

Теоретическая механика

Часть 1

Кинематика

Глава 3. Движение твердой среды

§ 5. Вращательное движение твердой среды

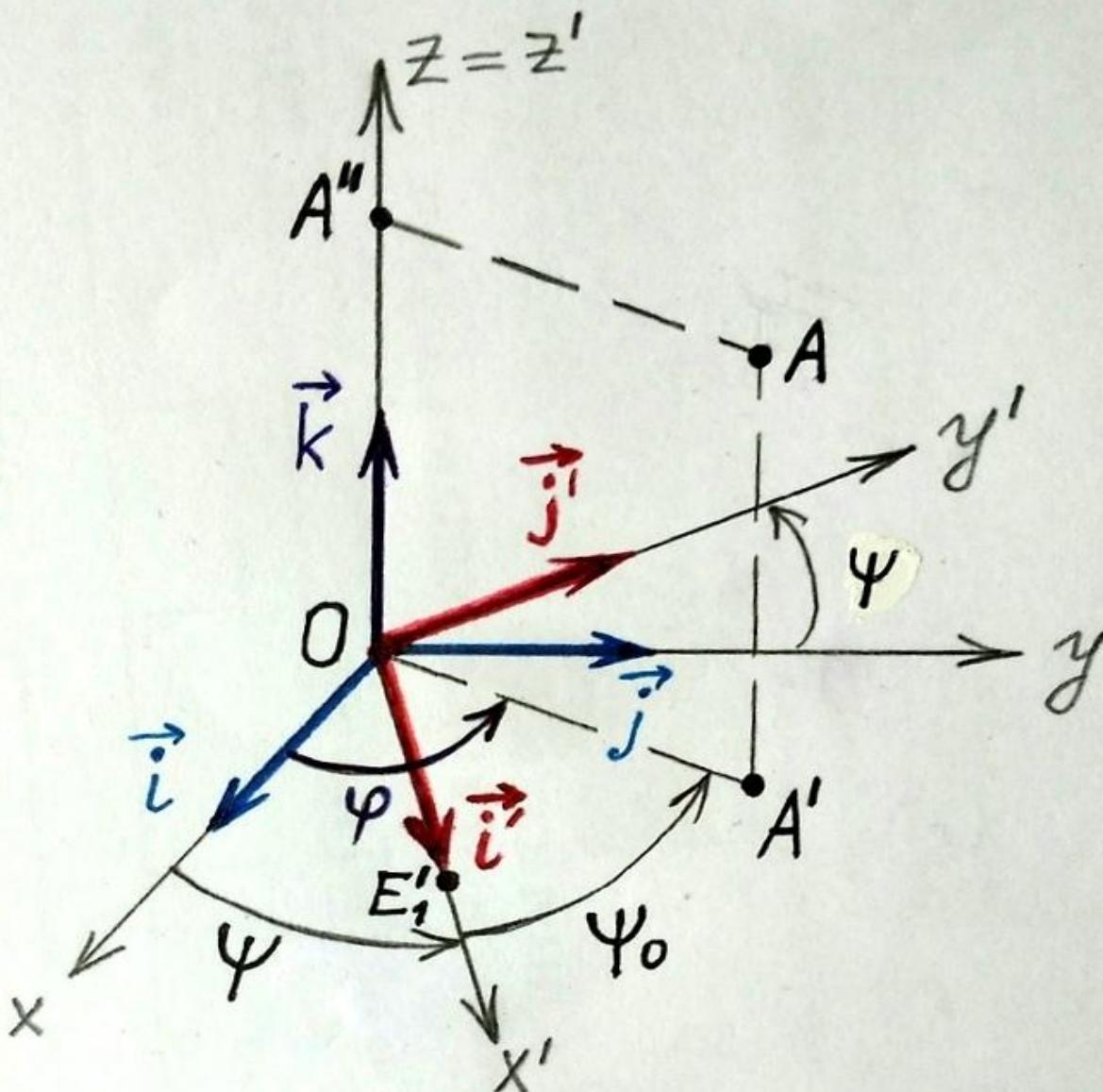
Рассмотрим «неподвижную» декартову систему отсчета \hat{S} . Пусть твердая среда Σ движется относительно ДСО \hat{S} .

Определение. Если существует прямая $l \subset \Sigma$, все точки которой неподвижны относительно системы \hat{S} , то движение твердой среды Σ относительно ДСО \hat{S} называется *вращательным* или *вращением вокруг неподвижной прямой l* .

Прямая l в этом случае называется *осью вращения* среды Σ .

Упражнение. Докажите, что, если в среде Σ имеются две различные точки, неподвижные относительно \hat{S} , то движение среды Σ является вращением вокруг неподвижной прямой, проходящей через эти две точки.

Рассмотрим другую ДСО $S = (O, E_1, E_2, E_3)$, неподвижную относительно ДСО \hat{S} , такую, что точки O и E_3 лежат на неподвижной прямой $l \subset \Sigma$. «Подвижную» систему $S' = (O', E'_1, E'_2, E'_3)$ (жестко связанную со средой Σ) выберем так, чтобы $O' = O$ и $E'_3 = E_3$ (это возможно в силу того, что $O, E_3 \in l \subset \Sigma$). Тогда оси Oz и Oz' будут совпадать друг с другом и с осью вращения l .



Заметим, что векторы $\vec{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OE_2}$,

$\vec{i}' = \overrightarrow{OE'_1}$, $\vec{j}' = \overrightarrow{OE'_2}$ компланарны, $\vec{k}' = \overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$, а

положение системы S' определяется направленным углом

$$\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}')_{\text{напр}} = \angle(\vec{j}, \vec{j}')_{\text{напр}}.$$

Пусть точка $A \in \Sigma$, A' – проекция точки A на «подвижную» плоскость $Ox'y' \subset \Sigma$ системы S' , A'' – проекция точки A на ось $Oz \subset \Sigma$, φ – направленный угол между векторами \vec{i} и $\overrightarrow{OA'}$, ψ_0 – направленный угол между векторами $\vec{i}' = \overrightarrow{OE'_1}$ и $\overrightarrow{OA'}$ (см. рис.).

Заметим, что $\psi_0 = \text{const}$, $\rho := |OA'| = \text{const}$ и координата z точки A тоже постоянна (в силу того, что точки $O, E'_1, A, A', A'' \in \Sigma$).

Тогда верно равенство $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA''}$, которое, при переходе к соответствующим координатным векторам (в системе S), приобретает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OA} = \mathbf{r}_{OA'} + \mathbf{r}_{OA''}. \quad (5.1)$$

Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z :

$$e_\rho = \rho^{-1} r_{OA'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

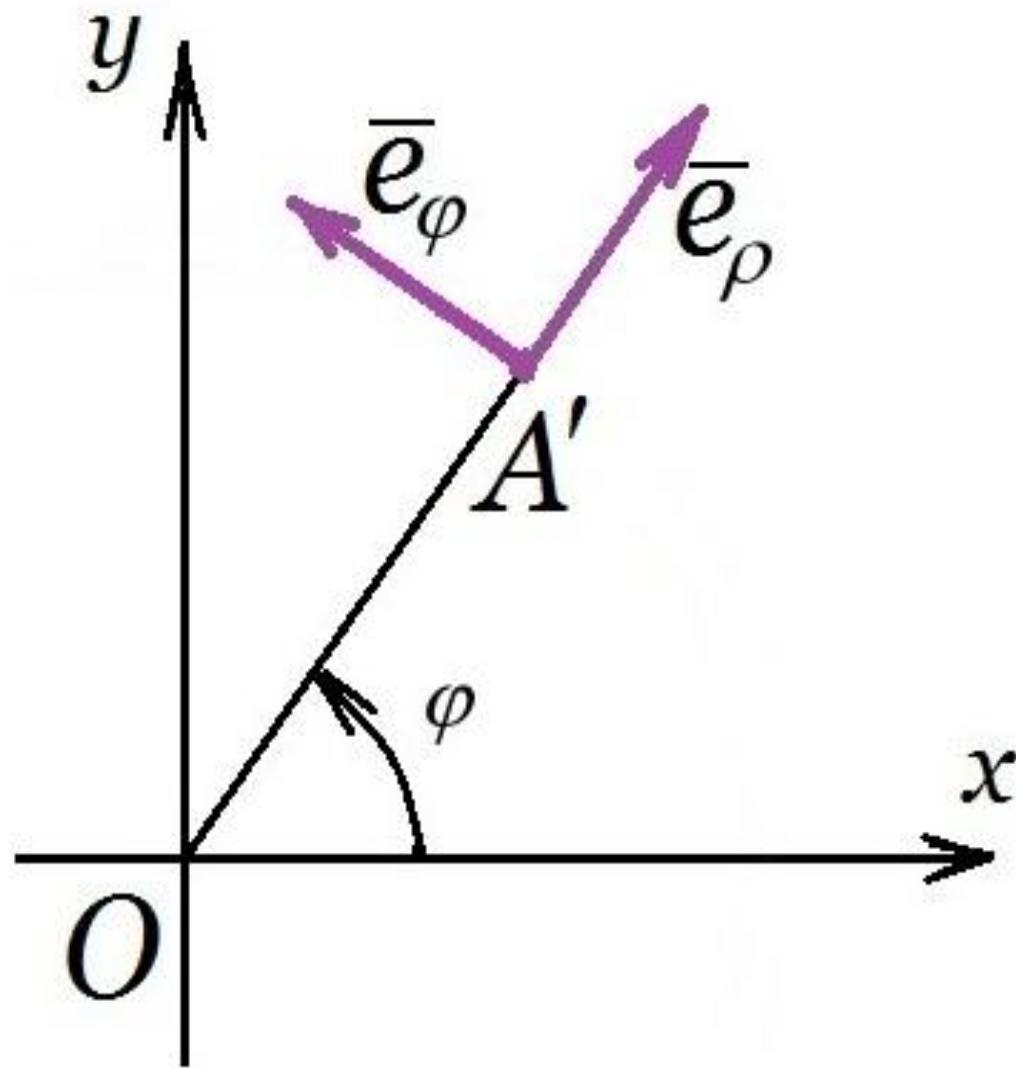
тогда $r_{OA'} = \rho e_\rho$, $r_{OA''} = z e_z$. Следовательно, в силу (5.1),

$$r = r_{OA} = \rho e_\rho + z e_z. \quad (5.2)$$

Так как ρ, z, e_z не зависят от времени, скорость точки A

$$v = \dot{r} = \rho \dot{\varphi} e_\varphi = \rho \omega e_\varphi, \quad (5.3)$$

где $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.



Отметим, что угловая скорость $\omega = \dot{\phi}$ одинакова для всех точек среды Σ , поскольку полярные углы ее точек отличаются друг от друга на константы: $\varphi = \psi + \psi_0 \Rightarrow \omega = \dot{\phi} = \dot{\psi}$, а угол $\psi = \angle(\vec{i}, \vec{i}')$ напр не зависит от точки среды.

Определим *вектор угловой скорости* Ω среды Σ относительно S равенством

$$\Omega = \omega e_z.$$

Тогда, в силу (5.2) и (5.3), скорость точки A

$$v = \dot{r} = \rho \dot{\phi} e_\phi = \rho \omega e_\phi = \rho \omega (e_z \times e_\rho) = (\omega e_z) \times (\rho e_\rho + z e_z) = \Omega \times r.$$

Итак, для любой точки $A \in \Sigma$ верно равенство

$$v = \Omega \times r.$$

В рассматриваемой ситуации вектор $\vec{\Omega}$ параллелен оси вращения l , однако его величина и направление, задаваемые функцией ω , могут изменяться.

Отметим, что с конца этого вектора вращение кажется происходящим против часовой стрелки (т.е. оно совпадает с \vec{e}_z при $\dot{\phi} \geq 0$ и с $(-\vec{e}_z)$ в противном случае). Ниже будет доказана теорема Эйлера, устанавливающая существование вектора мгновенной угловой скорости в случае произвольного движения твердой среды.