Задача линейного программирования. Табличный симплекс-метод

Рассмотрим ЗЛП

$$\begin{cases} \max\left(2x_1 + x_2\right) \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем к канонической форме

$$\begin{cases} \max\left(2x_1 + x_2\right) \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\left(2x_1 + x_2\right) \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \\ x_3 \ge 0 \\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Матричный вид ЗЛП

$$\begin{cases} \max\left(2x_1 + x_2\right) \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Начальный базис

- 0. Начальный базис

  P = E

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 2 & 1 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

- Базис: x_3, x_4

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 5$$

$$x_3 = 3 - 3x_1 - x_2$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 2x_2$$

Базис x_3, x_4

$$x_3 = 3 - 3x_1 - x_2$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 2x_2$$

$$f(X) = 2x_1 + x_2$$

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- 1. Допустимость базиса

$$b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$$

b
3>0
5>0

допустимый

- 2. Оптимальность базиса

$$c_j \leq 0,\ j = \overline{1,k}$$

f	2>0	1>0

неоптимальный

Базис x_3, x_4

- 3. Проверка наличия решения

$$c_l \geq 0 \rightarrow \exists a_{il} < 0$$

	x_1	x_2	b
x_3	-3<0	-1<0	3
x_4	-2<0	-2<0	5
f	2>0	1>0	0

ОДР замкнута, решение есть

- 4. Ввод в базис

$$c_r = \max_{1<j<k} c_j$$

	x_1	x_2
f	2	1

Разрешающий столбец: x_1

Базис x_3, x_4

- 5. Вывод из базиса

$$s = \arg\min_i \left(-\frac{b_i}{a_{ir}} \right) \Bigg|_{a_{ir} < 0}$$

	x_1	x_2	b	$-b/x_1$
x_3	-3<0	-1	3	1
x_4	-2<0	-2	5	5/2
f	2	1	0	

Разрешающая строка: x_3 Разрешающий элемент: $a_{31}=-3$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающий элемент заменяется на 1

	x_3	x_2	b
x_1	1		
x_4			
f			

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающий столбец (кроме разрешающего элемента) без изменений

	x_3	x_2	b
x_1	1		
x_4	-2		
f	2		

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающая строка (кроме разрешающего элемента) меняет знак

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2		
f	2		

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	
f	2		

- $a'_{42} = a_{42}a_{31} - a_{41}a_{32}$

$$a'_{42} = -2 \cdot (-3) -$$

$$-(-2) \cdot (-1) =$$

$$= 6 - 2 = 4$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	-9
f	2		

- $$b_4' = b_4 a_{31} - b_3 a_{41}$$

$$b_4' = 5 \cdot (-3) -$$

$$-(-2) \cdot 3 =$$

$$= -15 + 6 = -9$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	-9
f	2	-1	

- $$c_2' = c_2 a_{31} - c_1 a_{32}$$

$$c_2' = 1 \cdot (-3) -$$

$$-2 \cdot (-1) =$$

$$= -3 + 2 = -1$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	-9
f	2	-1	-6

- $$f_0' = f_0 a_{31} - c_1 b_3$$

$$f_0' = 0 \cdot (-3) -$$

$$-2 \cdot 3 =$$

$$= 0 - 6 = -6$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающий элемент: a_{31}=-3
- Все элементы промежуточной таблицы делятся на разрешающий элемент

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	-9
f	2	-1	-6

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3	1
x_4	2/3	-4/3	3
f	-2/3	1/3	2

Базис x_1, x_4

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3	1
x_4	2/3	-4/3	3
f	-2/3	1/3	2

- 1. Допустимость базиса

$$b_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}$$

b
1>0
3>0

допустимый

- 2. Оптимальность базиса

$$c_j \leq 0,\ j = \overline{1, k}$$

f	-2/3<0	1/3>0

неоптимальный

Базис x_1, x_4

- 3. Проверка наличия решения

$$c_l \geq 0 \rightarrow \exists a_{il} < 0$$

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3<0	1
x_4	2/3	-4/3<0	3
f	-2/3	1/3>0	2

ОДР замкнута, решение есть

- 4. Ввод в базис

$$c_r = \max_{1<j<k} c_j$$

	x_3	x_2
f	-2/3	1/3

Разрешающий столбец: x_2

Базис x_1, x_4

- 5. Вывод из базиса

$$s = \arg\min_i \left(-\frac{b_i}{a_{ir}} \right) \Bigg|_{a_{ir} < 0}$$

	x_3	x_2	b	$-b/x_2$
x_1	-1/3	-1/3	1	3
x_4	2/3	-4/3	3	9/4
f	-2/3	1/3	2	

Разрешающая строка: x_1 Разрешающий элемент: a_{12}=-4/3

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3	1
x_4	2/3	-4/3	3
f	-2/3	1/3	2

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_4	b
x_1		-1/3	
x_2	-2/3	1	-3
f		1/3	

- Разрешающий элемент заменяется на 1
- Разрешающий столбец без изменений
- Разрешающая строка меняет знак

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3	1
x_4	2/3	-4/3	3
f	-2/3	1/3	2

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_4	b
x_1	2/3	-1/3	-1/3
x_2	-2/3	1	-3
f	2/3	1/3	-11/3

$$-\tfrac{1}{3}\cdot\left(-\tfrac{4}{3}\right)-\tfrac{2}{3}\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)=-\tfrac{2}{3}$$

$$1\cdot\left(-\tfrac{4}{3}\right)-3\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)=-\tfrac{1}{3}$$

$$-\tfrac{2}{3}\cdot\left(-\tfrac{4}{3}\right)-\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3}$$

$$2\cdot\left(-\tfrac{4}{3}\right)-3\cdot\tfrac{1}{3}=-\tfrac{11}{3}$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающий элемент: a_{12}=-4/3
- Все элементы промежуточной таблицы делятся на разрешающий элемент

	x_3	x_4	b
x_1	2/3	-1/3	-1/3
x_2	-2/3	1	-3
f	2/3	1/3	-11/3

	x_3	x_4	b
x_1	-1/2	1/4	1/4
x_2	1/2	-3/4	9/4
f	-1/2	-1/4	11/4

Базис x_1, x_2

	x_3	x_4	b
x_1	-1/2	1/4	1/4
x_2	1/2	-3/4	9/4
f	-1/2	-1/4	11/4

- 1. Допустимость базиса

$$b_i \geq 0,\ i = \overline{1, m}$$

b
1/4>0
9/4>0

допустимый

- 2. Оптимальность базиса

$$c_j \leq 0,\ j = \overline{1, k}$$

f	-1/2<0	-1/4<0

оптимальный,
решение единственное

Ответ

- Оптимальный базис:

  x_1, x_2
- Базисные переменные:

  $x_1 = 1/4$

  $x_2 = 9/4$
- Свободные переменные:

  $x_3 = 0$

  $x_4 = 0$
- Значение функции:

  $f(X) = 11/4$

	x_3	x_4	b
x_1	-1/2	1/4	1/4
x_2	1/2	-3/4	9/4
f	-1/2	-1/4	11/4