



Учитель математики МОУ «Лицей №5»  
г. Железногорска  
Олейник Ольга Владимировна

# «Решение задач с параметрами»

1) Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\frac{2a^2 - (x+3)a - x^2 + 3x}{x^2 - 9} = 0$  имеет ровно один корень.

2) Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a \cdot 2^x - \frac{2^{x+1} + 1}{2^x - 1} = 2a + 2$  имеет ровно один корень.

3) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2 \cdot (|x - 2| + |x|)^2 - 3(a - 2) \cdot (|2 - x| + |x|) + a^2 - 3a = 0$  имеет не менее трех различных корней.

4) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых функция  $f(x) = x^4 + (a + 1)x^3 + (2a + 1)x^2 - (a + 1)x + 1$  на промежутке  $(-\infty; -1)$  имеет не менее двух корней

Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\frac{2a^2 - (x+3)a - x^2 + 3x}{x^2 - 9} = 0$  имеет ровно один корень.

$$\frac{-x^2 + 3x - ax - 3a + 2a^2}{x^2 - 9} = 0$$

$$\frac{x^2 + (a - 3)x - 2a^2 + 3a}{x^2 - 9} = 0$$

Область определения уравнения:  $x \neq \pm 3$

Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\frac{2a^2 - (x+3)a - x^2 + 3x}{x^2 - 9} = 0$  имеет ровно один корень.

$$x^2 + (a - 3)x - 2a^2 + 3a = 0$$

$$D = (a - 3)^2 - 4(-2a^2 + 3a) = 9(a - 1)^2 \geq 0$$

Требование единственности можно достичь, если:

- а) корни квадратного уравнения равны;
- б) один из корней квадратного уравнения принадлежит области определения исходного уравнения, а другой не принадлежит.

а)  $D = 0; a = 1$

б)  $D > 0$

$x = 3$

$$3^2 + (a - 3) \cdot 3 - 2a^2 + 3a = 0$$

$$a^2 - 3a = 0$$

$$a = 0; a = 3$$

$x = -3$

$$(-3)^2 - 3(a - 3) - 2a^2 + 3a = 0$$

$$a^2 - 9 = 0$$

$$a = 3; a = -3$$

Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\frac{2a^2 - (x+3)a - x^2 + 3x}{x^2 - 9} = 0$  имеет ровно один корень.

Таким образом, при  $a = 3$  исходное уравнение корней не имеет, при  $a = 0$ ,  $a = -3$  уравнение имеет единственный корень

Ответ: при  $a = 1$ ,  $a = 0$ ,  $a = -3$  уравнение имеет ровно один корень

Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a \cdot 2^x - \frac{2^{x+1}+1}{2^x-1} = 2a + 2$  имеет ровно один корень.

$$\frac{a \cdot 2^x(2^x - 1) - (2a + 2)(2^x - 1) - (2^{x+1} + 1)}{2^x - 1} = 0$$

Область определения уравнения:  $x \neq 0$

$$a \cdot 2^{2x} - a \cdot 2^x - (2a + 2) \cdot 2^x + 2a + 2 - 2 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$a \cdot 2^{2x} - (3a + 4) \cdot 2^x + 2a + 1 = 0$$

Пусть  $t = 2^x$ , тогда  $a \cdot t^2 - (3a + 4) \cdot t + 2a + 1 = 0$

Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a \cdot 2^x - \frac{2^{x+1}+1}{2^x-1} = 2a + 2$  имеет ровно один корень.

$$a \cdot t^2 - (3a + 4) \cdot t + 2a + 1 = 0 (*)$$

Требование единственности корня исходного уравнения можно достичь, если:

- а) уравнение (\*) линейное и имеет единственный корень и он положительный;
- б) уравнение (\*) квадратное и имеет два равных положительных корня;
- в) уравнение (\*) квадратное и имеет два корня разных знаков;
- г) уравнение (\*) квадратное, один корень которого равен 0, а другой положительный

а)  $a = 0$ ;  $-4 \cdot t + 1 = 0$ ;  $t = \frac{1}{4}$ ;

б)  $a \neq 0$ ;  $D = (3a + 4)^2 - 4 \cdot a(2a + 1) = a^2 + 20a + 16$

$D = 0$ ;  $a^2 + 20a + 16 = 0$

$a = -10 \pm 2\sqrt{21}$ ;  $t_1 = t_2 = \frac{3a+4}{2a}$

Если  $a = -10 + 2\sqrt{21}$ , то  $t_1 = t_2 = \frac{3 \cdot (-10 + 2\sqrt{21}) + 4}{2 \cdot (-10 + 2\sqrt{21})} < 0$

Если  $a = -10 - 2\sqrt{21}$ , то  $t_1 = t_2 = \frac{3 \cdot (-10 - 2\sqrt{21}) + 4}{2 \cdot (-10 - 2\sqrt{21})} > 0$

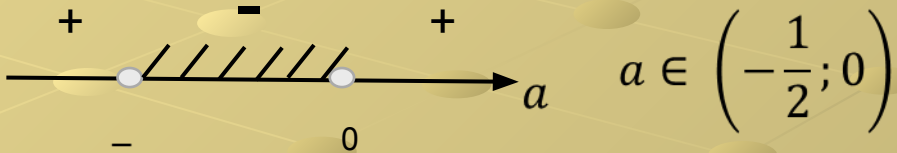
Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a \cdot 2^x - \frac{2^{x+1}+1}{2^x-1} = 2a + 2$  имеет ровно один корень.

$$a \cdot t^2 - (3a + 4) \cdot t + 2a + 1 = 0 (*)$$

Требование единственности корня исходного уравнения можно достичь, если:

- а) уравнение (\*) линейное и имеет единственный корень и он положительный;
- б) уравнение (\*) квадратное и имеет два равных положительных корня;
- в) уравнение (\*) квадратное и имеет два корня разных знаков;
- г) уравнение (\*) квадратное, один корень которого равен 0, а другой положительный

в)  $t_1 \cdot t_2 = \frac{2a+1}{a}; \quad \frac{2a+1}{a} < 0$



$a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

г)  $2a + 1 = 0$        $-0,5t^2 - 2,5t = 0$   
 $a = -\frac{1}{2}$        $t = 0; t = -5$

Ответ: при  $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \{-10 - 2\sqrt{21}\}$  уравнение имеет ровно один корень



Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  
$$2 \cdot (|x - 2| + |x|)^2 - 3(a - 2) \cdot (|2 - x| + |x|) + a^2 - 3a = 0$$
имеет не менее трех различных корней.

Пусть  $t = |x - 2| + |x|$ , тогда  $2t^2 - 3 \cdot (a - 2)t + (a^2 - 3a) = 0$  (\*)

$$D = 9(a - 2)^2 - 8(a^2 - 3a) = a^2 - 12a + 36 = (a - 6)^2$$

$$t_{1;2} = \frac{3(a - 2) \pm \sqrt{(a - 6)^2}}{4} = \frac{3(a - 2) \pm |a - 6|}{4} = \frac{3(a - 2) \pm (a - 6)}{4}$$

$$t_1 = a - 3; \quad t_2 = \frac{a}{2}$$

Рассмотрим какие значения должны принимать корни уравнения (\*), чтобы выполнялось заданное условие.

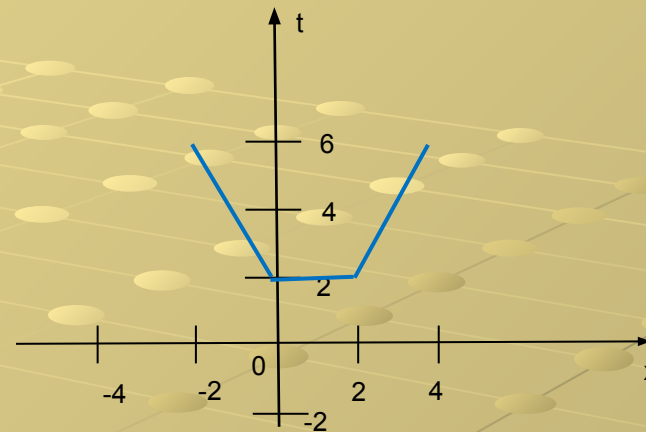
$$t(x) = |x - 2| + |x| = \begin{cases} x - 2 + x, & \text{если } x \geq 2 \\ -x + 2 + x, & \text{если } 0 < x < 2 \\ -x + 2 - x, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  

$$2 \cdot (|x - 2| + |x|)^2 - 3(a - 2) \cdot (|2 - x| + |x|) + a^2 - 3a = 0$$
имеет не менее трех различных корней.

$$2t^2 - 3 \cdot (a - 2)t + (a^2 - 3a) = 0 (*)$$

Таким образом,  $t(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } x \geq 2 \\ 2, & \text{если } 0 < x < 2 \\ -2x + 2, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$



Исходное уравнение имеет не менее трех различных корней, если:

- а) один из корней уравнения (\*) равен 2;
- б) корни уравнения (\*) различны и больше или равны 2

а)  $a - 3 = 2$  или  $\frac{a}{2} = 2$   
 $a = 5$                        $a = 4$

б)  $\begin{cases} D \neq 0 \\ a - 3 \geq 2 \\ \frac{a}{2} \geq 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \neq 6 \\ a \geq 5 \\ a \geq 4 \end{cases} \quad a \in [5; 6) \cup (6; +\infty)$

Ответ: при  $a \in \{4\} \cup [5; 6) \cup (6; +\infty)$  уравнение имеет не менее трех различных корней

Найдите все значения параметра  $a$ , при которых функция  $f(x) = x^4 + (a + 1)x^3 + (2a + 1)x^2 - (a + 1)x + 1$  на промежутке  $(-\infty; -1)$  имеет не менее двух корней

$$x^4 + (a + 1)x^3 + (2a + 1)x^2 - (a + 1)x + 1 = 0 \quad | : x^2, \quad \text{т.к. } x = 0 \text{ не является корнем уравнения}$$

$$x^2 + (a + 1)x + (2a + 1) - (a + 1)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + (a + 1)\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2a + 1) = 0$$

Пусть  $x - \frac{1}{x} = y$ , тогда  $y^2 + (a + 1)y + 2a + 3 = 0$  (\*)

Функция  $y = f(x) = x - \frac{1}{x}$  возрастает на промежутке  $(-\infty; -1)$  от  $-\infty$  до  $f(-1) = 0$

значит, условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда уравнение (\*) имеет два различных корня, принадлежащих промежутку  $(-\infty; 0)$ , то есть оба корня различны и отрицательны

$$\begin{cases} D > 0 \\ y_1 + y_2 < 0; \\ y_1 \cdot y_2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a + 1)^2 - 4 \cdot (2a + 3) > 0 \\ -(a + 1) < 0 \\ 2a + 3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 6a - 11 > 0 \\ a > -\frac{1}{5} \\ a > -\frac{1}{5} \end{cases} ; a \in (3 + 2\sqrt{5}; +\infty)$$

Ответ: при  $a \in (3 + 2\sqrt{5}; +\infty)$  уравнение имеет не менее двух корней

1) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a - 3)\sqrt{16 - (x - 4)^2}$  имеет ровно два различных действительных корня

2) Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$  имеет наибольшее количество решений на отрезке  $\left[-\pi; \frac{17\pi}{6}\right]$ . Чему равно это количество?

3) Найдите все  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\log_{3a+2}(\cos^2 x - a^2 \cos x + a^2) = 0$  имеет ровно четыре корня на промежутке  $\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$

4) Для каждого допустимого значения  $a$  решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \leq \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$