

Задача линейного
программирования.
Табличный симплекс-метод

Рассмотрим ЗЛП

$$\begin{cases} \max (2x_1 + x_2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Приведем к канонической форме

$$\begin{cases} \max(2x_1 + x_2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max(2x_1 + x_2) \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Матричный вид ЗЛП

$$\left\{ \begin{array}{l} \max (2x_1 + x_2) \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max CX \\ AX = b \\ X \geq 0 \\ b \geq 0 \end{array} \right. \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$C = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

Начальный базис

- 0. Начальный базис

$$P = E$$

$$A = \begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 2 & 1 & \boxed{0} & \boxed{1} \end{array} \right] \end{array}$$

- Базис: x_3, x_4

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 5$$

$$x_3 = 3 - 3x_1 - x_2$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 2x_2$$

Базис x_3, x_4

$$x_3 = 3 - 3x_1 - x_2$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 2x_2$$

$$f(X) = 2x_1 + x_2$$

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- 1. Допустимость базиса

$$b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$$

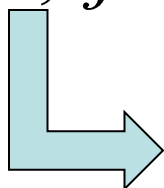


b
3 > 0
5 > 0

допустимый

- 2. Оптимальность базиса

$$c_j \leq 0, j = \overline{1, k}$$



f	2 > 0	1 > 0
---	-------	-------

неоптимальный

Базис x_3, x_4

- 3. Проверка наличия решения

$$c_l \geq 0 \rightarrow \exists a_{il} < 0$$

	x_1	x_2	b
x_3	$-3 < 0$	$-1 < 0$	3
x_4	$-2 < 0$	$-2 < 0$	5
f	$2 > 0$	$1 > 0$	0

ОДР замкнута, решение есть

- 4. Ввод в базис

$$c_r = \max_{1 < j < k} c_j$$

	x_1	x_2
f	2	1

Разрешающий столбец: x_1

Базис x_3, x_4

- 5. Вывод из базиса

$$s = \arg \min_i \left(-\frac{b_i}{a_{ir}} \right) \Big| a_{ir} < 0$$

	x_1	x_2	b	$-b/x_1$
x_3	$-3 < 0$	-1	3	1
x_4	$-2 < 0$	-2	5	5/2
f	2	1	0	

Разрешающая строка: x_3

Разрешающий элемент: $a_{31} = -3$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающий элемент заменяется на 1

	x_3	x_2	b
x_1	1		
x_4			
f			

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1		
x_4	-2		
f	2		

- Разрешающий столбец (кроме разрешающего элемента) без изменений

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:
- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающая строка (кроме разрешающего элемента) меняет знак

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2		
f	2		

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	
f	2		

- $$a'_{42} = a_{42}a_{31} - a_{41}a_{32}$$

$$a'_{42} = -2 \cdot (-3) -$$

$$-(-2) \cdot (-1) =$$

$$= 6 - 2 = 4$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	-9
f	2		

- $$b'_4 = b_4 a_{31} - b_3 a_{41}$$
$$b'_4 = 5 \cdot (-3) -$$
$$-(-2) \cdot 3 =$$
$$= -15 + 6 = -9$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	-9
f	2	-1	

- $$c'_2 = c_2 a_{31} - c_1 a_{32}$$
$$c'_2 = 1 \cdot (-3) -$$
$$-2 \cdot (-1) =$$
$$= -3 + 2 = -1$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	b
x_3	-3	-1	3
x_4	-2	-2	5
f	2	1	0

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	-9
f	2	-1	-6

- $$f'_0 = f_0 a_{31} - c_1 b_3$$
$$f'_0 = 0 \cdot (-3) -$$
$$-2 \cdot 3 =$$
$$= 0 - 6 = -6$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающий элемент: $a_{31} = -3$
- Все элементы промежуточной таблицы делятся на разрешающий элемент

	x_3	x_2	b
x_1	1	1	-3
x_4	-2	4	-9
f	2	-1	-6

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3	1
x_4	2/3	-4/3	3
f	-2/3	1/3	2

Базис x_1, x_4

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3	1
x_4	2/3	-4/3	3
f	-2/3	1/3	2

- 1. Допустимость базиса

$$b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$$

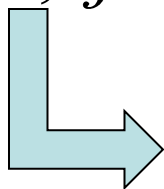


b
1 > 0
3 > 0

допустимый

- 2. Оптимальность базиса

$$c_j \leq 0, j = \overline{1, k}$$



f	-2/3 < 0	1/3 > 0
---	----------	---------

неоптимальный

Базис x_1, x_4

- 3. Проверка наличия решения

$$c_l \geq 0 \rightarrow \exists a_{il} < 0$$

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3 < 0	1
x_4	2/3	-4/3 < 0	3
f	-2/3	1/3 > 0	2

ОДР замкнута, решение есть

- 4. Ввод в базис

$$c_r = \max_{1 < j < k} c_j$$

	x_3	x_2
f	-2/3	1/3

Разрешающий столбец: x_2

Базис x_1, x_4

- 5. Вывод из базиса

$$s = \arg \min_i \left(-\frac{b_i}{a_{ir}} \right) \Big| a_{ir} < 0$$

	x_3	x_2	b	$-b/x_2$
x_1	-1/3	-1/3	1	3
x_4	2/3	-4/3	3	9/4
f	-2/3	1/3	2	

Разрешающая строка: x_1

Разрешающий элемент: $a_{12} = -4/3$

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:
- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающий элемент заменяется на 1
- Разрешающий столбец без изменений
- Разрешающая строка меняет знак

	x_3	x_2	b
x_1	-1/3	-1/3	1
x_4	2/3	-4/3	3
f	-2/3	1/3	2

	x_3	x_4	b
x_1		-1/3	
x_2	-2/3	1	-3
f		1/3	

Пересчет симплекс-таблицы

- Исходная симплекс-таблица:

	x_3	x_2	b
x_1	$-1/3$	$-1/3$	1
x_4	$2/3$	$-4/3$	3
f	$-2/3$	$1/3$	2

- Промежуточная симплекс-таблица:

	x_3	x_4	b
x_1	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$
x_2	$-2/3$	1	-3
f	$2/3$	$1/3$	$-11/3$

$$-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$1 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$$

Пересчет симплекс-таблицы

- Промежуточная симплекс-таблица:
- Разрешающий элемент: $a_{12} = -4/3$
- Все элементы промежуточной таблицы делятся на разрешающий элемент

	x_3	x_4	b
x_1	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$
x_2	$-2/3$	1	-3
f	$2/3$	$1/3$	$-11/3$

	x_3	x_4	b
x_1	$-1/2$	$1/4$	$1/4$
x_2	$1/2$	$-3/4$	$9/4$
f	$-1/2$	$-1/4$	$11/4$

Базис x_1, x_2

	x_3	x_4	b
x_1	-1/2	1/4	1/4
x_2	1/2	-3/4	9/4
f	-1/2	-1/4	11/4

- 1. Допустимость базиса

$$b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$$

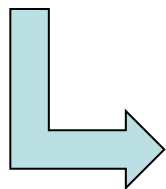


b
1/4 > 0
9/4 > 0

допустимый

- 2. Оптимальность базиса

$$c_j \leq 0, j = \overline{1, k}$$



f	-1/2 < 0	-1/4 < 0
---	----------	----------

оптимальный,
решение единственное

Ответ

- Оптимальный базис:

$$x_1, x_2$$

- Базисные переменные:

$$x_1 = 1/4$$

$$x_2 = 9/4$$

- Свободные переменные:

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

- Значение функции:

$$f(X) = 11/4$$

	x_3	x_4	b
x_1	-1/2	1/4	1/4
x_2	1/2	-3/4	9/4
f	-1/2	-1/4	11/4