Учитель математики МОУ «Лицей №5»
г. Железногорска
Олейник Ольга Владимировна

«Решение задач с параметрами»

1) Найдите все *a*, при каждом из которых уравнение $\frac{2a^2-(x+3)a-x^2+3x}{x^2-9}=0$ имеет ровно один корень.

2) Найдите все *a*, при каждом из которых уравнение $a\cdot 2^x-\frac{2^{x+1}+1}{2^x-1}=2a+2$ имеет ровно один корень.

3) Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $2\cdot(|x-2|+|x|)^2-3(a-2)\cdot(|2-x|+|x|)+a^2-3a=0$ имеет не менее трех различных корней.

4) Найдите все значения параметра *a*, при которых функция $f(x)=x^4+(a+1)x^3+(2a+1)x^2-(a+1)x+1$ на промежутке $(-\infty;-1)$ имеет не менее двух корней

Найдите все *a*, при каждом из которых уравнение $\frac{2a^2-(x+3)a-x^2+3x}{x^2-9}=0$ имеет ровно один корень.

$$\frac{-x^2+3x-ax-3a+2a^2}{x^2-9}=0$$

$$\frac{x^2+(a-3)x-2a^2+3a}{x^2-9}=0$$

Область определения уравнения: $x \neq \pm 3$

Найдите все a, при каждом из которых уравнение $\frac{2a^2-(x+3)a-x^2+3x}{x^2-9}=0$ имеет ровно один корень.

$$x^2+(a-3)x-2a^2+3a=0$$

$$D=(a-3)^2-4(-2a^2+3a)=9(a-1)^2\geq 0$$

Требование единственности можно достичь, если:
а) корни квадратного уравнения равны;
б) один из корней квадратного уравнения принадлежит области определения исходного уравнения, а другой не принадлежит.

а) $D=0$; $a=1$

б) $D>0$

x = 3
$3^2+(a-3)\cdot 3-2a^2+3a=0$
$a^2-3a=0$
$a=0; a=3$

x = -3
$(-3)^2-3(a-3)-2a^2+3a=0$
$a^2-9=0$
$a=3; a=-3$

Найдите все a, при каждом из которых уравнение $\frac{2a^2-(x+3)a-x^2+3x}{x^2-9}=0$ имеет ровно один корень.

Таким образом, при $a=3$ исходное уравнение корней не имеет, при $a=0$, $a=-3$ уравнение имеет единственный корень

Ответ: при $a=1$, $a=0$, $a=-3$ уравнение имеет ровно один корень

Найдите все a, при каждом из которых уравнение $a \cdot 2^x - \frac{2^{x+1}+1}{2^x-1} = 2a + 2$ имеет ровно один корень.

$$\frac{a \cdot 2^x(2^x - 1) - (2a + 2)(2^x - 1) - (2^{x+1} + 1)}{2^x - 1} = 0$$

Область определения уравнения: $x \neq 0$

$$a \cdot 2^{2x} - a \cdot 2^x - (2a + 2) \cdot 2^x + 2a + 2 - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$a \cdot 2^{2x} - (3a + 4) \cdot 2^x + 2a + 1 = 0$$

Пусть t = 2^x, тогда $a \cdot t^2 - (3a + 4) \cdot t + 2a + 1 = 0$

Найдите все a, при каждом из которых уравнение $a \cdot 2^x - \frac{2^{x+1}+1}{2^x-1} = 2a + 2$ имеет ровно один корень.

$$a \cdot t^2 - (3a+4) \cdot t + 2a + 1 = 0 \ (*)$$

Требование единственности корня исходного уравнения можно достичь, если:
а) уравнение (*) линейное и имеет единственный корень и он положительный;
б) уравнение (*) квадратное и имеет два равных положительных корня;
в) уравнение (*) квадратное и имеет два корня разных знаков;
г) уравнение (*) квадратное, один корень которого равен 0, а другой положительный

а) $a = 0;$ $\quad -4 \cdot t + 1 = 0;$ $\quad t = \frac{1}{4};$

б) $a \neq 0;$ $\quad D = (3a+4)^2 - 4 \cdot a(2a+1) = a^2 + 20a + 16$

$D = 0;$ $\quad a^2 + 20a + 16 = 0$

$a = -10 \pm 2\sqrt{21};$ $\quad t_1 = t_2 = \frac{3a+4}{2a}$

Если $a = -10 + 2\sqrt{21}$, то $t_1 = t_2 = \frac{3\cdot(-10+2\sqrt{21})+4}{2\cdot(-10+2\sqrt{21})} < 0$

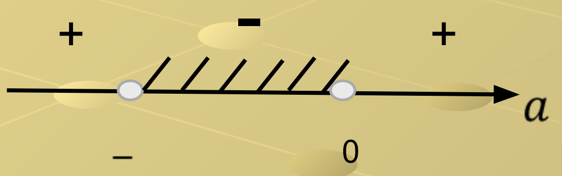
Если $a = -10 - 2\sqrt{21}$, то $t_1 = t_2 = \frac{3\cdot(-10-2\sqrt{21})+4}{2\cdot(-10-2\sqrt{21})} > 0$

Найдите все a, при каждом из которых уравнение $a \cdot 2^x - \frac{2^{x+1}+1}{2^x-1} = 2a + 2$ имеет ровно один корень.

$$a \cdot t^2 - (3a+4) \cdot t + 2a + 1 = 0 \ (*)$$

Требование единственности корня исходного уравнения можно достичь, если:
а) уравнение (*) линейное и имеет единственный корень и он положительный;
б) уравнение (*) квадратное и имеет два равных положительных корня;
в) уравнение (*) квадратное и имеет два корня разных знаков;
г) уравнение (*) квадратное, один корень которого равен 0, а другой положительный

в) $t_1 \cdot t_2 = \frac{2a+1}{a}$; $\quad \frac{2a+1}{a} < 0$



$a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

г) $2a + 1 = 0$ $\qquad -0{,}5t^2 - 2{,}5t = 0$

$a = -\frac{1}{2}$ $\qquad t = 0; \quad t = -5$

Ответ: при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \{-10 - 2\sqrt{21}\}$ уравнение имеет ровно один корень

Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$$2 \cdot (|x-2|+|x|)^2 - 3(a-2)\cdot(|2-x|+|x|) + a^2 - 3a = 0$$

имеет не менее трех различных корней.

Пусть $t = |x-2|+|x|$, тогда $2t^2 - 3\cdot(a-2)t + (a^2-3a) = 0$ (*)

$$D = 9(a-2)^2 - 8(a^2-3a) = a^2 - 12a + 36 = (a-6)^2$$

$$t_{1;2} = \frac{3(a-2) \pm \sqrt{(a-6)^2}}{4} = \frac{3(a-2) \pm |a-6|}{4} = \frac{3(a-2) \pm (a-6)}{4}$$

$$t_1 = a-3; \qquad t_2 = \frac{a}{2}$$

Рассмотрим какие значения должны принимать корни уравнения (*), чтобы выполнялось заданное условие.

$$t(x) = |x-2|+|x| = \begin{cases} x-2+x, \text{если } x \geq 2 \\ -x+2+x, \text{если } 0 < x < 2 \\ -x+2-x, \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

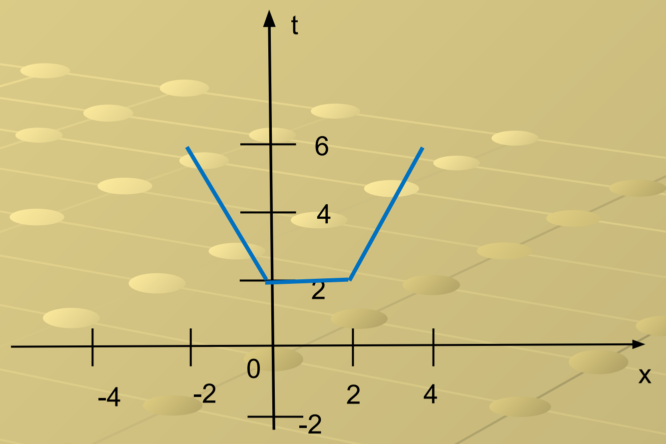
Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

$$2 \cdot (|x-2| + |x|)^2 - 3(a-2) \cdot (|2-x| + |x|) + a^2 - 3a = 0$$

имеет не менее трех различных корней.

$$2t^2 - 3 \cdot (a-2)t + (a^2 - 3a) = 0 \ (*)$$

Таким образом, $t(x) = \begin{cases} 2x-2, \text{если } x \geq 2 \\ 2, \text{если } 0 < x < 2 \\ -2x+2, \text{если } x \leq 0 \end{cases}$



Исходное уравнение имеет не менее трех различных корней, если:
а) один из корней уравнения (*) равен 2;
б) корни уравнения (*) различны и больше или равны 2

а) $a - 3 = 2$ или $\frac{a}{2} = 2$

$a = 5$ $\qquad a = 4$

б) $\begin{cases} D \neq 0 \\ a - 3 \geq 2 \\ \frac{a}{2} \geq 2 \end{cases}$; $\begin{cases} a \neq 6 \\ a \geq 5 \\ a \geq 4 \end{cases}$; $\quad a \in [5; 6) \cup (6; +\infty)$

Ответ: при $a \in \{4\} \cup [5; 6) \cup (6; +\infty)$ уравнение имеет не менее трех различных корней

Найдите все значения параметра a, при которых функция $f(x) = x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1$ на промежутке $(-\infty;\ -1)$ имеет не менее двух корней

$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0 \,\big|: x^2,$ т. к. $x = 0$ не является корнем уравнения

$$x^2 + (a+1)x + (2a+1) - (a+1)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + (a+1)\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2a+1) = 0$$

Пусть $x - \frac{1}{x} = y$, тогда $y^2 + (a+1)y + 2a + 3 = 0\ (*)$

Функция $y = f(x) = x - \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; -1)$ от $-\infty$ до $f(-1) = 0$ значит, условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда уравнение (*) имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $(-\infty; 0)$, то есть оба корня различны и отрицательны

$$\begin{cases} D > 0 \\ y_1 + y_2 < 0 \\ y_1 \cdot y_2 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (a+1)^2 - 4\cdot(2a+3) > 0 \\ -(a+1) < 0 \\ 2a + 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 6a - 11 > 0 \\ a > -1 \\ a > -\frac{1}{5} \end{cases}; a \in \left(3 + 2\sqrt{5};\ +\infty\right)$$

Ответ: при $a \in \left(3 + 2\sqrt{5};\ +\infty\right)$ уравнение имеет не менее двух корней

1) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a-3)\sqrt{16-(x-4)^2}$ имеет ровно два различных действительных корня

2) Найдите все a, при каждом из которых уравнение $2cos2x + 2asinx + a - 1 = 0$ имеет наибольшее количество решений на отрезке $\left[-\pi; \frac{17\pi}{6}\right]$. Чему равно это количество?

3) Найдите все a, при каждом из которых уравнение $log_{3a+2}(cos^2x - a^2cosx + a^2) = 0$ имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3};\ 2\pi\right]$

4) Для каждого допустимого значения a решите неравенство: $log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \le log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$