



# Практикум. НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пособие для учащихся 7, 9 классов. Изд. 6-е. 2017.- 72 с.

**Авторы:**

**Бобровская Алла Валерьяновна** – доцент, кандидат педагогических наук, член-корреспондент Международной академии наук педагогического образования, профессор Российской академии естествознания;

**Электронное сопровождение:**

**Чикунова Ольга Ивановна** – доцент, кандидат педагогических наук, профессор Российской Академии Естествознания, член Европейской Академии Естествознания, Заслуженный работник науки и образования.



## 2. Содержание

### Прямая. Луч. Отрезок

- §1 Лабораторная работа №1 "Построение прямой, луча, отрезка с помощью линейки"  
Лабораторная работа №2 "Измерение отрезка с помощью масштабной линейки. Длина отрезка"  
Практическая работа №1 "Откладывание отрезка с помощью циркуля и линейки"

### Угол. Сравнение углов

- §2 Лабораторная работа №3 "Измерение угла с помощью транспортира"  
Практическая работа №2 "Построение угла, равного данному, с помощью циркуля и линейки"  
Задачи и упражнения по готовым чертежам  
Тест №1. Тест №2

### Биссектриса угла

- §3 Лабораторная работа №4 "Деление угла пополам с помощью транспортира"  
Практическая работа №3 "Построение биссектрисы угла с помощью циркуля и линейки"  
Тест №3

### Смежные и вертикальные углы

- §4 Лабораторная работа №5 "Построение смежных и вертикальных углов с помощью линейки"  
Задачи и упражнения по готовым чертежам  
Тест №4. Тест №5

### Перпендикулярные прямые

- §5 Лабораторная работа №6 "Построение перпендикуляра к прямой с помощью угольника и линейки"  
Практическая работа №4 "Построение перпендикуляра к прямой с помощью циркуля и линейки"  
Тест №6

### Треугольники

- §6 Лабораторная работа №7 "Первый признак равенства треугольников"  
Лабораторная работа №8 "Второй признак равенства треугольников"  
Лабораторная работа №9 "Третий признак равенства треугольников"  
Практическая работа №5 "Построение треугольников с помощью циркуля и линейки"  
Лабораторная работа №10 "Медианы, биссектрисы, высоты треугольника"  
Задачи и упражнения по готовым чертежам

## 2. Содержание

### Равнобедренный треугольник

- §7
- Лабораторная работа №11 "Построение равнобедренного треугольника с помощью угольника и линейки"
  - Лабораторная работа №12 "Свойства равнобедренного треугольника"
  - Практическая работа №6 "Построение равнобедренного треугольника с помощью циркуля и линейки"
  - Задачи и упражнения по готовым чертежам
  - Тест №9. Тест №10

### Окружность.

- §8
- Относительное положение окружностей
  - Лабораторная работа №13 "Определение и свойства окружности"
  - Практическая работа №7 "Свойства и элементы окружности"
  - Практическая работа №8 "Геометрическое место точек, удаленных от данной точки на данном расстоянии"
  - Практическая работа №9 "Взаимное расположение двух окружностей"
  - Задачи и упражнения по готовым чертежам
  - Тест №11. Тест №12

### Параллельные прямые

- §9
- Лабораторная работа №14 "Признаки и свойства параллельных прямых"
  - Лабораторная работа №15 "Построение прямой, параллельной данной, с помощью угольника и линейки"
  - Практическая работа №10 "Построение прямой, параллельной данной, с помощью циркуля и линейки"
  - Задачи и упражнения по готовым чертежам
  - Тест №13. Тест №14

## 2. Содержание

### Соотношения между сторонами и углами треугольника

- §10 Лабораторная работа №16 "Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника"  
Задачи и упражнения по готовым чертежам  
Тест №15. Тест №16  
Лабораторная работа №17 "Соотношения между сторонами и углами треугольника"  
Задачи и упражнения по готовым чертежам  
Тест №17. Тест №18

### Прямоугольный треугольник

- §11 Лабораторная работа №18 "Элементы прямоугольного треугольника"  
Тест №19. Тест №20  
Лабораторная работа №19 "Признаки равенства прямоугольных треугольников"  
Практическая работа №11 "Построение прямоугольных треугольников с помощью циркуля и линейки"  
Задачи и упражнения по готовым чертежам

### Серединный перпендикуляр отрезка. Деление отрезка пополам

- §12 Практическая работа №12 "Построение серединного перпендикуляра к отрезку с помощью циркуля и линейки"  
Практическая работа №13 "Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек"

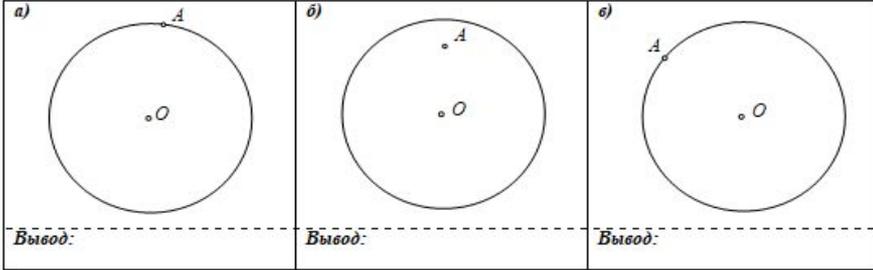
### Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

- §13 Лабораторная работа №20 "Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми"  
Лабораторная работа №21 "Геометрическое место точек плоскости, удаленных от данной прямой на данном расстоянии"  
Практическая работа №14 "Геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух прямых"  
Задачи и упражнения по готовым чертежам  
Тест №21. Тест №22  
Практическая работа №15 "Метод геометрических мест точек"

§8. Окружность. Относительное положение окружностей  
Лабораторная работа № 13

"Определение и свойства окружности"

Даны окружность с центром  $O$  и точка  $A$ . Проведите через эту точку: а) диаметр и хорду под углом  $45^\circ$  к диаметру; б) диаметр и хорду, перпендикулярную диаметру; в) диаметр и хорду, равную радиусу. Сделайте вывод о соотношениях между диаметром, радиусом и хордой.



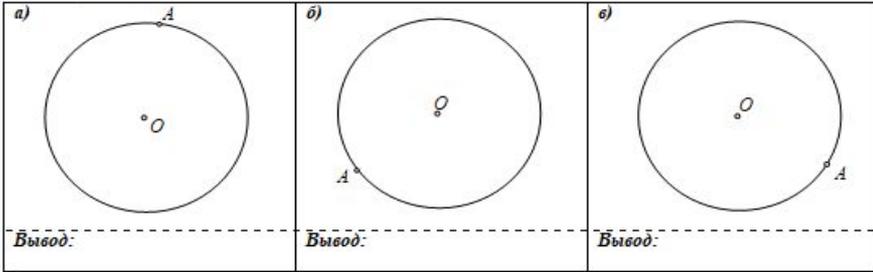
Вывод:

Вывод:

Вывод:

Диаметр окружности в 2 раза больше ее радиуса  
Диаметр окружности, перпендикулярный хорде,

Даны окружность с центром  $O$  и точка  $A$ . Постройте хорду  $AB$  так, чтобы: а) угол  $AOB$  был равен  $60^\circ$ ; б) угол  $AOB$  был равен  $90^\circ$ ; в) угол  $AOB$  был равен  $120^\circ$ . Сравните длины хорды и диаметра.



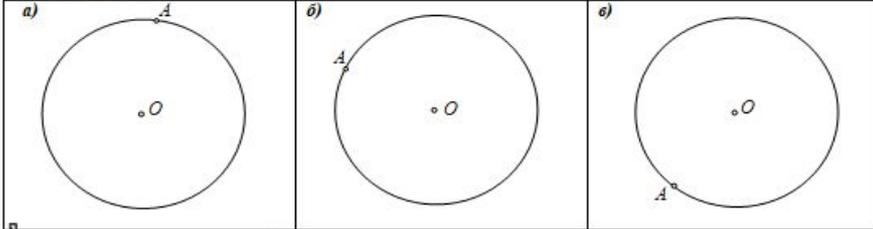
Вывод:

Вывод:

Вывод:

Если хорда не проходит через центр окружности, то она короче диаметра

Даны окружность с центром  $O$  и точка  $A$ . Постройте точки  $B, C, D, \dots$  окружности так, чтобы окружность разделилась на: а) две равные дуги; б) три равные дуги; в) на четыре равные дуги.

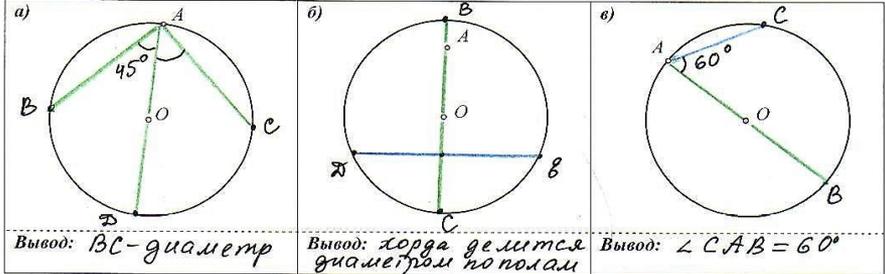


Часть окружности, ограниченная двумя ее точками, называется дугой

§8. Окружность. Относительное положение окружностей  
Лабораторная работа № 13

"Определение и свойства окружности"

Даны окружность с центром  $O$  и точка  $A$ . Проведите через эту точку: а) диаметр и хорду под углом  $45^\circ$  к диаметру; б) диаметр и хорду, перпендикулярную диаметру; в) диаметр и хорду, равную радиусу. Сделайте вывод о соотношениях между диаметром, радиусом и хордой.



Вывод:  $BC$  - диаметр

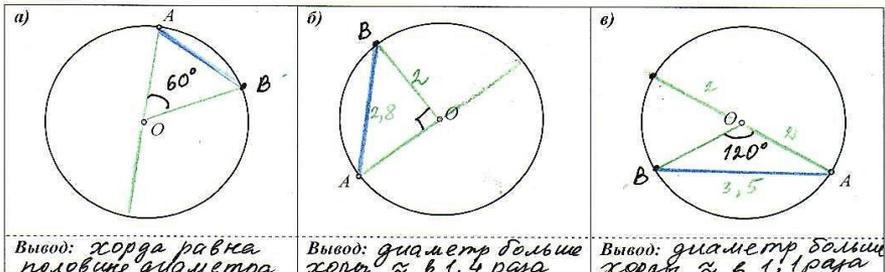
Вывод: хорда делится диаметром пополам

Вывод:  $\angle CAB = 60^\circ$

Диаметр окружности в 2 раза больше ее радиуса

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит ее пополам

Даны окружность с центром  $O$  и точка  $A$ . Постройте хорду  $AB$  так, чтобы: а) угол  $AOB$  был равен  $60^\circ$ ; б) угол  $AOB$  был равен  $90^\circ$ ; в) угол  $AOB$  был равен  $120^\circ$ . Сравните длины хорды и диаметра.



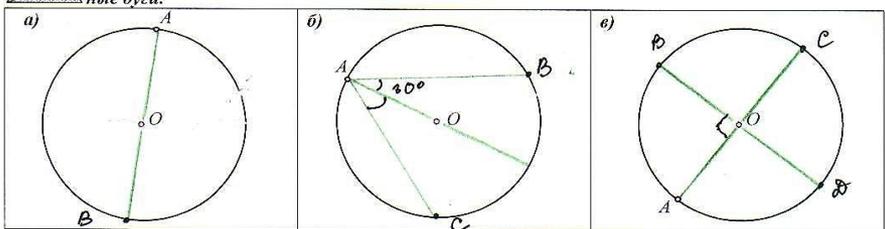
Вывод: хорда равна половине диаметра

Вывод: диаметр больше хорды  $\approx$  в 1,4 раза

Вывод: диаметр больше хорды  $\approx$  в 1,15 раза

Если хорда не проходит через центр окружности, то она короче диаметра

Даны окружность с центром  $O$  и точка  $A$ . Постройте точки  $B, C, D, \dots$  окружности так, чтобы окружность разделилась на: а) две равные дуги; б) три равные дуги; в) на четыре равные дуги.



Часть окружности, ограниченная двумя ее точками, называется дугой

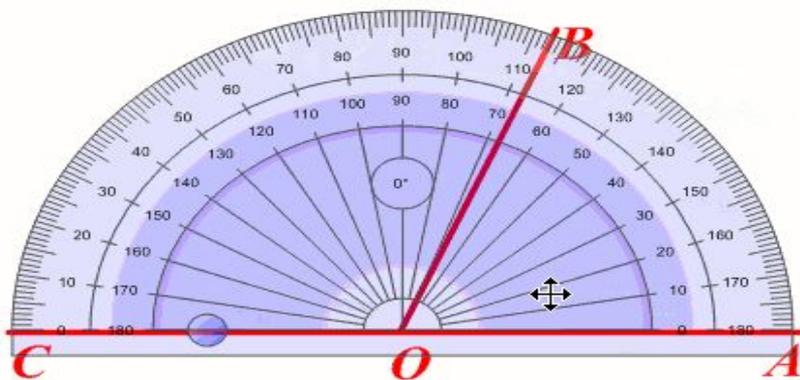
### 3. Пример лабораторной работы – эпизод видеоролика



## *Измерение углов с помощью транспортира*

*Измерьте с помощью транспортира углы, образованные лучами, выходящими из точки  $O$ .*

*Данный угол*



1.  $\angle AOB =$

2.  $\angle BOC =$

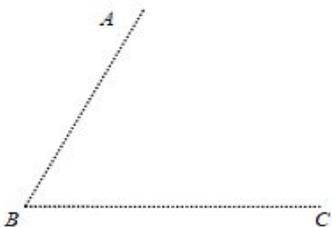
3.  $\angle AOC =$

*Инструменты*

Практическая работа №3

"Построение биссектрисы угла с помощью циркуля и линейки"

Дано:  $\angle ABC$   
 Построить:  $BD$  – биссектрису  $\angle ABC$   
 Решение.

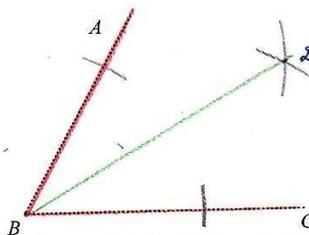


- Строим:
- 1)  $\text{окр.}(B, r)$ ,  $r$  – любой отрезок;
  - 2) точки  $A$  и  $C$  пересечения  $\text{окр.}(B, r)$  со сторонами угла;
  - 3)  $\text{окр.}(A, R)$ ,  $\text{окр.}(C, R)$ ;  $R$  – произвольный отрезок;
  - 4) точку  $D$  пересечения  $\text{окр.}(A, R)$  и  $\text{окр.}(C, R)$ ;
  - 5) луч  $BD$ .

Практическая работа №3

"Построение биссектрисы угла с помощью циркуля и линейки"

Дано:  $\angle ABC$   
 Построить:  $BD$  – биссектрису  $\angle ABC$   
 Решение.



- Строим:
- 1)  $\text{окр.}(B, r)$ ,  $r$  – любой отрезок;
  - 2) точки  $A$  и  $C$  пересечения  $\text{окр.}(B, r)$  со сторонами угла;
  - 3)  $\text{окр.}(A, R)$ ,  $\text{окр.}(C, R)$ ;  $R$  – произвольный отрезок;
  - 4) точку  $D$  пересечения  $\text{окр.}(A, R)$  и  $\text{окр.}(C, R)$ ;
  - 5) луч  $BD$ .

2 40% Дан угол  $AOB$ . Разделите угол: а) на 2 равных угла; б) на 4 равных угла; в) на 8 равных углов:

а)	б)
в)	г)

2 40% Дан угол  $AOB$ . Разделите угол: а) на 2 равных угла; б) на 4 равных угла; в) на 8 равных углов:

а)	б)
в)	г)

3 60% Постройте биссектрисы углов  $AOB$  и  $BOC$ . Найдите угол между биссектрисами. Сделайте предполагаемый вывод:

Вывод:	Вывод:	Вывод:

3 60% Постройте биссектрисы углов  $AOB$  и  $BOC$ . Найдите угол между биссектрисами. Сделайте предполагаемый вывод.

Вывод: $\angle COD = 90^\circ$	Вывод: $\angle COD = 90^\circ$	Вывод: $\angle COD = 90^\circ$

# 3. Пример практической работы – эпизод видеоролика

## Практическая работа №2

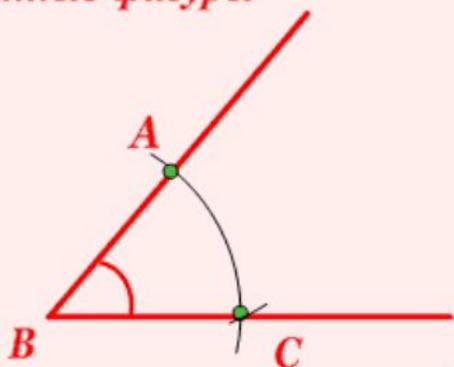
*"Построение угла, равного данному с помощью циркуля и линейки"*

**Дано:**  $\angle ABC$ .

**Построить:**  $\angle A_1B_1C_1 / \angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ .

**Решение.**

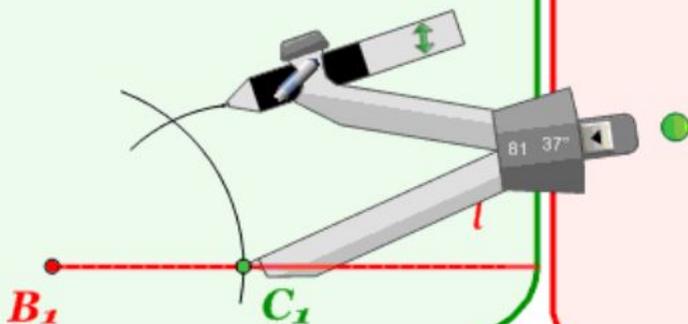
*Данные фигуры*



*Алгоритм*

- 1) Окр.(B,r), r - любой отрезок;
- 2) Точки A и C пересечения окр.(B,r) с лучами BA и BC ;
- 3) луч l с началом B<sub>1</sub>;
- 4) Окр.(B<sub>1</sub>,r);
- 5) Точка C<sub>1</sub> пересечения l и окр.(B<sub>1</sub>,r);
- 6) Окр.(C<sub>1</sub>,AC);
- 7) Точка A<sub>1</sub> пересечения окр.(B<sub>1</sub>,r) и окр.(C<sub>1</sub>,AC);
- 8)  $\angle A_1B_1C_1$ .

*Строим*

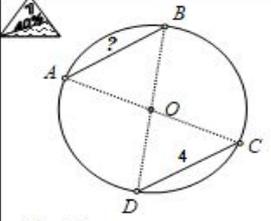
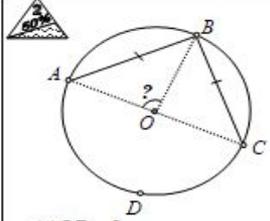
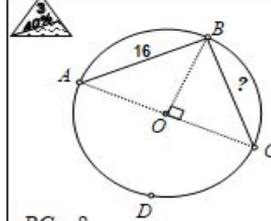
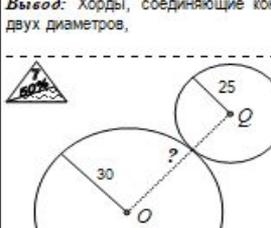
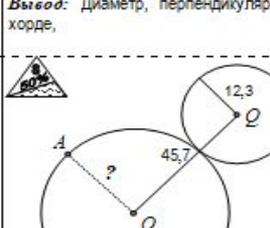
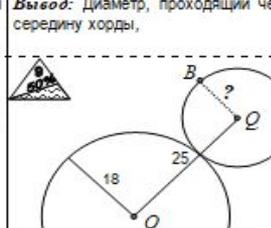
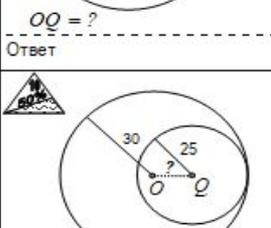
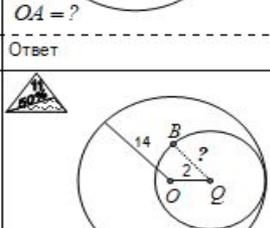
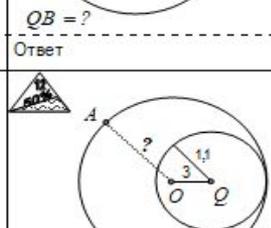


*Инструменты*

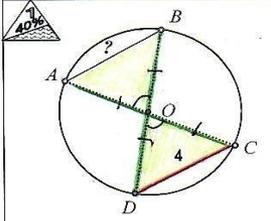
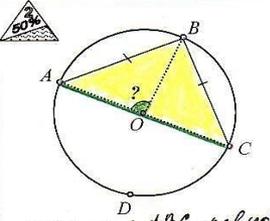
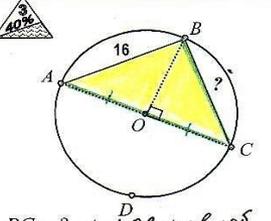
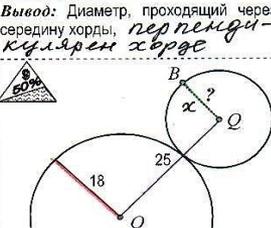
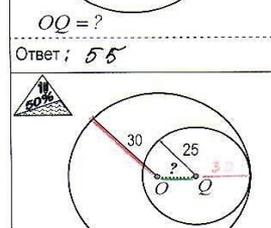
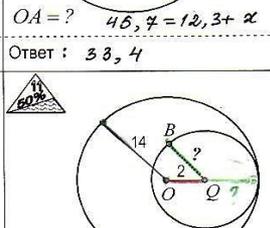
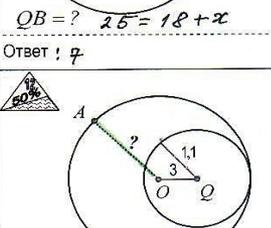
•	•
A	A <sub>1</sub>
B	B <sub>1</sub>
C	C <sub>1</sub>



Задачи и упражнения по готовым чертежам

 <p><math>AB = ?</math></p> <p>Ответ</p>	 <p><math>\angle AOB = ?</math></p> <p>Ответ</p>	 <p><math>BC = ?</math></p> <p>Ответ</p>
 <p>Доказать: <math>AB = CD</math> Доказательство.</p> <p>Вывод: Хорды, соединяющие концы двух диаметров,</p>	 <p>Доказать: <math>AH = CH</math> Доказательство.</p> <p>Вывод: Диаметр, перпендикулярный хорде,</p>	 <p>Доказать: <math>\angle AMB = 90^\circ</math> Доказательство.</p> <p>Вывод: Диаметр, проходящий через середину хорды,</p>
 <p><math>OQ = ?</math></p> <p>Ответ</p>	 <p><math>OQ = ?</math></p> <p>Ответ</p>	 <p><math>OQ = ?</math></p> <p>Ответ</p>
 <p><math>OQ = ?</math></p> <p>Ответ</p>	 <p><math>OQ = ?</math></p> <p>Ответ</p>	 <p><math>OQ = ?</math></p> <p>Ответ</p>

Задачи и упражнения по готовым чертежам

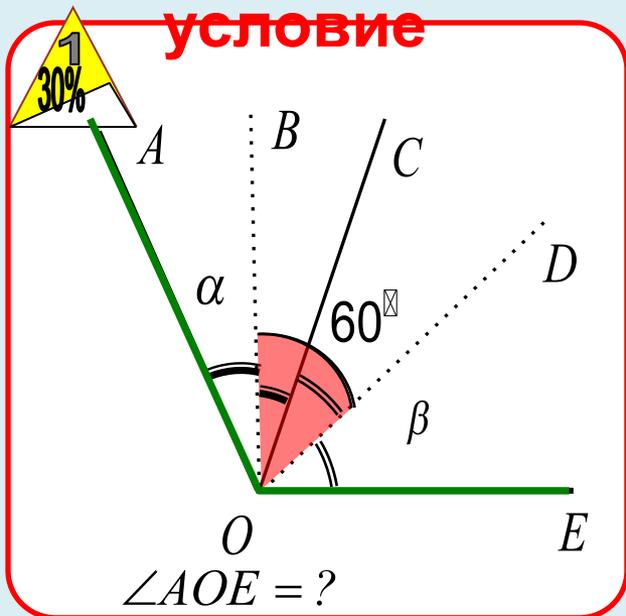
 <p><math>AB = ?</math></p> <p>Ответ 4</p>	 <p><math>\angle AOB = ?</math> <math>\triangle ABC</math>-равноб.</p> <p>Ответ: <math>\angle AOB = 90^\circ</math></p>	 <p><math>BC = ?</math> <math>\triangle ABC</math>-равноб.</p> <p>Ответ: <math>BC = 16</math></p>
 <p>Доказать: <math>AB = CD</math> Доказательство.</p> <p>Вывод: Хорды, соединяющие концы двух диаметров, равны</p>	 <p>Доказать: <math>AH = CH</math> Доказательство.</p> <p>Вывод: Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам</p>	 <p>Доказать: <math>\angle AMB = 90^\circ</math> Доказательство.</p> <p>Вывод: Диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен хорде</p>
 <p><math>OQ = ?</math></p> <p>Ответ: 55</p>	 <p><math>OQ = ?</math> <math>45,7 = 12,3 + x</math></p> <p>Ответ: 33,4</p>	 <p><math>OQ = ?</math> <math>25 = 18 + x</math></p> <p>Ответ: 7</p>
 <p><math>OQ = ?</math> <math>OQ = 30 - 25</math></p> <p>Ответ: 5</p>	 <p><math>OQ = ?</math> <math>OB = 14 - 2</math></p> <p>Ответ: 12</p>	 <p><math>OQ = ?</math> <math>OA = 1,1 = 3</math></p> <p>Ответ: 4,1</p>

Данные -  
красным

Учимся решать  
задачи  
Осуществление

Искомые -  
зеленым

## 1. Анализируем условие



$$\angle AOE = 2\alpha + 2\beta$$

$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

$$2(\alpha + \beta) = 120^\circ$$

$$\angle AOE = 120^\circ$$

Ответ:  $120^\circ$

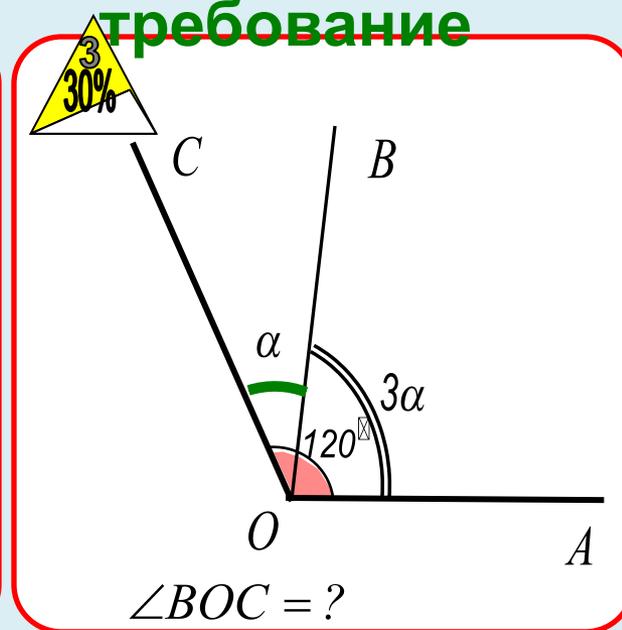
М

## поиск решения



Ответ:

## 2. Анализируем требование



Ответ:

# 3. Фрагменты содержания - Тесты по теории (22)

ТЕСТ №1

№	Вопрос	Вариант ответа	
1	Сколько неразвернутых углов определяют две пересекающиеся прямые?	1) один 3) три	2) два 4) четыре
2	Сколько углов определяют два луча с общим началом?	1) один 3) три	2) два 4) четыре
3	Чему равна градусная мера развернутого угла?	1) $1^\circ$ 3) $180^\circ$	2) $90^\circ$ 4) $180^\circ$
4	Какой угол является острым?	1) меньший $180^\circ$ 3) меньший тупого	2) меньший $90^\circ$ 4) больший $90^\circ$
5	Какой угол является тупым?	1) меньший $180^\circ$ 3) больший $0^\circ$ , но меньший $90^\circ$	2) больший $90^\circ$ 4) больший $180^\circ$
6	Какой угол является прямым?	1) меньший $90^\circ$ 3) меньший тупого	2) больший $90^\circ$ 4) больший тупого
7	Какие углы не являются равными?	1) с равными мерами 3) развернутые	2) вертикальные 4) смежные

ТЕСТ №2

№	Какие из следующих утверждений верны?
1	Если луч делит угол на два угла, то сумма градусных мер образующихся углов равна $180^\circ$ .
2	Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.
3	Если луч делит угол $120^\circ$ на два угла, один из которых равен $40^\circ$ , то градусная мера другого угла равна $80^\circ$ .
4	Если луч делит угол $180^\circ$ на два равных угла, то каждый из углов равен $90^\circ$ .
5	Если луч делит угол на два угла, один из которых $30^\circ$ , а другой - $120^\circ$ , то градусная мера третьего угла равна $30^\circ$ .
6	Если луч делит угол на два равных угла, один из которых равен $60^\circ$ , то градусная мера другого угла равна $120^\circ$ .
7	Если луч делит угол на два равных угла, один из которых равен $45^\circ$ , то градусная мера другого угла равна $90^\circ$ .
8	Биссектриса неразвернутого угла образует острые углы с его сторонами.
9	Угол называется тупым, если он меньше развернутого, но больше прямого.
10	Градусная мера прямого угла равна $90^\circ$ .
11	Неразвернутый угол меньше $180^\circ$ .
12	Угол называется развернутым, если его стороны лежат на одной прямой.
13	Градус - это угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.
14	Если углы равны, то равны и градусные меры углов.

ТЕСТ №4

№	Вопрос	Вариант ответа	
1	Сколько существует углов, смежных с данным?	1) один 3) три	2) два 4) четыре
2	Сколько существует углов, вертикальных с данным?	1) один 3) три	2) два 4) четыре
3	Чему равна сумма двух смежных углов?	1) $0^\circ$ 3) $180^\circ$	2) $90^\circ$ 4) $180^\circ$
4	Найдите градусную меру угла, смежного с углом в $45^\circ$ .	1) $45^\circ$ 3) $125^\circ$	2) $135^\circ$ 4) $145^\circ$
5	Найдите градусную меру угла, смежного с углом в $90^\circ$ .	1) $90^\circ$ 3) $45^\circ$	2) $180^\circ$ 4) $135^\circ$
6	Найдите градусную меру угла, образованного биссектрисами двух смежных углов.	1) $0^\circ$ 3) $45^\circ$	2) $90^\circ$ 4) $180^\circ$
7	Определите вид угла, смежного с углом $80^\circ$ .	1) острый 3) развернутый	2) тупой 4) прямой

№	Какие из следующих утверждений верны?
1	Сумма смежных углов равна $90^\circ$ .
2	Сумма смежных углов равна $180^\circ$ .
3	Если смежные углы равны, то они прямые.
4	Угол, смежный с прямым углом, прямой.
5	Угол, смежный с острым углом, острый.
6	Если два угла смежные, то один из них острый, а другой - тупой.
7	Если два угла смежные, то один из них прямой, а другой - тупой.
8	Если сумма двух углов равна $180^\circ$ , то эти углы смежные.
9	Если угол равен $60^\circ$ , то смежный с ним угол равен $120^\circ$ .
10	Если углы равны, то они вертикальные.
11	Угол между биссектрисами двух смежных углов равен $90^\circ$ .
12	Вертикальные углы равны.
13	Сумма вертикальных углов равна $180^\circ$ .
14	Биссектрисы вертикальных углов образуют смежные углы.
15	Если сумма вертикальных углов равна $180^\circ$ , то эти углы смежные.

ТЕСТ №7

№	Вопрос	Вариант ответа		Ответ
1	Найдите угол треугольника, если его биссектриса образует со стороной угол $45^\circ$ .	1) $22^\circ 30'$ 3) $55^\circ$	2) $90^\circ$ 4) $45^\circ$	
2	На сколько треугольников делит данный треугольник его медианы?	1) три 3) семь	2) шесть 4) два	
3	Сколько точек пересечения имеют высоты тупоугольного треугольника?	1) одну 3) две	2) ни одной 4) три	
4	Вершинами какого треугольника являются середины сторон равностороннего треугольника?	1) разностороннего 3) равнобедренного	2) равностороннего 4) прямоугольного	
5	Вершинами какого треугольника являются середины сторон равнобедренного треугольника?	1) разностороннего 3) равнобедренного	2) равностороннего 4) прямоугольного	

ТЕСТ №8

№	Какие из следующих утверждений верны?	Ответ (Да - нет)
1	Медиана треугольника делит любой угол треугольника пополам.	
2	Биссектриса угла треугольника делит этот угол пополам.	
3	Треугольники называются равными, если их можно совместить наложением.	
4	Все равносторонние треугольники равны между собой.	
5	В равных треугольниках против соответственных равных сторон лежат равные углы.	
6	В равных треугольниках против соответственных равных углов лежат равные стороны.	
7	Все стороны равных треугольников равны.	
8	Если сторона и два угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
9	Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
10	Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.	
11	Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	
12	Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
13	Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
14	Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
15	Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	
16	Если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то такие треугольники равны.	
17	Если основание и прилежащий к нему угол одного равнобедренного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника, то такие треугольники равны.	

# 3. Тесты для работы в интерактивном режиме

**Подготовка к ОГЭ** **Тест № 4**

4. Найдите градусную меру угла, смежного с  $\angle$  в  $45^\circ$ ?

- 1)  $45^\circ$  Неверно!
- 2)  $135^\circ$  Верно!
- 3)  $125^\circ$  Неверно!
- 4)  $180^\circ$  Неверно!



**Подготовка к ОГЭ**

6. Найдите градусную меру угла, образованного биссектрисами двух смежных углов?

- 1)  $0^\circ$
- 2)  $90^\circ$
- 3)  $45^\circ$



**Подготовка к ОГЭ** **Тест № 4**

7. Определите вид угла, смежного с углом  $80^\circ$ .

- 1) Острый Неверно!
- 2) Прямой Неверно!
- 3) Развернутый Верно!



**Подготовка к ОГЭ** **Тест № 17**

2. В треугольнике ABC, для которого  $AB=4$ ,  $BC=5$ ,  $AC=6$ , наименьшим углом является:

- 1) Угол B Неверно!
- 2) Угол C Верно!
- 3) Угол A Неверно!
- 4) Угол A или угол B Неверно!



**Подготовка к ОГЭ** **Тест № 21**

2. Где находятся все точки, равноудаленные от двух параллельных прямых?

- 1) В середине отрезка Неверно!
- 2) На окружности Неверно!
- 3) На средней линии прямых Верно!
- 4) На биссектрисе угла Неверно!

