21.12.20.

Тема:
Тригонометрические уравнения. Методы решения тригонометрических уравнений.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1191
https://infourok.ru/videouroki/1192
https://infourok.ru/videouroki/1193

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

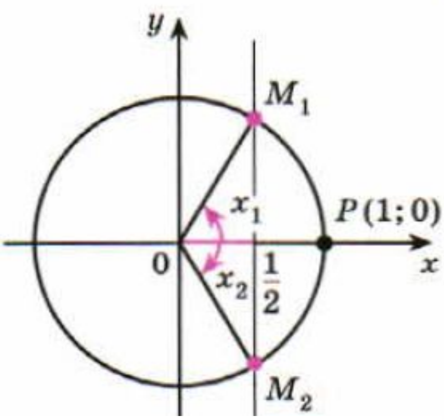
Тригонометрические уравнения

Уравнение $\cos x = a$

Из определения косинуса следует, что $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\cos x = -1{,}5$ не имеет корней.

Задача 1 Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

▶ Напомним, что $\cos x$ — абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2

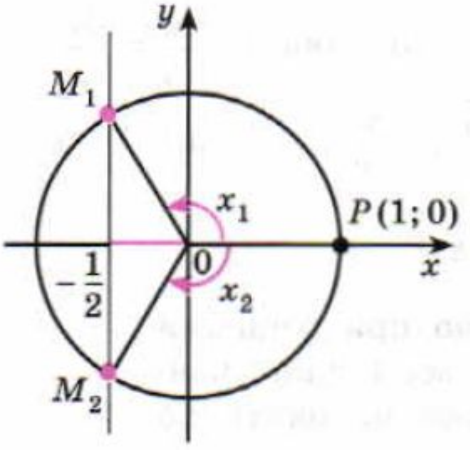


(рис. 68). Так как $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Точка M_2 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Итак, все корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Вместо этих двух формул обычно пользуются одной:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}. \ ◁$$

Задача 2 Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

▶ Абсциссу, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 69). Так как $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, то угол $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, а потому угол $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$.



Следовательно, все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◁

Таким образом, каждое из уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет бесконечное множество корней. На отрезке $[0; \pi]$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ — корень уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\frac{1}{2}$ и записывают $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; число $\frac{2\pi}{3}$ называют арккосинусом числа $\left(-\frac{1}{2}\right)$ и записывают $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Вообще, уравнение $\cos x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключён в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Этот корень называют *арккосинусом числа* a и обозначают $\arccos a$ (рис. 70).

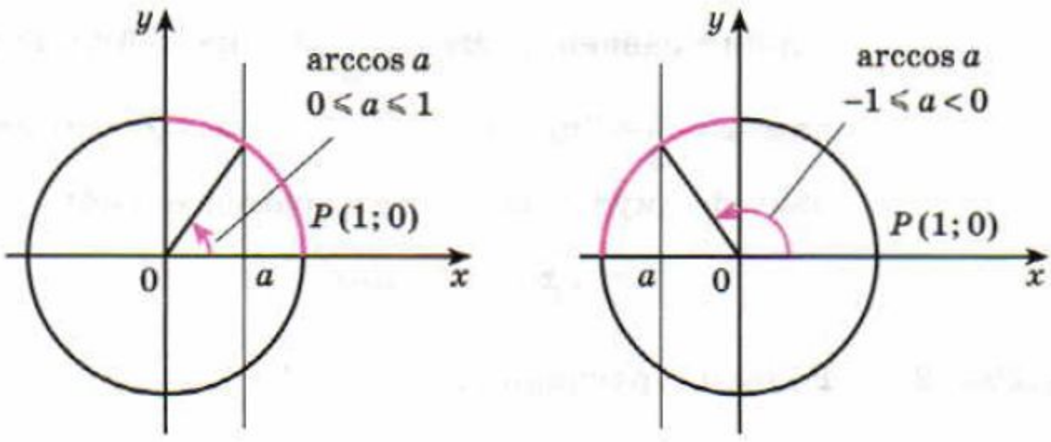


Рис. 70 *а)* *б)*

Арккосинусом числа $a \in [-1;\ 1]$ называется такое число $\alpha \in [0;\ \pi]$, косинус которого равен a:

$$\arccos a = \alpha, \text{ если } \cos\alpha = a \text{ и } 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi. \qquad (1)$$

Например, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{\pi}{6} \leqslant \pi$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 \leqslant \frac{5\pi}{6} \leqslant \pi$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения $\cos x = a$, где $|a| \leqslant 1$, можно находить по формуле

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что корни уравнения $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$$\cos x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z, \qquad (4)$$

$$\cos x = 1,\ \ x = 2\pi n,\ \ n \in Z, \qquad (5)$$

$$\cos x = -1,\ \ x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in Z. \qquad (6)$$

Задача 5 Решить уравнение $\cos\frac{x}{3} = -1$.

▶ По формуле (6) получаем $\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, откуда $x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in Z$. ◁

Уравнение $\sin x = a$

Из определения синуса следует, что $-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1$. Поэтому если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет корней. Например, уравнение $\sin x = 2$ не имеет корней.

Задача 1 Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

▶ Напомним, что $\sin x$ — ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x. Ординату, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2 (рис. 72). Так как $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$,

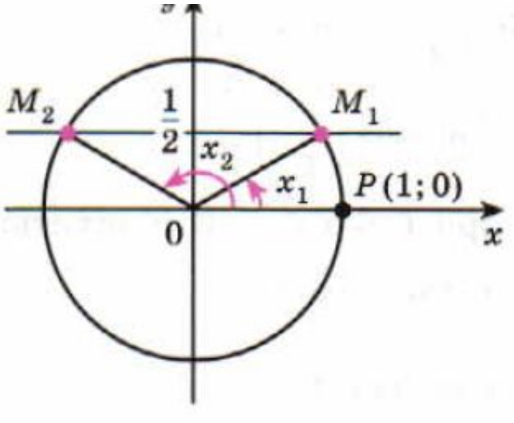


Рис. 72

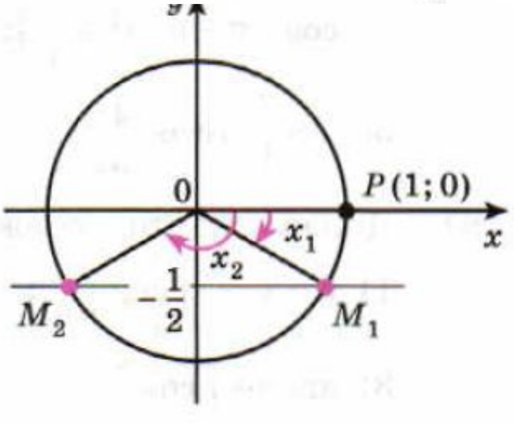


Рис. 73

а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т. е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Итак, все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (1)$$

В самом деле, если n — чётное число, т. е. $n = 2k$, то из формулы (1) получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если n — нечётное число, т. е. $n = 2k + 1$, то из формулы (1) получаем $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

▶ Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 (рис. 73), где $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, все корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формулам

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Эти формулы объединяются в одну:

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

В самом деле, если $n = 2k$, то по формуле (2) получаем $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а если $n = 2k - 1$, то по формуле (2) находим $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Ответ $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}$. ◁

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a:

$$\arcsin a = \alpha, \text{ если } \sin\alpha = a \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Например, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что корни уравнения $\sin x = a$, где $|a| \leqslant 1$, выражаются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \ n \in Z. \quad (4)$$

Задача 3 Решить уравнение $\sin x = \frac{2}{3}$.

▶ По формуле (4) находим $x = (-1)^n \arcsin\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$. ◁

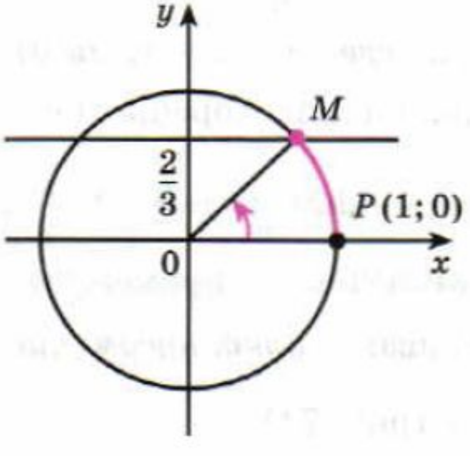


Рис. 75

Значение $\arcsin\frac{2}{3}$ можно приближённо найти из рисунка 75, измеряя угол *POM* транспортиром.

Значения арксинуса можно находить с помощью специальных таблиц или микрокалькулятора. Например, значение $\arcsin\frac{2}{3}$ можно вычислить на микрокалькуляторе:

$$\arcsin\frac{2}{3} \approx 0{,}73.$$

Отметим, что из формулы (4) следует, что корни уравнения $\sin x = a$ при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ можно находить по более простым формулам:

$$\sin x = 0, \ \ x = \pi n, \ \ n \in Z, \qquad (6)$$

$$\sin x = 1, \ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \ n \in Z, \qquad (7)$$

$$\sin x = -1, \ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \ n \in Z. \qquad (8)$$

Задача 5 Решить уравнение $\sin 2x = 1$.

▶ По формуле (7) имеем $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. ◁

Практическая часть.

Решить уравнение (571—573).

571 1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

572 1) $\cos x = \frac{3}{4}$; 2) $\cos x = -0,3$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

573 1) $\cos 4x = 1$; 2) $\cos 2x = -1$; 3) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{4} = -1$;

4) $2\cos\frac{x}{3} = \sqrt{3}$; 5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$; 6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Решить уравнение (589—592).

589 1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

590 1) $\sin x = \frac{2}{7}$; 2) $\sin x = -\frac{1}{4}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

591 1) $\sin 3x = 1$; 2) $\sin 2x = -1$; 3) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{3} = -1$;

4) $2\sin\frac{x}{2} = \sqrt{3}$; 5) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$; 6) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.