

21.12.20.

Тема:

Тригонометрические уравнения.

Методы решения тригонометрических уравнений.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://infourok.ru/videouroki/1191>

<https://infourok.ru/videouroki/1192>

<https://infourok.ru/videouroki/1193>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

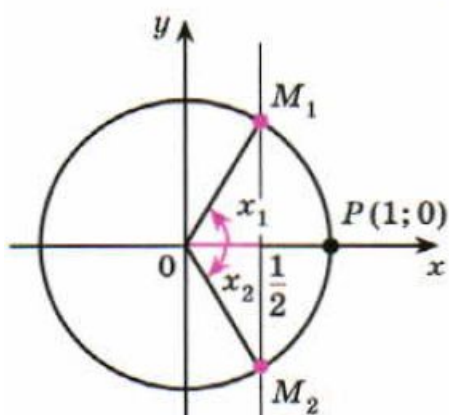
# Тригонометрические уравнения

## Уравнение $\cos x = a$

Из определения косинуса следует, что  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ . Поэтому если  $|a| > 1$ , то уравнение  $\cos x = a$  не имеет корней. Например, уравнение  $\cos x = -1,5$  не имеет корней.

**Задача 1** Решить уравнение  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

▶ Напомним, что  $\cos x$  — абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки  $P(1; 0)$  вокруг начала координат на угол  $x$ . Абсциссу, равную  $\frac{1}{2}$ , имеют две точки окружности  $M_1$  и  $M_2$



(рис. 68). Так как  $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ , то точка  $M_1$

получается из точки  $P(1; 0)$  поворотом на угол  $x_1 = \frac{\pi}{3}$ , а также на углы

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ , где  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Точка  $M_2$

получается из точки  $P(1; 0)$  поворотом на угол  $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ , а также на углы

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ , где  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Итак, все

корни уравнения  $\cos x = \frac{1}{2}$  можно найти по форму-

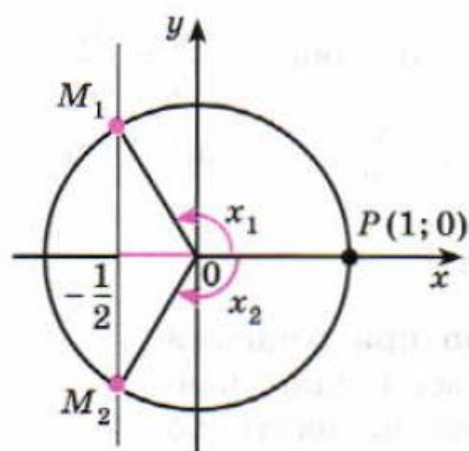
лам  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Вместо этих

двух формул обычно пользуются одной:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad \triangleleft$$

**Задача 2** Решить уравнение  $\cos x = -\frac{1}{2}$ .

► Абсциссу, равную  $-\frac{1}{2}$ , имеют две точки окружности  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 69). Так как  $-\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$ , то угол  $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ , а потому угол  $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$ .



Следовательно, все корни уравнения  $\cos x = -\frac{1}{2}$  можно найти по формуле

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad \triangleleft$$

Таким образом, каждое из уравнений  $\cos x = \frac{1}{2}$  и  $\cos x = -\frac{1}{2}$  имеет бесконечное множество корней. На отрезке  $[0; \pi]$  каждое из этих уравнений имеет только

один корень:  $x_1 = \frac{\pi}{3}$  — корень уравнения  $\cos x = \frac{1}{2}$  и  $x_1 = \frac{2\pi}{3}$  — корень урав-

нения  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Число  $\frac{\pi}{3}$  называют арккосинусом числа  $\frac{1}{2}$  и записывают  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ; число  $\frac{2\pi}{3}$  называют арккосинусом числа  $\left(-\frac{1}{2}\right)$  и записывают  $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ . Вообще, уравнение  $\cos x = a$ , где  $-1 \leq a \leq 1$ , имеет на отрезке  $0 \leq x \leq \pi$  только один корень. Если  $a \geq 0$ , то корень заключён в промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ; если  $a < 0$ , то в промежутке  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ . Этот корень называют *арккосинусом* числа  $a$  и обозначают  $\arccos a$  (рис. 70).



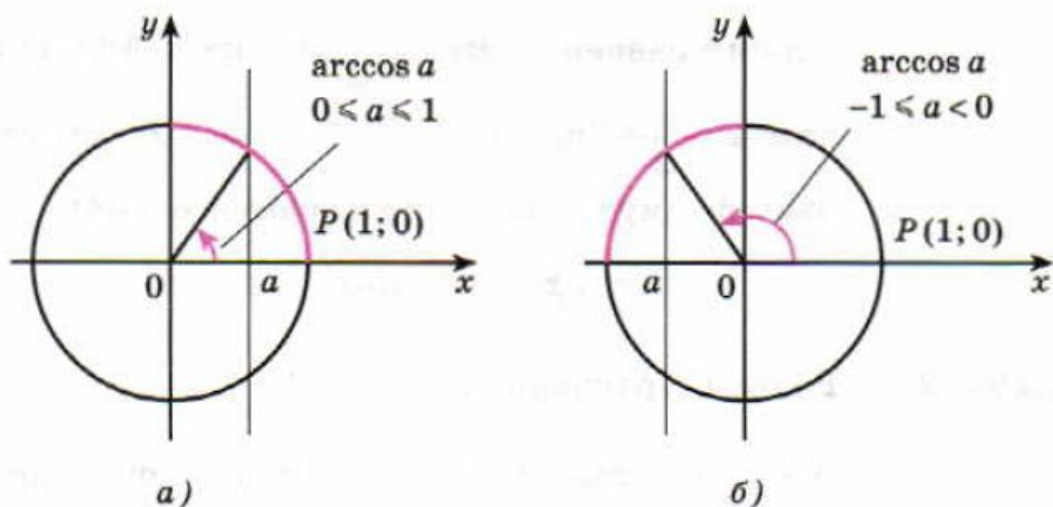


Рис. 70

Арккосинусом числа  $a \in [-1; 1]$  называется такое число  $\alpha \in [0; \pi]$ , косинус которого равен  $a$ :

$$\arccos a = \alpha, \text{ если } \cos \alpha = a \text{ и } 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (1)$$

Например,  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ , так как  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и

$0 \leq \frac{\pi}{6} \leq \pi$ ;  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ , так как

$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $0 \leq \frac{5\pi}{6} \leq \pi$ .

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения  $\cos x = a$ , где  $|a| \leq 1$ , можно находить по формуле

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что корни уравнения  $\cos x = a$  при  $a = 0$ ,  $a = 1$ ,  $a = -1$  можно находить по более простым формулам:

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

**Задача 5** Решить уравнение  $\cos \frac{x}{3} = -1$ .

► По формуле (6) получаем  $\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , откуда  $x = 3\pi + 6\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . ◀

## Уравнение $\sin x = a$

Из определения синуса следует, что  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ . Поэтому если  $|a| > 1$ , то уравнение  $\sin x = a$  не имеет корней. Например, уравнение  $\sin x = 2$  не имеет корней.

**Задача 1** Решить уравнение  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

▶ Напомним, что  $\sin x$  — ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки  $P(1; 0)$  вокруг начала координат на угол  $x$ . Ординату, равную  $\frac{1}{2}$ , имеют две точки окружности  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 72). Так как  $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ , то точка  $M_1$  получается из точки  $P(1; 0)$  поворотом на угол  $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ,

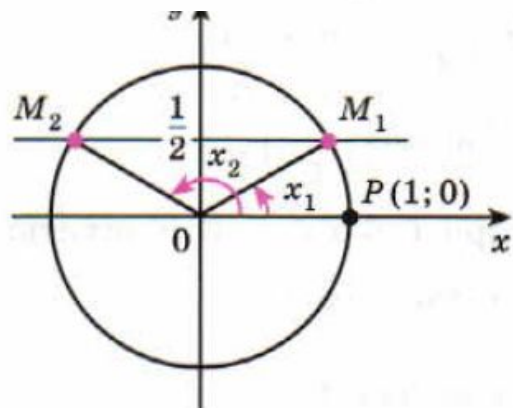


Рис. 72

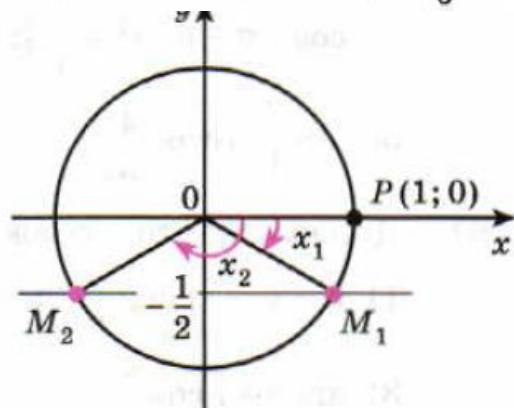


Рис. 73

а также на углы  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ , где  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Точка  $M_2$  получается из точки  $P(1; 0)$  поворотом на угол  $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ , а также на углы  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ , т. е.

на углы  $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ , где  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Итак, все корни уравнения  $\sin x = \frac{1}{2}$  можно найти

по формулам  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

В самом деле, если  $n$  — чётное число, т. е.  $n = 2k$ , то из формулы (1) получаем  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ , а если  $n$  — нечётное число, т. е.  $n = 2k + 1$ , то из формулы (1) получаем  $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ .

**Ответ**

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \triangleleft$$

**Задача 2**

Решить уравнение  $\sin x = -\frac{1}{2}$ .

► Ординату, равную  $-\frac{1}{2}$ , имеют две точки единичной окружности  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 73), где  $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$ . Следовательно, все корни уравнения  $\sin x = -\frac{1}{2}$  можно найти по формулам

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \left( -\frac{\pi}{6} \right) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

В самом деле, если  $n = 2k$ , то по формуле (2) получаем  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ , а если  $n = 2k - 1$ , то по формуле (2) находим  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ .

**Ответ**

$$x = (-1)^n \left( -\frac{\pi}{6} \right) + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad \triangleleft$$



Арксинусом числа  $a \in [-1; 1]$  называется такое число  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , синус которого равен  $a$ :

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin \alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Например,  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ , так как  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

и  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ ;  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ , так как

$$\sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что корни уравнения  $\sin x = a$ , где  $|a| \leq 1$ , выражаются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

**Задача 3** Решить уравнение  $\sin x = \frac{2}{3}$ .

► По формуле (4) находим  $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n$ ,

$n \in \mathbb{Z}$ . ◀

Значение  $\arcsin \frac{2}{3}$  можно приближённо найти из рисунка 75, измеряя угол  $POM$  транспортиром.

Значения арксинуса можно находить с помощью специальных таблиц или микрокалькулятора. Например, значение  $\arcsin \frac{2}{3}$  можно вычислить на микрокалькуляторе:

$$\arcsin \frac{2}{3} \approx 0,73.$$

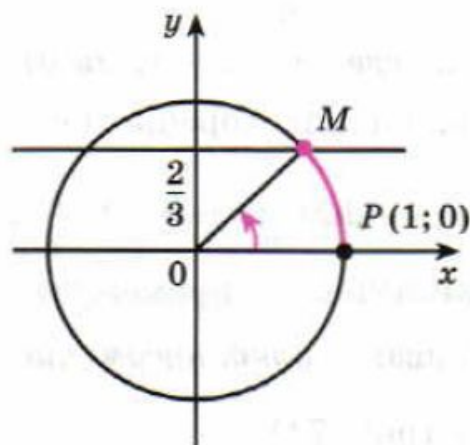


Рис. 75

Отметим, что из формулы (4) следует, что корни уравнения  $\sin x = a$  при  $a = 0$ ,  $a = 1$ ,  $a = -1$  можно находить по более простым формулам:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

**Задача 5** Решить уравнение  $\sin 2x = 1$ .

► По формуле (7) имеем  $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , откуда

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \triangleleft$$



## Практическая часть.

Решить уравнение (571—573).

571 1)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;      2)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      3)  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

572 1)  $\cos x = \frac{3}{4}$ ;      2)  $\cos x = -0,3$ ;      3)  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

573 1)  $\cos 4x = 1$ ;      2)  $\cos 2x = -1$ ;      3)  $\sqrt{2} \cos \frac{x}{4} = -1$ ;  
4)  $2 \cos \frac{x}{3} = \sqrt{3}$ ;      5)  $\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ;      6)  $\cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

Решить уравнение (589—592).

589 1)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      2)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;      3)  $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

590 1)  $\sin x = \frac{2}{7}$ ;      2)  $\sin x = -\frac{1}{4}$ ;      3)  $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

591 1)  $\sin 3x = 1$ ; 2)  $\sin 2x = -1$ ; 3)  $\sqrt{2} \sin \frac{x}{3} = -1$ ;  
4)  $2 \sin \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ ; 5)  $\sin \left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$ ; 6)  $\sin \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ .