Казанский федеральный
УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 1

Казанский федеральный
УНИВЕРСИТЕТ

Построения циркулем и линейкой

Тимербаева Н.В.,
кпн, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики
Института математики и механики

В задачах на построение на плоскости фигуру F мы считаем построенной, если эта фигура, изображена (начерчена).

Вообще, строгого определения этому понятию - построить - не дается.

Основные требования, которыми характеризуется это понятие, перечисляются в *аксиомах*; которыми мы пользуемся при решении *любой* задачи на построение.

Аксиомы конструктивной геометрии

A_1. Каждая данная фигура F построена.

A_2. Если построены фигуры F_1 и F_2, то построено и объединение этих фигур.

A_3. Если: F_1 и F_2 построены, то можно установить является ли их пересечение пустым множеством или нет. Если пересечение данных фигур не пусто, то оно построено.

A_4. Можно построить точку, принадлежащую данной фигуре.

A_5. Можно построить точку, не принадлежащую данной фигуре (если она не совпадает со всей плоскостью).

Аксиомы $A_1 – A_5$ называют *общими аксиомами конструктивной геометрии*. Этими аксиомами пользуются при решении задач с использованием любых средств построения.

В классической теории геометрических построений на плоскости (и в школьном курсе геометрии) допустимыми средствами построения являются *циркуль* и *линейка*. При этом имеется в виду идеальные циркуль и линейка (без делений). Конструктивные возможности этих абстрактных инструментов опять-таки указываются в аксиомах.

A_7. Если A и B (отличные друг от друга) построены, то можно построить луч AB (аксиома линейки).
A_8. Если построены точка O и отрезок AB, то можно построить окружность (O, AB) (аксиома циркуля).

Аксиомы $A_1 – A_8$ называются *системой аксиом построения с помощью циркуля и линейки.* Эта система аксиом позволяет выполнить на плоскости следующие, так называемые, *простейшие построения*:

Простейшие построения

$П_1$. Построить отрезок *AB,* если *A* и *B* построены.

$П_2$. Построить прямую *AB,* если *A* и *B* построены.

$П_3$. Построить точку пересечения двух данных непараллельных прямых.

$П_4$. Построить точки пересечения данных прямой и окружности, если они существуют.

Решение задачи на построение мы сводим к перечисленным аксиомам и простейшим построениям $П_1$-$П_4$. Но в случае сколько-нибудь сложных задач мы можем получить большое число логических «шагов».

Если найдено решение какой-либо задачи, то в дальнейшем разрешается пользоваться этим решением в целом, не расчленяя его на простейшие построения. Существует целый рад геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются уже в первых главах школьного курса.

Перечислим эти, так называемые, ***основные* (элементарные) *построения***, которые наиболее часто встречаются в практике решения задач на построение, снабдив их поэтапной инструкцией построения (в дальнейшем, при решении задач этапы основных построений не описываются).

Основные построения

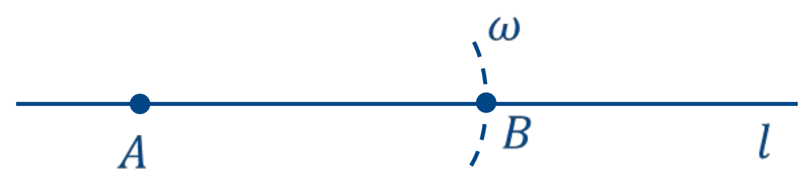
O_1. *Построение отрезка, равного данному.*

Дано: отрезок длины *a*.

Построить: отрезок *AB* длины *a*.

Построение

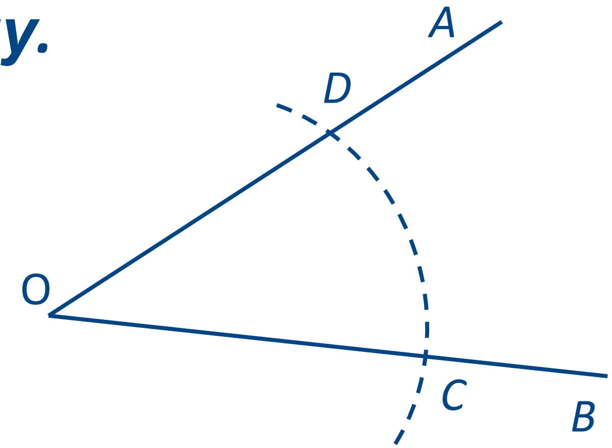
1. $A \in l$ – произвольно.
2. $\omega(A, a)$.
3. $\omega \cap l = B$.
4. AB – искомый.



О$_2$. Построение угла, равного данному.

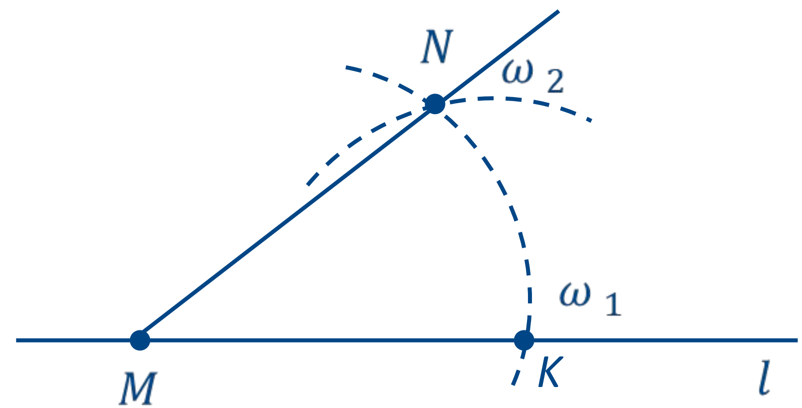
Дано: $\angle AOB$.

Построить: $\angle KMN = \angle AOB$.



Построение.

1. $M \in l$ – произвольно.
2. $\omega_1(M, OC)$.
3. $\omega_1 \cap l = K$.
4. $\omega_2(K, CD)$.
5. $\omega_1 \cap \omega_2 = N$.
6. $\angle KMN$– искомый.



Обоснование.

$\Delta KMN = \Delta COD$

По III признаку.

В равных фигурах соответствующие элементы равны.

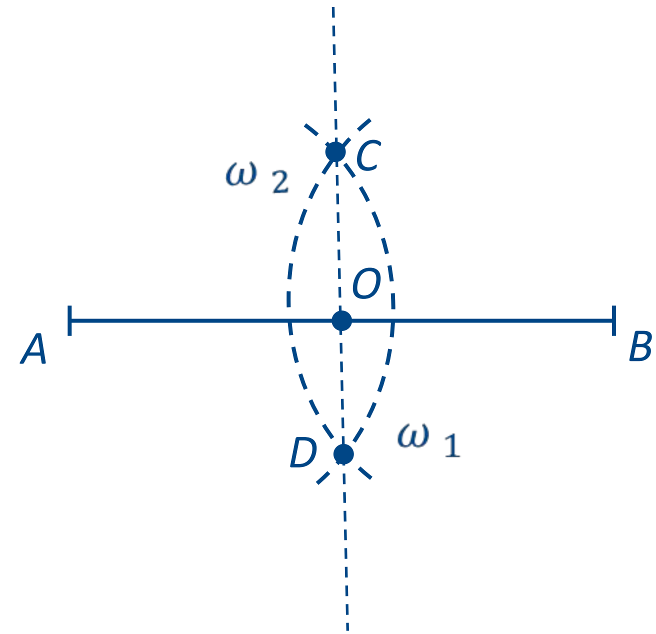
O_3. *Деление отрезка пополам (построение середины отрезка).*

Дано: отрезок *AB*.

Построить: точку *O* – середину *AB*.

Построение:

1. $\omega_1(A, r), r > \frac{AB}{2}$.
2. $\omega_2(B, r)$.
3. $C, D \in \omega_1 \cap \omega_2$.
4. $CD \cap AB = O$.
5. O – искомая точка.



Обоснование.

$ACBD$ – ромб.

В ромбе диагонали точкой пересечения делятся пополам.

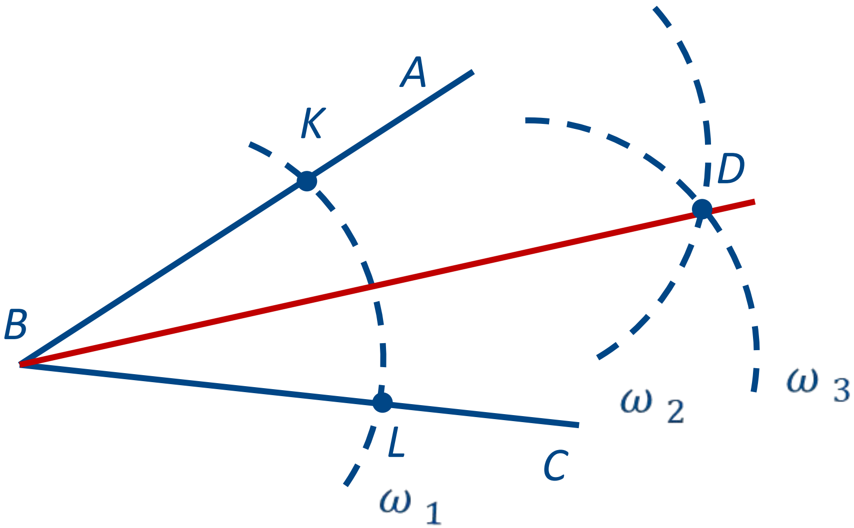
O_4. Деление угла пополам (построение биссектрисы угла).

Дано: угол *ABC*.

Построить: *BD* – биссектрису угла *ABC*.

1. $\omega_1(B, r)$.
2. $\omega_1 \cap AB = K$.
3. $\omega_1 \cap CB = L$.
4. $\omega_2(K, r)$.
5. $\omega_3(L, r)$.
6. $\omega_1 \cap \omega_2 = D$.

5. BD – искомая.



Обоснование:

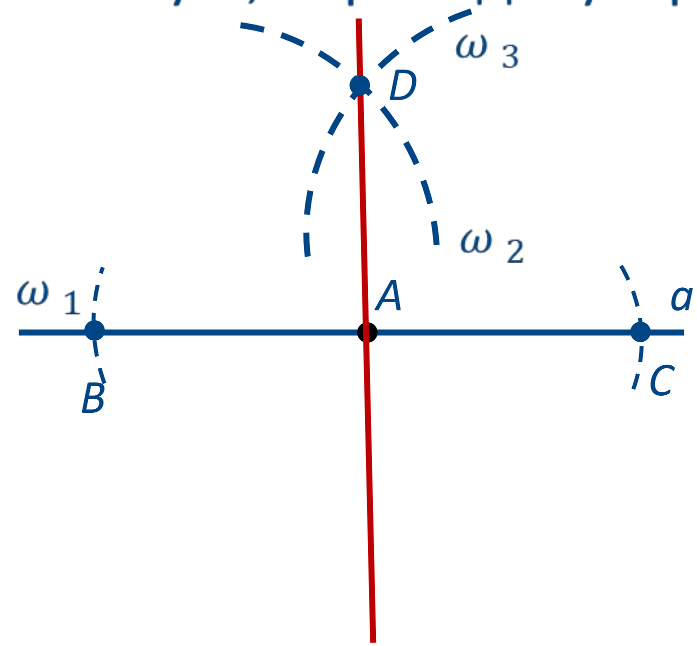
$BKDL$ – ромб.

В ромбе диагонали являются биссектрисами соответствующих углов.

О$_5$. Построение перпендикуляра к данной прямой, проходящей через данную точку.

а) Дано: прямая *а*, точка $A \in a$.

Построить: прямую, проходящую через точку *А*, перпендикулярно к прямой *а*.



Построение

1. $\omega_1(A, r_1)$.
2. $B, C \in \omega_1 \cap a$.
3. $\omega_2(B, r_2), r_2 > \frac{BC}{2}$.
4. $\omega_3(C, r_2)$.
5. $D = \omega_1 \cap \omega_2$.
6. AD – искомая.

Обоснование:

ΔBDC - равнобедренный.

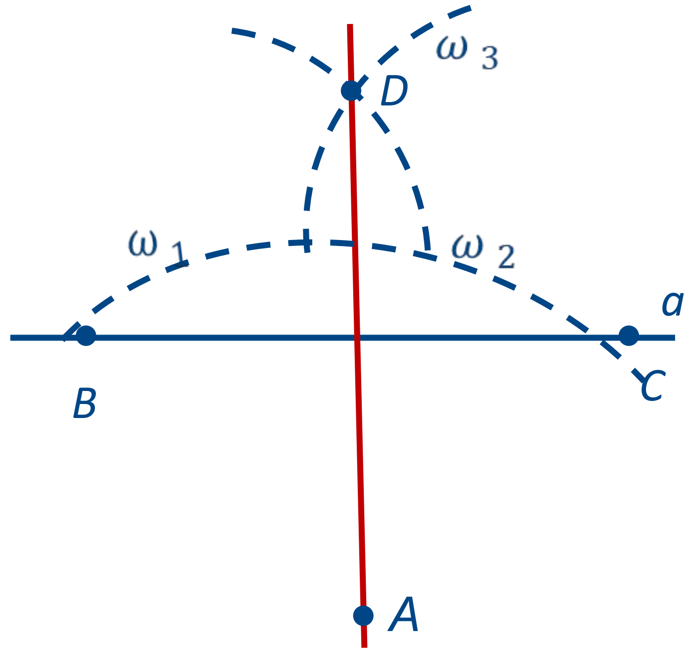
В равнобедренном треугольнике медиана, опущенная на основание,
является высотой.

б) Дано: прямая *a*, точка $A \notin a$.

Построить: прямую, проходящую через точку *A*, перпендикулярно к прямой *a*.

Построение

1. $\omega_1(A, r_1)$.
2. $B, C \in \omega_1 \cap a$.
3. $\omega_2(B, r_1)$.
4. $\omega_3(C, r_1)$.
5. $D = \omega_1 \cap \omega_2$.
6. AD – искомая.



Обоснование

$BDCA -$ ромб.

В ромбе диагонали взаимно-перпендикулярны.

О$_6$. *Построение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку.*

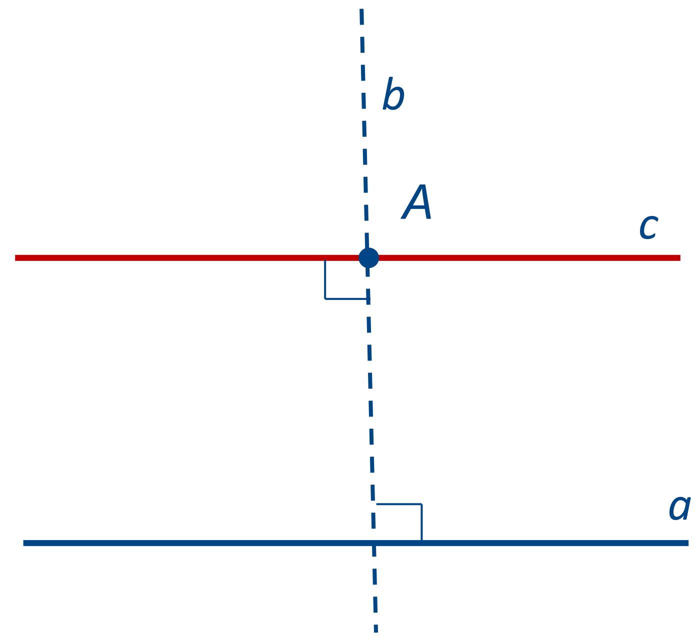
Дано: прямая a, точка $A \notin a$.

Построить: прямую, проходящую через точку A, параллельно прямой a.

I способ (через два перпендикуляра).

Построение.

1. $A \in b, b \perp a.$
2. $A \in c, c \perp b.$
3. c – искомая.

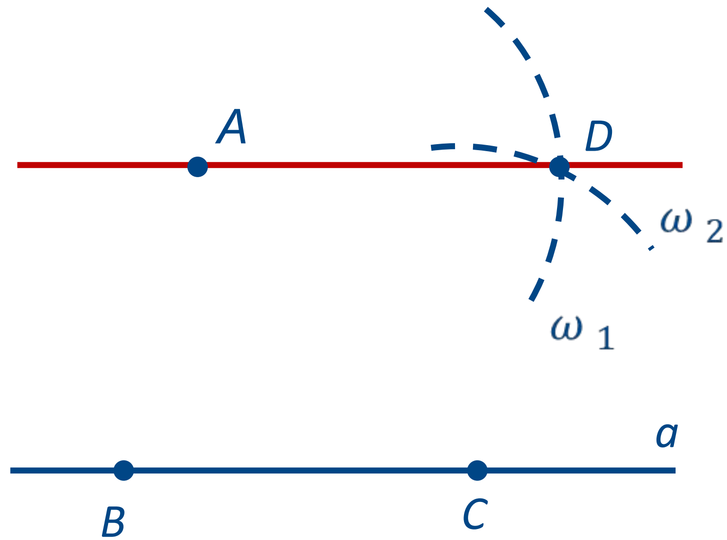


Обоснование.

Два перпендикуляра (a, c) к одной прямой (b) параллельны.

II способ (через параллелограмм).

1. $B, C \in a$ – произвольно.
2. $\omega_1(A, BC)$.
3. $\omega_2(C, AB)$.
4. $D = \omega_1 \cap \omega_2$.
5. AD – искомая.



Обоснование.

$ABCD$ – параллелограмм.

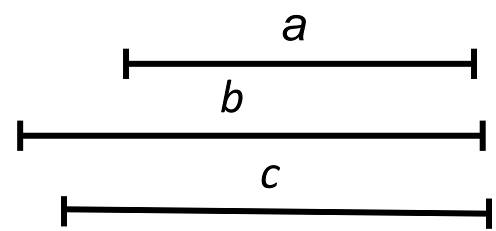
По признаку: четырехугольник, в котором стороны попарно равны, является параллелограммом.

Значит, противоположные стороны параллельны

O_7. Построение треугольника по трем сторонам.

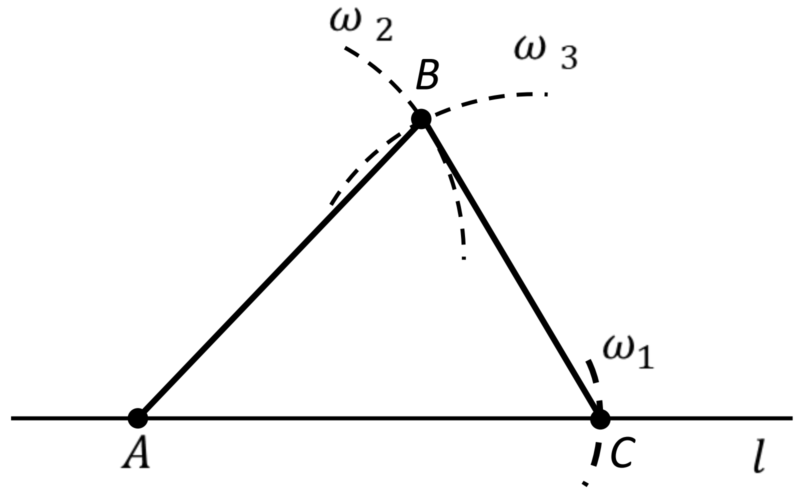
Дано: отрезки длины *a*, *b*, *c*.

Построить: треугольник *ABC*.



Построение:

1. $A \in l$ – произвольно.
2. $\omega_1(A, b)$.
3. $\omega_1 \cap l = C$.
4. $\omega_2(A, c)$.
5. $\omega_3(C, a)$.
6. $B = \omega_2 \cap \omega_3$.
7. ΔABC – искомый.



Обоснование:

По III признаку равенства треугольников.

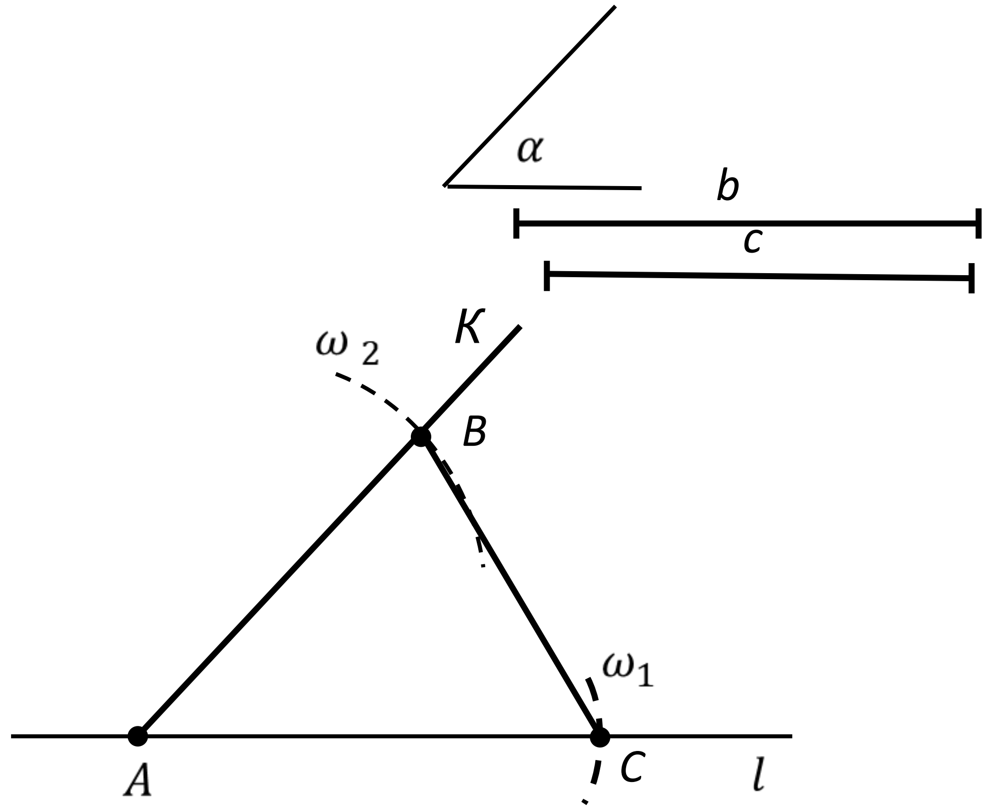
O_8. *Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.*

Дано: отрезки длины *b*, *c*, угол α.

Построить: треугольник *ABC.*

Построение.

1. $A \in l$ – произвольно.
2. $\omega_1(A, b)$.
3. $\omega_1 \cap l = C$.
4. $\angle CAK = \alpha$.
5. $\omega_2(A, c)$.
6. $B = \omega_2 \cap AK$
7. ΔABC – искомый.



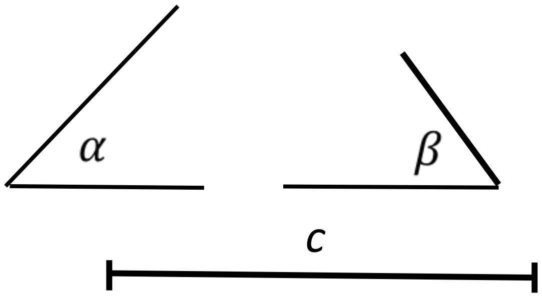
Обоснование.

По I признаку равенства треугольников.

O_9. *Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.*

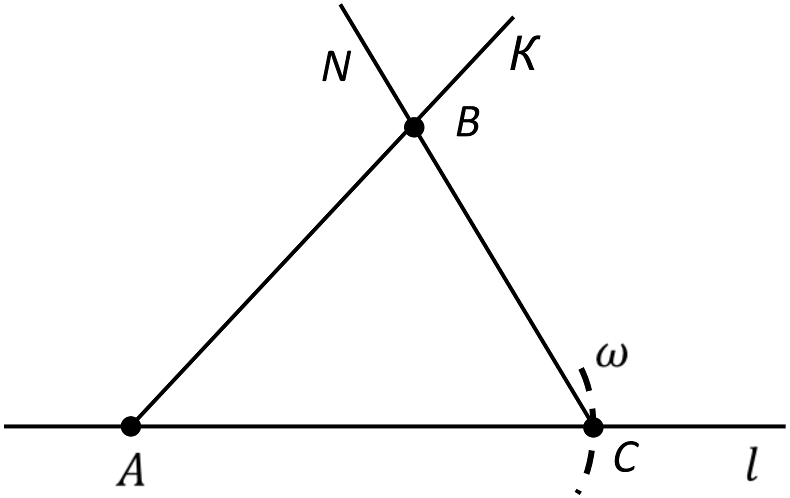
Дано: отрезок длины *с*, углы α, β.

Построить: треугольник *ABC.*



Построение.

1. $A \in l$ – произвольно.
2. $\omega(A, b)$.
3. $\omega \cap l = C$.
4. $\angle CAK = \alpha$.
5. $\angle ACN = \beta$.
6. $B = AK \cap CN$.
7. ΔABC – искомый.



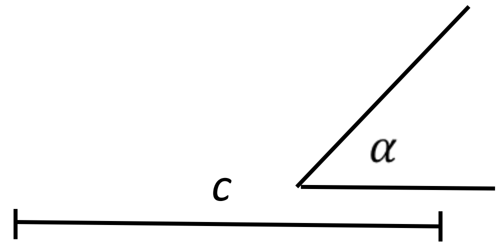
Обоснование.

По II признаку равенства треугольников.

O_{10}. ***Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу.***

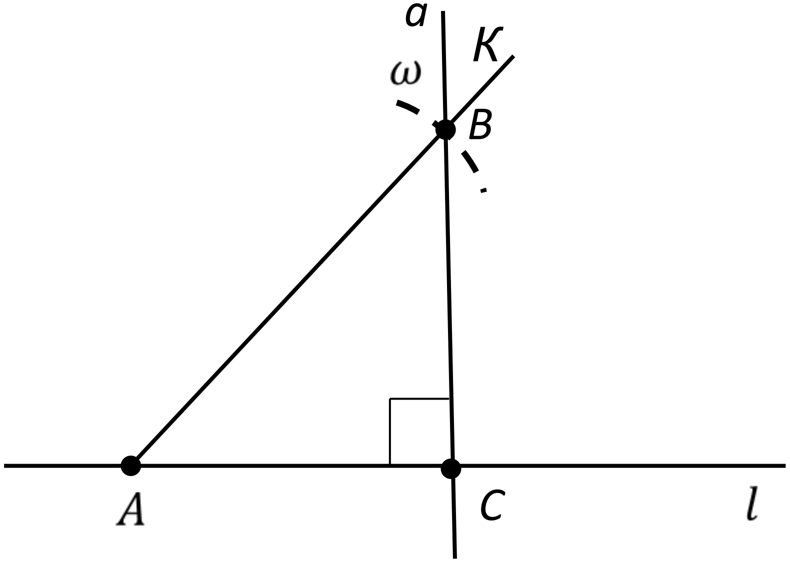
Дано: отрезок длины *с*, угол α.

Построить: прямоугольный треугольник *АВС.*



Построение.

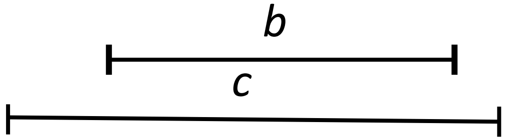
1. $A \in l$ – произвольно.
2. $\angle lAK = \alpha$.
3. $\omega(A, c)$.
4. $\omega \cap AK = B$.
5. $B \in a, a \perp l$.
6. $C = A \cap l$.
7. ΔABC – искомый.



Обоснование.

По признаку равенства прямоугольных треугольников.

$О_{11}$. *Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.*

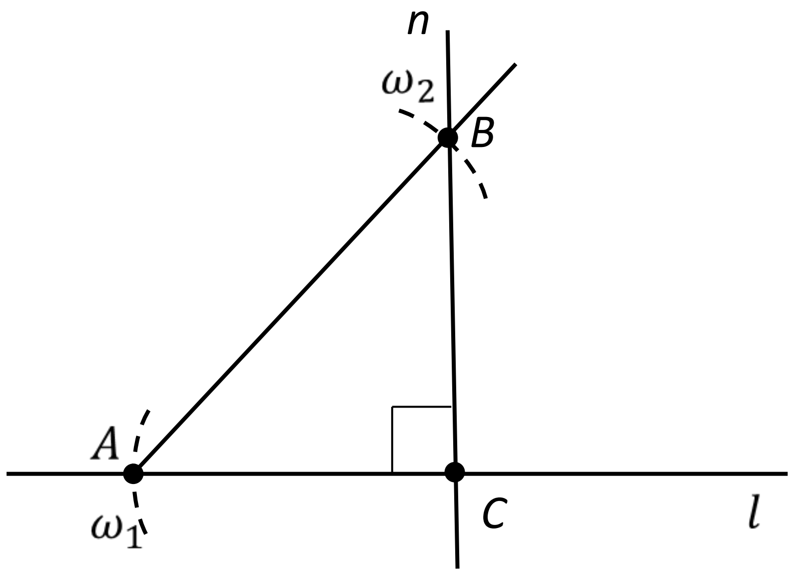


Дано: отрезки длины *b* и *c*.

Построить: прямоугольный треугольник *ABC.*

Построение.

1. $C \in l$ – произвольно.
2. $C \in n, n \perp l$.
3. $\omega_1(C, b)$.
4. $\omega_1 \cap l = A$.
5. $\omega_2(A, c)$.
6. $\omega_2 \cap n = B$.
7. ΔABC – искомый.



Обоснование.

По признаку равенства прямоугольных треугольников.

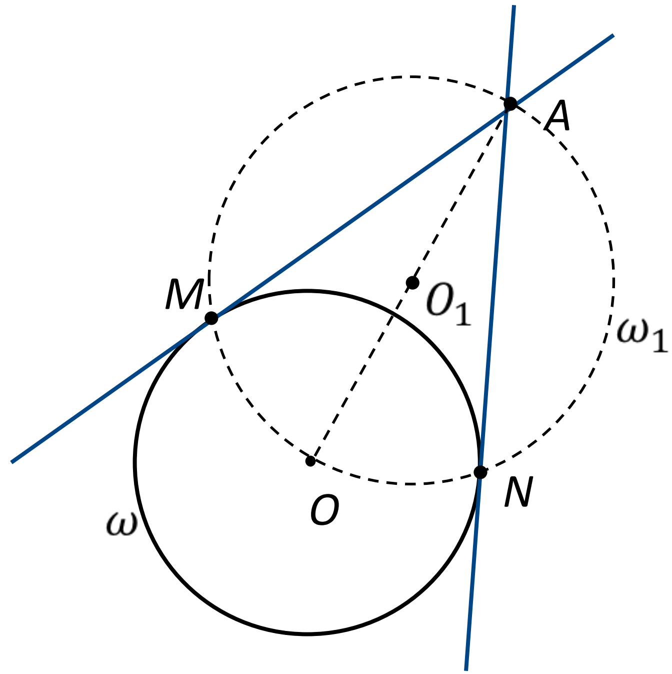
O_{12}. *Построение касательной к данной окружности, проходящей через данную точку.*

Дано: окружность $\omega(O)$, точка A вне ее.

Построить: касательную к окружности $\omega(O)$, проходящую через точку A.

Построение.

1. OA.
2. O_1 – середина OA.
3. $\omega_1(O_1, O_1O)$.
4. $M, N \in \omega_1 \cap \omega(O)$.
5. AM, AN – искомые.



Обоснование.

Треугольники AMO, ANO - прямоугольные (так как углы AMO, ANO опираются на диаметр AO).

AM, AN – касательные (по признаку касательной).

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Задача на построение состоит в том, что требуется построить указанными инструментами некоторую фигуру F, если даны некоторые фигуры $F_1, F_2, \ldots$ и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур.

Каждая фигура, удовлетворяющая условию задачи, называется *решением* этой задачи.

Найти решение задачи на построение – значит, свести ее к конечному числу простейших и основных построений. При этом может оказаться, что задача на построение имеет несколько различных решений.

Решить задачу – значит найти все ее решения. Для этого нужно:

а) установить конечное число случаев, исчерпывающих все возможности в выборе данных;

б) для каждого случая дать ответ – имеет ли задача решение и сколько этих решений.

При решении каждой сколь-нибудь сложной задачи возникает вопрос – как нужно *рассуждать,* чтобы найти способ построения искомой фигуры, выяснить – сколько решений и т. д.

Решение всех этих вопросов облегчается, если придерживаться *определенной схемы*: анализ, построение, доказательство, исследование.

При этом конечно, возможны отклонения от этой схемы. Например, если знаем как строить искомую фигуру, то никакой анализ не нужен.

АНАЛИЗ.

Анализ – это *поиск* способа решения задачи. В анализе мы находим те зависимости, которые имеют место между элементами данной и искомой фигур. Анализ – подготовительный, предварительный этап решения задачи.

ПОСТРОЕНИЕ состоит в том, чтобы указать последовательность простейших и основных построений, которые надо выполнить для решения задачи. Построение должно сопровождаться графическим выполнением каждого шага с помощью инструментов, принятых для построения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

ИССЛЕДОВАНИЕ. Отвечаем на вопросы:

а) при любом ли выборе данных задача имеет решение?

б) сколько различных решений имеет задача при каждом *возможном* выборе данных?

Казанский федеральный
УНИВЕРСИТЕТ

Спасибо за внимание!