее часто встречаются в практике решения задач на построение, снабдив их поэтапной инструкцией построения (в дальнейшем, при решении задач этапы основных построений не описываются).

## Основные

**$O_1$ . Построение отрезка, равного данному.**

Дано: отрезок длины  $a$ .

Построить: отрезок  $AB$  длины  $a$ .



Построени

1.  $A \in l$  – произвольно.

2.  $\omega(A, a)$ .

3.  $\omega \cap l = B$ .

4.  $AB$  – искомый.



## $O_2$ . Построение угла, равного данному.

Дано:  $\angle AOB$ .

Построить:  $\angle KMN = \angle AOB$ .

Построены

1.  $M \in l$  – произвольно.

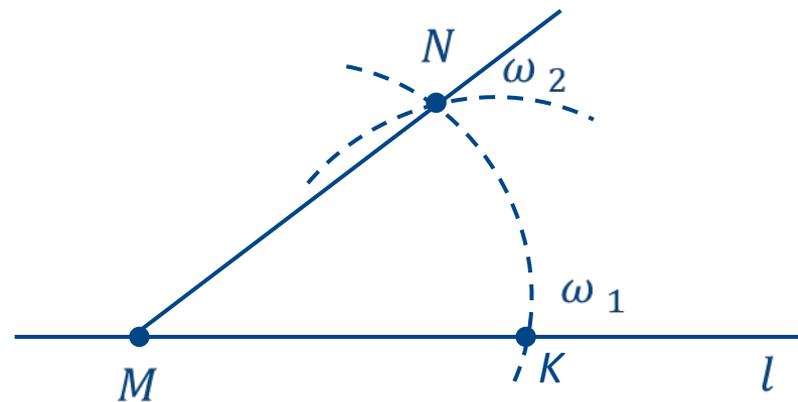
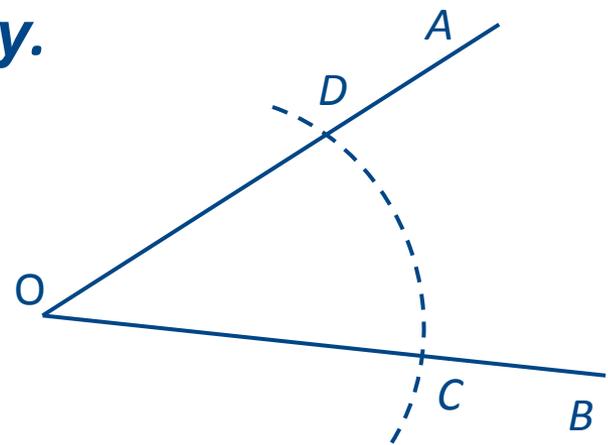
2.  $\omega_1(M, OC)$ .

3.  $\omega_1 \cap l = K$ .

4.  $\omega_2(K, CD)$ .

5.  $\omega_1 \cap \omega_2 = N$ .

6.  $\angle KMN$  – искомый.



Обосновани

1.  $\triangle KMN = \triangle COD$

По III признаку.

В равных фигурах соответствующие элементы равны.

### $O_3$ . Деление отрезка пополам (построение середины отрезка).

Дано: отрезок  $AB$ .

Построить: точку  $O$  – середину  $AB$ .

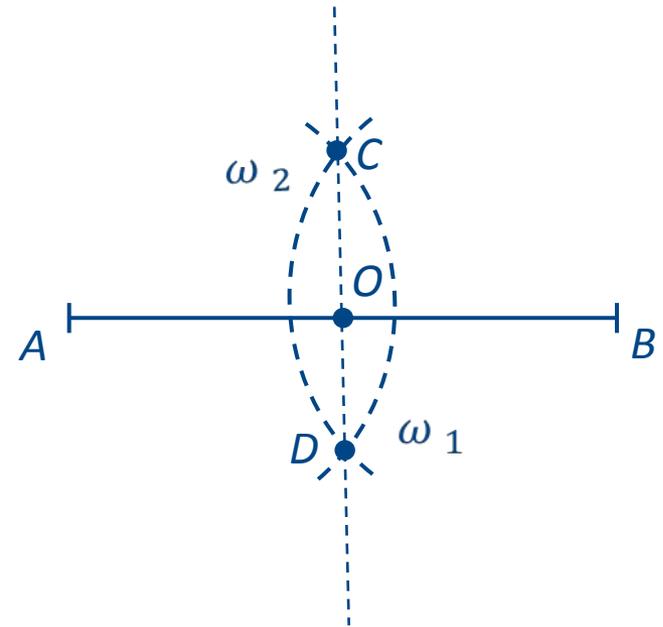
1.  $\omega_1(A, r), r > \frac{AB}{2}$ .

2.  $\omega_2(B, r)$ .

3.  $C, D \in \omega_1 \cap \omega_2$ .

4.  $CD \cap AB = O$ .

5.  $O$  – искомая точка.



*Обосновани*

$ACBD$  – ромб.

В ромбе диагонали точкой пересечения делятся пополам.

## $O_4$ . Деление угла пополам (построение биссектрисы угла).

Дано: угол  $ABC$ .

Построить:  $BD$  – биссектрису угла  $ABC$ .

1.  $\omega_1(B, r)$ .

2.  $\omega_1 \cap AB = K$ .

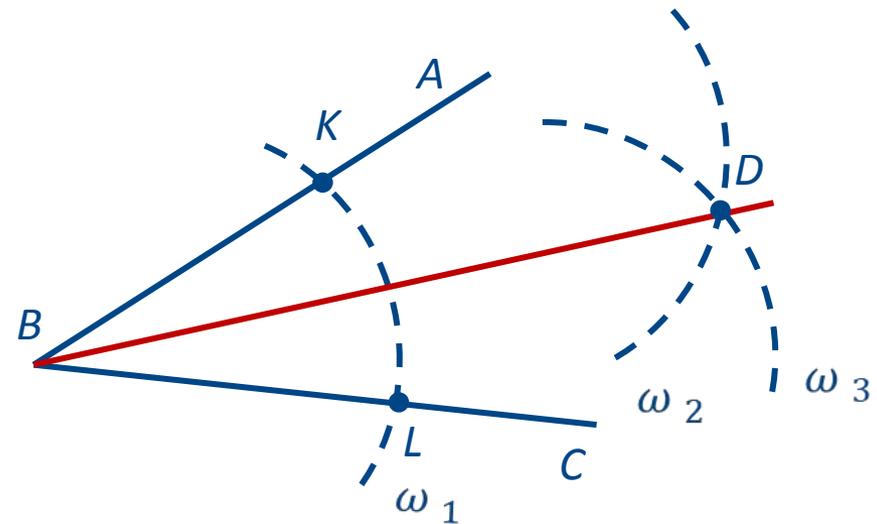
3.  $\omega_1 \cap CB = L$ .

4.  $\omega_2(K, r)$ .

5.  $\omega_3(L, r)$ .

6.  $\omega_1 \cap \omega_2 = D$ .

7.  $BD$  – искомая.



Обосновани

$BKDL$  – ромб.

В ромбе диагонали являются биссектрисами соответствующих углов.



## О<sub>5</sub>. Построение перпендикуляра к данной прямой, проходящей через данную точку.

а) Дано: прямая  $a$ , точка  $A \in a$ .

Построить: прямую, проходящую через точку  $A$ , перпендикулярно к прямой  $a$ .

Построени

1.  $\omega_1(A, r_1)$ .

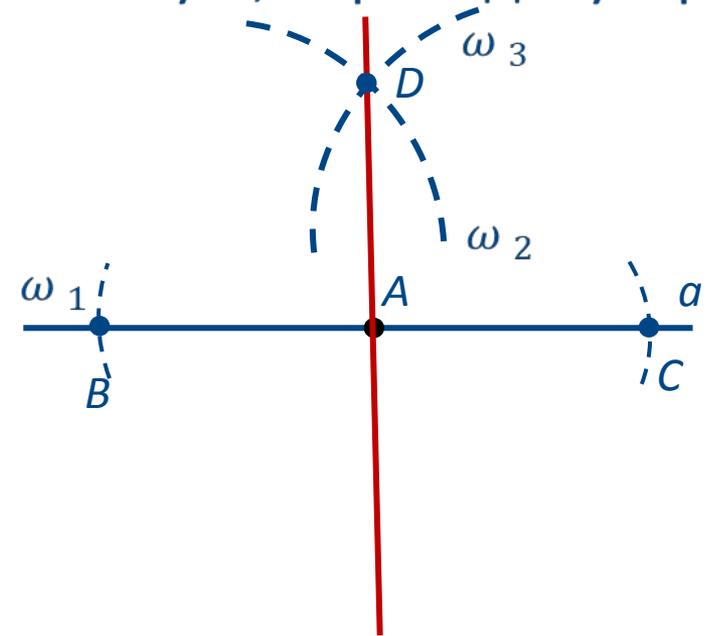
2.  $B, C \in \omega_1 \cap a$ .

3.  $\omega_2(B, r_2), r_2 > \frac{BC}{2}$ .

4.  $\omega_3(C, r_2)$ .

5.  $D = \omega_1 \cap \omega_2$ .

6.  $AD$  – искомая.



Обосновани

$\triangle BDC$  - равнобедренный.

В равнобедренном треугольнике медиана, опущенная на основание, является высотой.

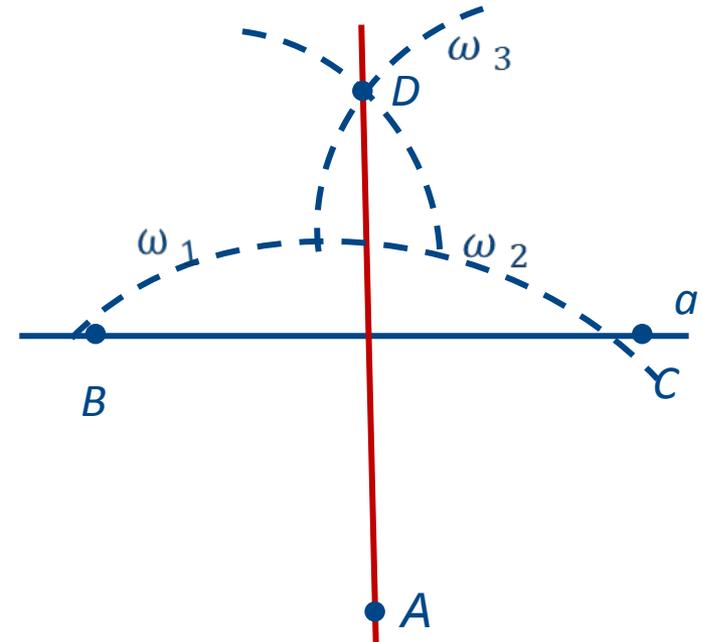


б) Дано: прямая  $a$ , точка  $A \notin a$ .

Построить: прямую, проходящую через точку  $A$ , перпендикулярно к прямой  $a$ .

Построены

1.  $\omega_1(A, r_1)$ .
2.  $B, C \in \omega_1 \cap a$ .
3.  $\omega_2(B, r_1)$ .
4.  $\omega_3(C, r_1)$ .
5.  $D = \omega_1 \cap \omega_2$ .
6.  $AD$  – искомая.



Обосновани

$BDCA$  – ромб.

В ромбе диагонали взаимно-перпендикулярны.

## ***О<sub>6</sub>. Построение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку.***

*Дано: прямая  $a$ , точка  $A \notin a$ .*

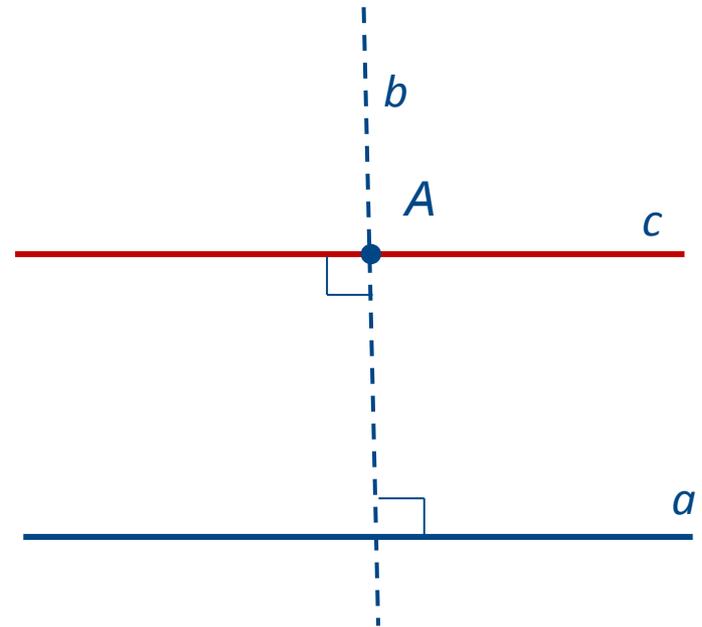
*Построить: прямую, проходящую через точку  $A$ , параллельно прямой  $a$ .*

*I способ (через два перпендикуляра).*

*1.  $A \in b, b \perp a$ .*

*2.  $A \in c, c \perp b$ .*

*3.  $c$  – искомая.*



*Обосновани*

*Два перпендикуляра ( $a, c$ ) к одной прямой ( $b$ ) параллельны.*

## II способ (через

параллелограмм)

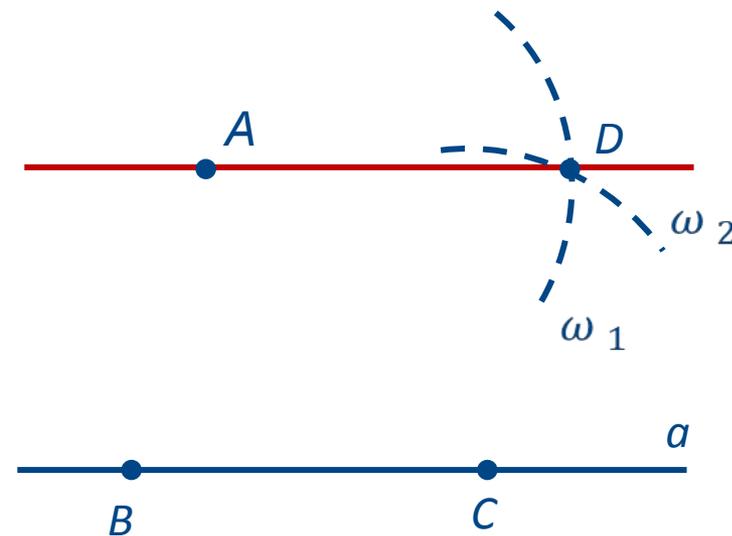
1.  $B, C \in a$  – произвольно.

2.  $\omega_1(A, BC)$ .

3.  $\omega_2(C, AB)$ .

4.  $D = \omega_1 \cap \omega_2$ .

5.  $AD$  – искомая.



### Обосновани

$ABCD$  – параллелограмм.

По признаку: четырехугольник, в котором стороны попарно равны,

Влечет для себя параллельность противоположные стороны параллельны



## О<sub>7</sub>. Построение треугольника по трем сторонам.

Дано: отрезки длины  $a, b, c$ .

Построить: треугольник  $ABC$ .

Построены

1.  $A \in l$  – произвольно.

2.  $\omega_1(A, b)$ .

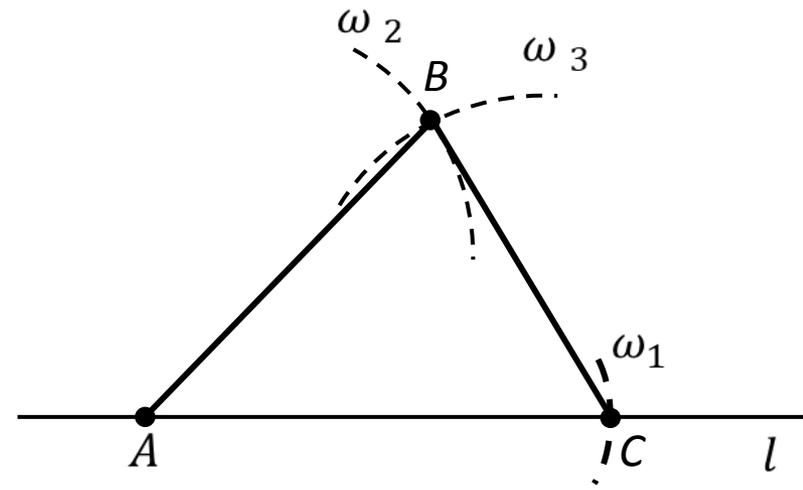
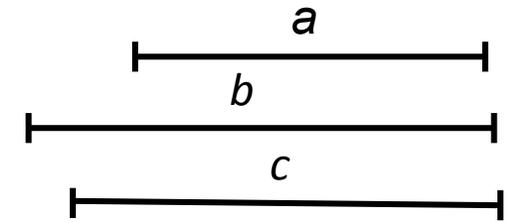
3.  $\omega_1 \cap l = C$ .

4.  $\omega_2(A, c)$ .

5.  $\omega_3(C, a)$ .

6.  $B = \omega_2 \cap \omega_3$ .

7.  $\triangle ABC$  – искомым.



Обосновани

ПВ·III признаку равенства треугольников.

# О<sub>8</sub>. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Дано: отрезки длины  $b$ ,  $c$ , угол  $\alpha$ .

Построить: треугольник  $ABC$ .

Построены

1.  $A \in l$  – произвольно.

2.  $\omega_1(A, b)$ .

3.  $\omega_1 \cap l = C$ .

4.  $\angle CAK = \alpha$ .

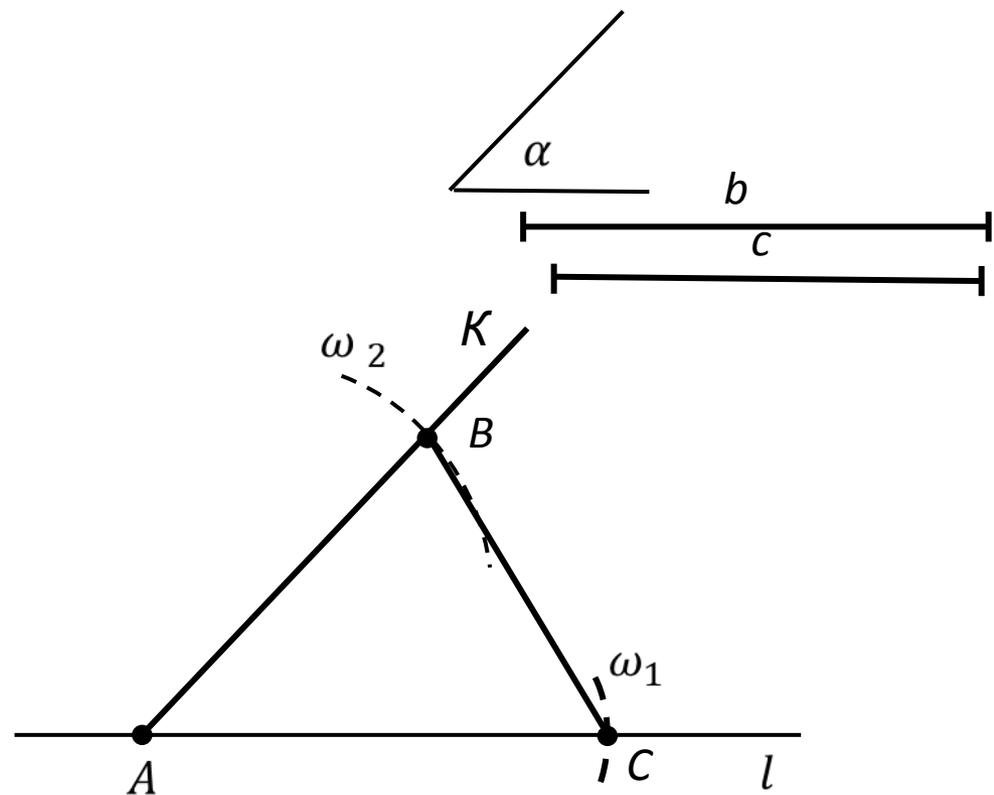
5.  $\omega_2(A, c)$ .

6.  $B = \omega_2 \cap AK$

7.  $\triangle ABC$  – искомый.

Обосновани

По I признаку равенства треугольников.



# О<sub>9</sub>. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.

Дано: отрезок длины  $c$ , углы  $\alpha, \beta$ .

Построить: треугольник  $ABC$ .

Построены

1.  $A \in l$  – произвольно.

2.  $\omega(A, b)$ .

3.  $\omega \cap l = C$ .

4.  $\angle CAK = \alpha$ .

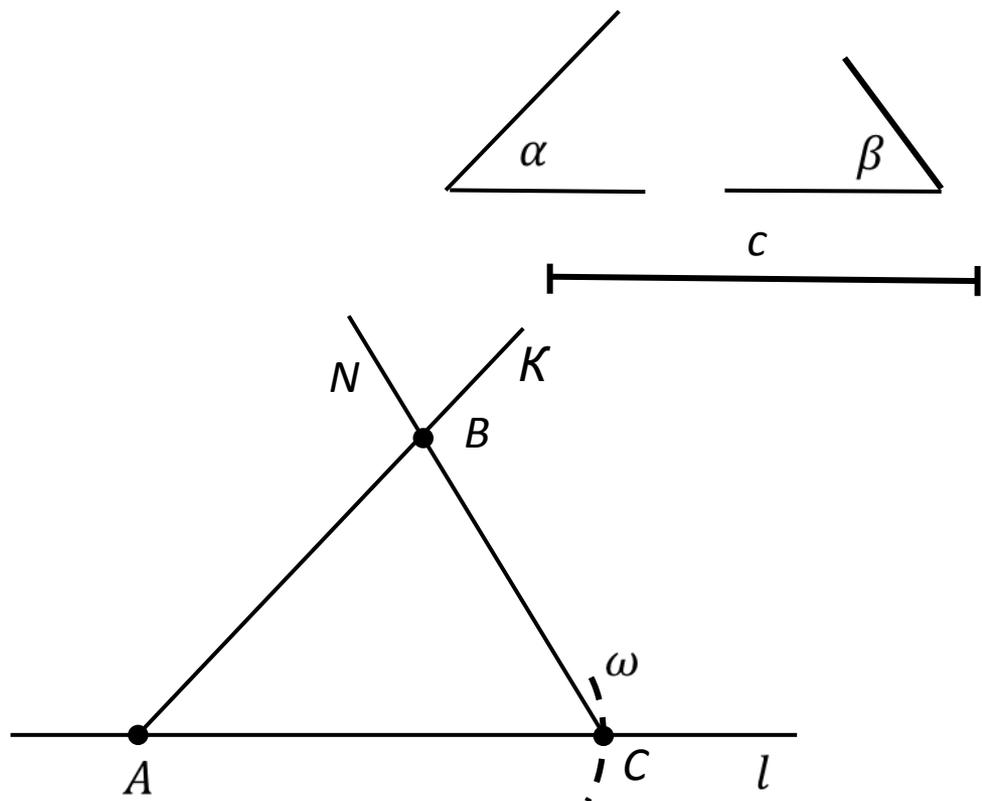
5.  $\angle ACN = \beta$ .

6.  $B = AK \cap CN$ .

7.  $\triangle ABC$  – искомый.

Обосновани

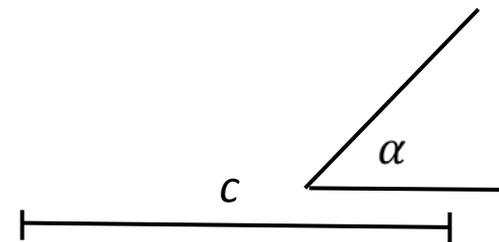
По II признаку равенства треугольников.



**$O_{10}$ . Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу.**

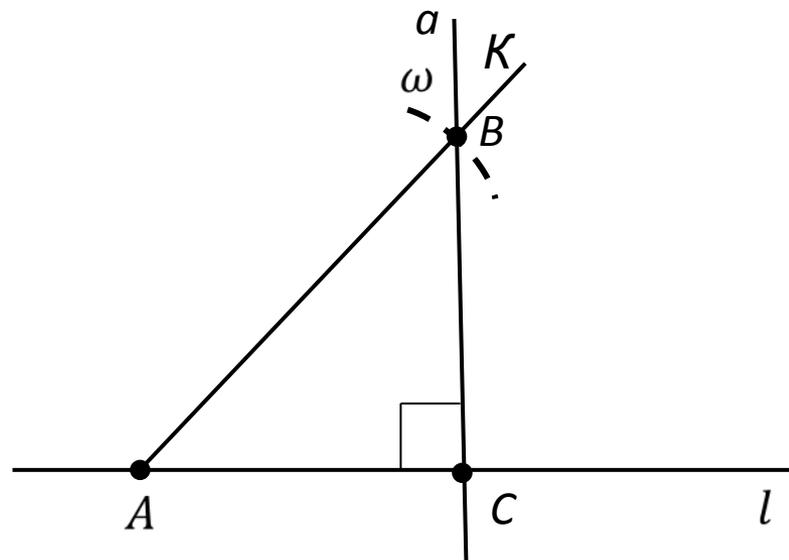
Дано: отрезок длины  $c$ , угол  $\alpha$ .

Построить: прямоугольный треугольник  $ABC$ .



**Построени**

1.  $A \in l$  – произвольно.
2.  $\angle lAK = \alpha$ .
3.  $\omega(A, c)$ .
4.  $\omega \cap AK = B$ .
5.  $B \in a, a \perp l$ .
6.  $C = A \cap l$ .
7.  $\triangle ABC$  – искомый.



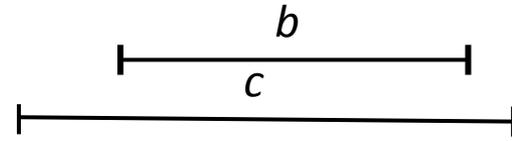
**Обосновани**

Пб признаку равенства прямоугольных треугольников.

# $O_{11}$ . Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.

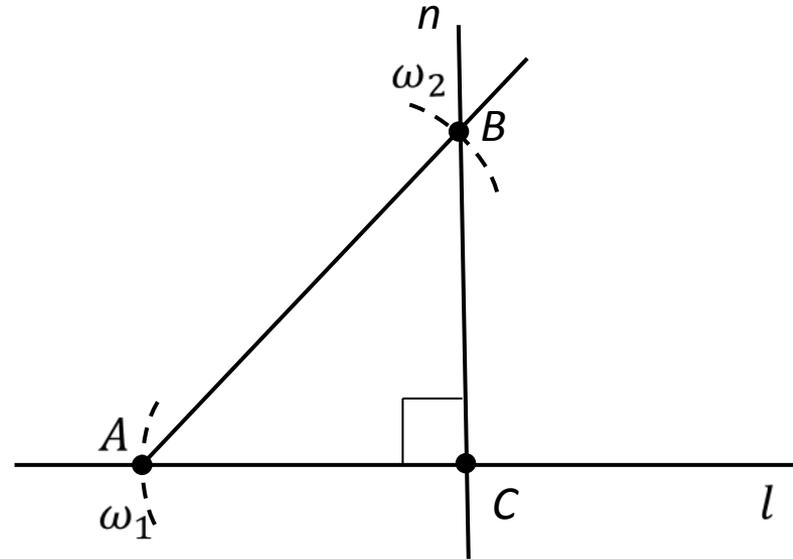
Дано: отрезки длины  $b$  и  $c$ .

Построить: прямоугольный треугольник  $ABC$ .



Построены

1.  $C \in l$  – произвольно.
2.  $C \in n, n \perp l$ .
3.  $\omega_1(C, b)$ .
4.  $\omega_1 \cap l = A$ .
5.  $\omega_2(A, c)$ .
6.  $\omega_2 \cap n = B$ .
7.  $\triangle ABC$  – искомый.



Обосновани

По признаку равенства прямоугольных треугольников.

**$O_{12}$ . Построение касательной к данной окружности, проходящей через данную точку.**

Дано: окружность  $\omega(O)$ , точка  $A$  вне ее.

Построить: касательную к окружности  $\omega(O)$ , проходящую через точку  $A$ .

*Построены*

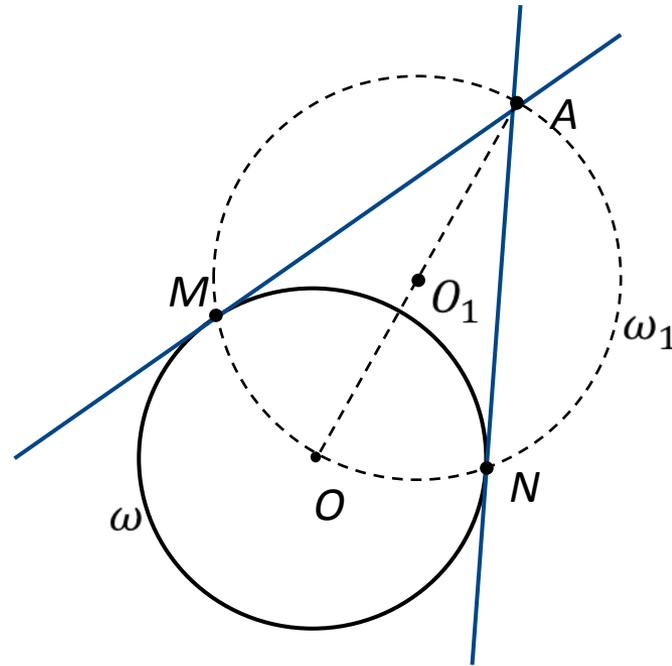
1.  $e$ .

2.  $O_1$  – середина  $OA$ .

3.  $\omega_1(O_1, O_1O)$ .

4.  $M, N \in \omega_1 \cap \omega(O)$ .

5.  $AM, AN$  –  
искомые.



*Обосновани*

Треугольники  $AMO, ANO$  – прямоугольные

(так как углы  $AMO, ANO$  опираются на диаметр  $AO$ ).

$AM, AN$  – касательные (по признаку касательной).

# МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Задача на построение состоит в том, что требуется построить указанными инструментами некоторую фигуру  $F$ , если даны некоторые фигуры  $F_1, F_2, \dots$  и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур.

Каждая фигура, удовлетворяющая условию задачи, называется *решением* этой задачи.

*Найти решение* задачи на построение – значит, свести ее к конечному числу простейших и основных построений. При этом может оказаться, что задача на построение имеет несколько различных решений.

Решить задачу – значит найти все ее решения. Для этого нужно:

а) установить конечное число случаев, исчерпывающих все возможности в выборе данных;

б) для каждого случая дать ответ – имеет ли задача решение и сколько этих решений.



При решении каждой сколь-нибудь сложной задачи возникает вопрос – как нужно *рассуждать*, чтобы найти способ построения искомой фигуры, выяснить – сколько решений и т.

Решение всех этих вопросов облегчается, если придерживаться *определенной схемы*: **анализ, построение, доказательство, исследование**.

При этом конечно, возможны отклонения от этой схемы. Например, если знаем как строить искомую фигуру, то никакой анализ не нужен.

## **АНАЛИЗ.**

Анализ – это *поиск* способа решения задачи. В анализе мы находим те зависимости, которые имеют место между элементами данной и искомой фигур. Анализ – подготовительный, предварительный этап решения задачи.



**ПОСТРОЕНИЕ** состоит в том, чтобы указать последовательность простейших и основных построений, которые надо выполнить для решения задачи. Построение должно сопровождаться графическим выполнением каждого шага с помощью инструментов, принятых для построения.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

**ИССЛЕДОВАНИЕ.** Отвечаем на вопросы:

- а) при любом ли выборе данных задача имеет решение?
- б) сколько различных решений имеет задача при каждом *возможном* выборе данных?





**Казанский федеральный  
УНИВЕРСИТЕТ**

**Спасибо за внимание!**