Теоретическая механика

Часть 1
Кинематика

Глава 3. Движение твердой среды

§ 5. Вращательное движение твердой среды

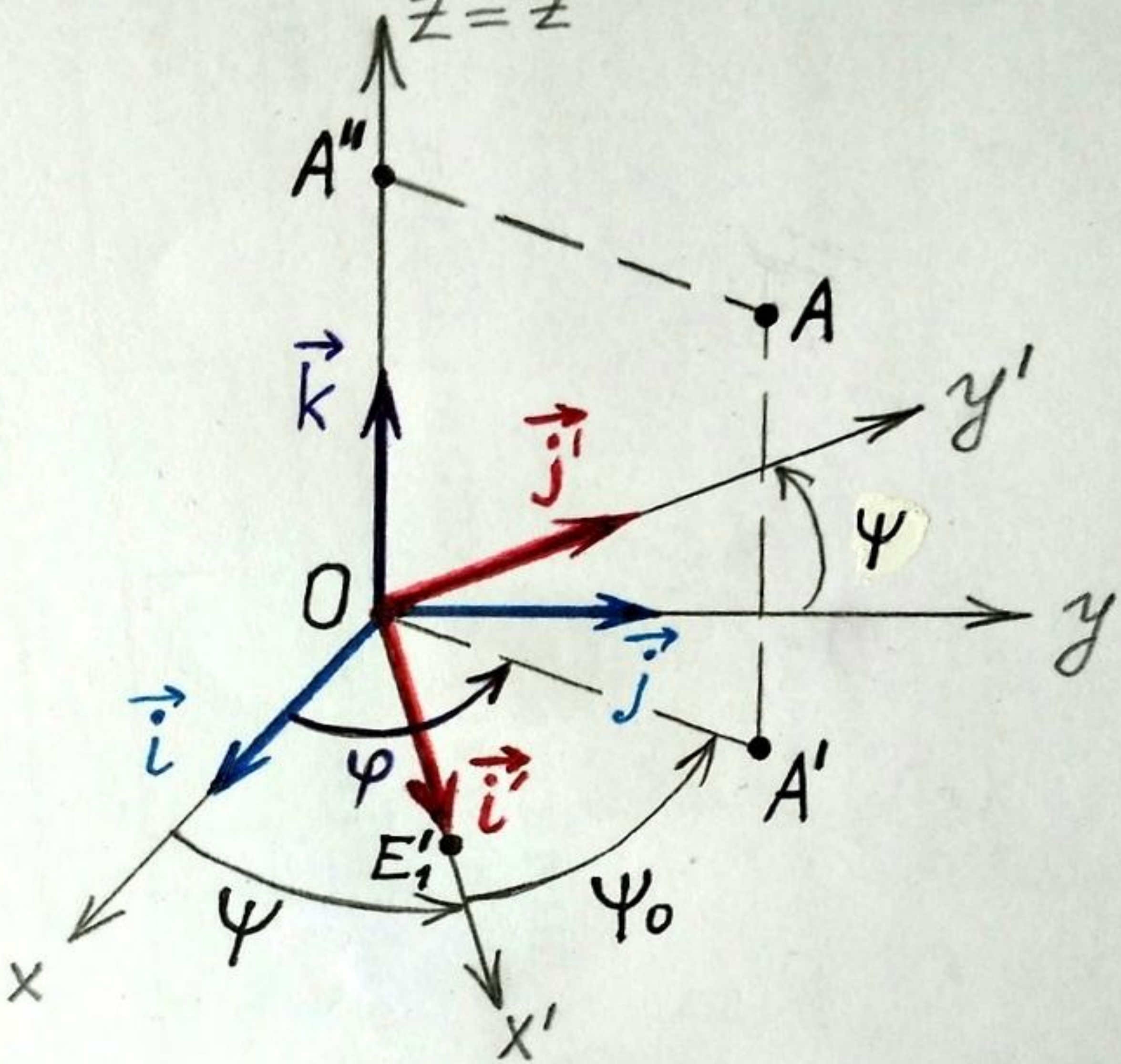
Рассмотрим «неподвижную» декартову систему отсчета $\hat{S}$. Пусть твердая среда Σ движется относительно ДСО $\hat{S}$.

Определение. Если существует прямая $l \subset \Sigma$, все точки которой неподвижны относительно системы $\hat{S}$, то движение твердой среды Σ относительно ДСО $\hat{S}$ называется ***вращательным*** или ***вращением вокруг неподвижной прямой*** $\boldsymbol{l}$.

Прямая l в этом случае называется ***осью вращения*** среды Σ.

Упражнение. Докажите, что, если в среде Σ имеются две различные точки, неподвижные относительно $\hat{S}$, то движение среды Σ является вращением вокруг неподвижной прямой, проходящей через эти две точки.

Рассмотрим другую ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, неподвижную относительно ДСО $\hat{S}$, такую, что точки O и E_3 лежат на неподвижной прямой $l \subset \Sigma$. «Подвижную» систему $S' = (O', E_1', E_2', E_3')$ (жестко связанную со средой Σ) выберем так, чтобы $O' = O$ и $E_3' = E_3$ (это возможно в силу того, что $O, E_3 \in l \subset \Sigma$). Тогда оси Oz и Oz' будут совпадать друг с другом и с осью вращения l.



Z = Z'
A''
A
A'
k
j'
y'
ψ
O
y
j
i
φ
i'
E'1
ψ
ψ0
x
x'

Заметим, что векторы $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$, $\vec{i}\,' = \overrightarrow{OE_1'}$, $\vec{j}\,' = \overrightarrow{OE_2'}$ компланарны, $\vec{k}\,' = \overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$, а положение системы S' определяется направленным углом $\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}\,')_{напр} = \angle(\vec{j}, \vec{j}\,')_{напр}$.

Пусть точка $A \in \Sigma$, A' – проекция точки A на «подвижную» плоскость $Ox'y' \subset \Sigma$ системы S', A'' – проекция точки A на ось $Oz \subset \Sigma$, φ – направленный угол между векторами $\vec{i}$ и $\overrightarrow{OA'}$, ψ_0 – направленный угол между векторами $\vec{i}\,' = \overrightarrow{OE_1'}$ и $\overrightarrow{OA'}$ (см. рис.). Заметим, что $\psi_0 = const$, $\rho := |OA'| = const$ и координата z точки A тоже постоянна (в силу того, что точки $O, E_1', A, A', A'' \in \Sigma$).

Тогда верно равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA''}$, которое, при переходе к соответствующим координатным векторам (в системе S), приобретает вид

$$r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''} . \tag{5.1}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z:

$$e_\rho = \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

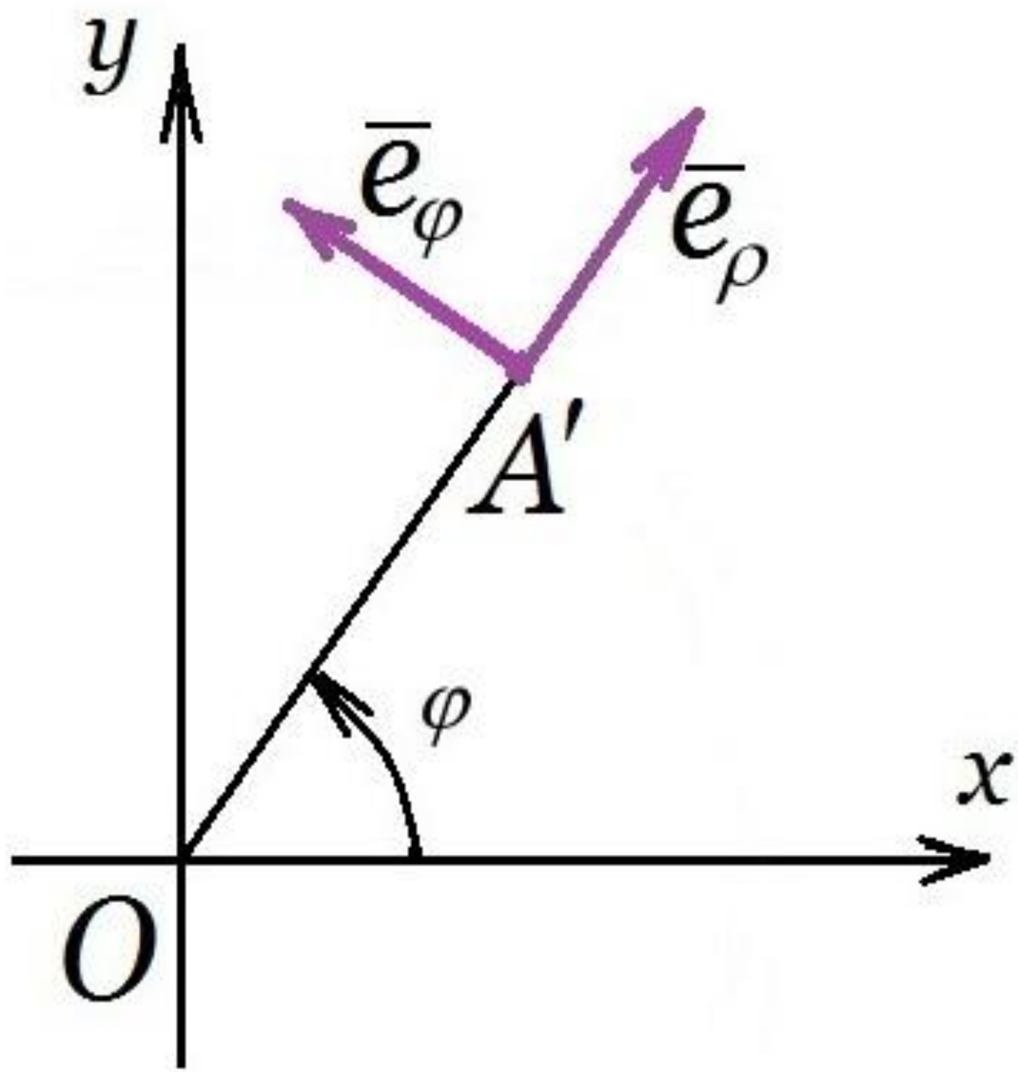
тогда $r_{OA'} = \rho e_\rho$, $r_{OA''} = z e_z$. Следовательно, в силу (5.1),

$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + z e_z. \tag{5.2}$$

Так как ρ, z, e_z не зависят от времени, скорость точки A

$$v = \dot{r} = \rho \dot{\varphi} e_\varphi = \rho \omega e_\varphi, \tag{5.3}$$

где $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.



y
$\bar{e}_\varphi$
$\bar{e}_\rho$
A'
φ
x
O

Отметим, что угловая скорость $\omega = \dot{\varphi}$ одинакова для всех точек среды Σ, поскольку полярные углы ее точек отличаются друг от друга на константы: $\varphi = \psi + \psi_0 \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = \dot{\psi}$, а угол $\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}\,')_{напр}$ не зависит от точки среды.

Определим ***вектор угловой скорости*** Ω среды Σ относительно S равенством

$$\Omega = \omega e_z .$$

Тогда, в силу (5.2) и (5.3), скорость точки A

$$v = \dot{r} = \rho\dot{\varphi}e_\varphi = \rho\omega e_\varphi = \rho\omega(e_z \times e_\rho) = (\omega e_z)\times(\rho e_\rho + z e_z) = \Omega \times r.$$

Итак, для любой точки $A \in \Sigma$ верно равенство

$$v = \Omega \times r.$$

В рассматриваемой ситуации вектор $\vec{\Omega}$ параллелен оси вращения l, однако его величина и направление, задаваемые функцией ω, могут изменяться.

Отметим, что с конца этого вектора вращение кажется происходящим против часовой стрелки (т.е. оно совпадает с $\vec{e}_z$ при $\dot{\varphi} \geq 0$ и с $(-\vec{e}_z)$ в противном случае). Ниже будет доказана теорема Эйлера, устанавливающая существование вектора мгновенной угловой скорости в случае произвольного движения твердой среды.