Равносильность формул

Формулы $A(x_1,x_2...x_n)$ и $B(y_1,y_2...y_n)$ называются эквивалентными (или равносильными), если совпадают их таблицы истинности, т.е., если совпадают представляемые этими формулами функции *A~B*. Разные формулы могут описывать равные формы логических высказываний.

Эквивалентность формул в алгебре логики обозначается знаком тождественного равенства ≡ и знаком ~. Стандартный метод установления равносильности двух формул включает два правила:

1) по каждой формуле восстанавливается таблица истинности;

2) полученные таблицы сравниваются по каждому набору значений переменных.

Необходимо качественно различать символы ≡ и ~. Символ ~ является символом формального языка, с помощью которого строятся формулы. Символ ≡ обозначает отношение на множестве формул.

В логике выделяют следующие основные эквивалентные соотношения

Основные эквивалентные соотношения

1. $A \equiv A$ (закон тождества);
2. $A \& 0 \equiv 0$;
3. $A \vee 0 \equiv A$;
4. $A \& 1 \equiv A$;
5. $A \vee 1 \equiv 1$;
6. $\neg(\neg A) \equiv A$ (закон двойного отрицания);
7. $A \& (\neg A) \equiv 0$ (закон логического противоречия);
8. $A \vee (\neg A) \equiv 1$ (закон исключенного третьего);
9. $A \& A \equiv A$ (идемпотентность конъюнкции);
10. $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность дизъюнкции);
11. $A \& B \equiv B \& A$ (коммутативность конъюнкции);
12. $A \vee B \equiv B \vee A$ (коммутативность дизъюнкции);
13. $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$ (ассоциативность конъюнкции);
14. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (ассоциативность дизъюнкции);

Основные эквивалентные соотношения

15. $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции);

16. $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции);

17. $A \&(A \vee B) \equiv A$ (первый закон поглощения);

18. $A \vee (A \& B) \equiv A$ (второй закон поглощения);

19. $\neg (A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (первый закон де Моргана);

20. $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$ (второй закон де Моргана);

21. $A \equiv (A \& B) \vee (A \& \neg B)$ (первый закон расщепления);

22. $A \equiv (A \vee B) \& (A \vee \neg B)$ (второй закон расщепления);

23. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ (закон контрапозиции);

24. $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B = \neg (A \& \neg B)$;

25. $A \sim B \equiv (\neg A \vee B) \& (\neg B \vee A) = (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$;

26. $A \oplus B = (A \& \neg B) \vee (\neg A \& B)$;

27. $A \vee B = \neg A \rightarrow B = \neg (\neg A \& \neg B)$;

28. $A \& B = \neg (A \rightarrow \neg B) = \neg (\neg A \vee \neg B)$.

Эквивалентные соотношения

Эквивалентным (или тождественным) преобразованием некоторой формулы называют переход (по определенным правилам) к любой формуле, эквивалентной данной.

Например, применяют правило подстановки формулы *F* вместо переменной *A* . При подстановке формулы *F* вместо переменной *A* все вхождения переменной А в исходное соотношение должны быть одновременно заменены формулой *F*. Это правило замены применяется к эквивалентным соотношениям для получения новых эквивалентных соотношений.

Правило замены позволяет, используя известные эквивалентные соотношения, получать формулы, эквивалентные данной.

Существует понятие подформула — это часть формулы, которая сама является формулой.

Если некоторая формула *F* содержит F_1 в качестве подформулы, то можно заменить F_1 на эквивалентную ей F_2.

Полученная с помощью такой замены новая формула *G* эквивалентна исходной формуле *F*

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

1. Утверждающий модус (modus ponens) или правило МР:

«Если из высказывания А следует высказывание В и справедливо (истинно) высказывание А, то справедливо В».

Логическая форма этого умозаключения такова:

$$\frac{A \to B, A}{B}$$

Ветер вызывает волны на море. Сегодня ветер.

Следовательно, сегодня волны на море

2. Отрицающий модус (modus tollens):

«Если из А следует В, но высказывание В неверно, то неверно А».

Обозначается:

$$\frac{A \to B, -B}{\neg A}$$

Ветер вызывает волны на море. Сегодня волн нет.

Следовательно, сегодня нет ветра

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

3.Утверждающе-отрицающий модус (modus ponendo-tollens):

«Если справедливо либо высказывание А, либо высказывание В (в разделительном смысле) и истинно одно из них, то другое ложно»:

$$\frac{A \oplus B, A}{\neg B}$$

$$\frac{A \oplus B, B}{\neg A}$$

Иванов либо Петров заняли первое место на соревнованиях.

Иванов занял первое место на соревнованиях

Следовательно. Петров не занял первое место на соревнованиях

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

4. Отрицающе-утверждающий модус (modus tollendo-ponens):

а) «Если истинно либо А, либо В (в разделительном смысле) и неверно одно из них, то истинно другое»:

$$\frac{A \oplus B, -A}{B}$$

$$\frac{A \oplus B, -B}{A}$$

Иванов занял первое место на соревнованиях

Следовательно. Петров не занял первое место на соревнованиях

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

5. Правило транзитивности:
«Если из A следует B, а из B следует C, то из A следует C »:

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$$

Площадь круга A больше площади прямоугольника B.
Площадь прямоугольника B больше площади треугольника C.

Следовательно, площадь A больше площади C

6. Закон противоречия:

««Если из A следует B, а также из A следует $\neg$ B, то неверно A »:

$$\frac{A \to B, A \to \neg B}{\neg A}$$

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

7. Правило контрапозиции:

««Если из A следует B, то из того, что неверно B, следует, что неверно A

$$\frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$$

Ветер вызывает волны на море.

Отсутствие волн означает отсутствие ветра

8. Сложная контрапозиция:

««Если из A и B следует C, то из A и ¬ C следует ¬ B »:

$$\frac{(A \wedge B) - C}{A \wedge \neg C \to \neg B}$$

Хороший аппетит и хорошее здоровье создают хорошее настроение

Хороший аппетит и плохое настроение означают плохое здоровье

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

10. Правило импортации (объединения посылок):

$$\frac{A \to (B \to C)}{(A \wedge B) \to C}$$

11. Правило экспортации (разъединения посылок):

$$\frac{(A \wedge B) \to C)}{A \to (B \to C)}$$

$$\frac{A \to C,\, B \to C,\, A \vee B}{C}$$

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

Дилемма (греч di – дважды, lemma - предположение- двойное предположение) – суждение, в котором предмету приписывают 2 противоречащих признака, исключающих возможность третьего. Суждение в форме альтернативы.

12. Простая конструктивная дилемма:

$$\frac{A \to C, B \to C, A \vee B}{C}$$

«Если удобрение улучшает структуру почвы, то урожаи растут»
«Если удобрение улучшает питание растений, то урожаи растут»
Удобрение улучшает структуру почвы или питание растений
Следовательно, урожаи растут

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

Различают конструктивные (созидательные) дилеммы и деструктивные, простые и сложные.

13. Простая деструктивная дилемма

$$\frac{A\to B,\, A\to C,\, -B\vee\neg C}{\neg A}$$

Если математическая логика часть логики, то она включает логические методы

Если математическая логика часть математики , то она включает математические методы

В диссертации нет логики или нет математики.

Следовательно, диссертация не относится к математической логике

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

14. Сложная конструктивная дилемма

$$\frac{A \to B,\ C \to D,\ A \vee C}{B \vee D}$$

Аэрофотосъемка территории (А) позволяет получать фотоснимки местности (В)
Радиолокационная съемка (С) позволяет получать радиолокационные снимки местности (D)

Проводится аэрофотосъемка (А) или радиолокационная съемка (С) местности.

Следовательно, на данную местность имеются фотоснимки (В) или радиолокационные снимки (D)

СХЕМЫ РАССУЖДЕНИЙ

15. Сложная деструктивная дилемма

$$\frac{A\to B,\, C\to D,\, -B\wedge\neg D}{\neg A\wedge\neg C}$$

Съемка береговой линии (А) с помощью БПЛА позволяет вырабатывать мероприятия по защите береговой линии (В) от абразии

Проектирование защитных сооружений (С) позволяет создавать защитные сооружения (D) от абразии

Не проводится съемка (А) и не проводится проектирование защитных сооружений(С) данной береговой линии.

Следовательно, на данную местность не имеются выработанные мероприятия по защите (В) и защитные сооружения (D). Она не защищена от абразии

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Тавтологии можно получать из некоторого набора аксиом, с помощью правил вывода.
Эту задачу решает исчисление высказываний. Кроме 11 аксиом используется одно правило вывода MP утверждающий модус (modus ponens)

Каковы бы не были не были формулы A, B, C , для них существуют 11 аксиом исчисления высказываний.

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3. $(A \wedge B) \to A$
4. $(A \wedge B) \to B$
5. $A \to (B \to (A \wedge B))$
6. $A \to (A \vee B)$
7. $B \to (A \vee B)$
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$
9. $\neg A \to (A \to B)$
10. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
11. $A \vee \neg A$

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Выводом в исчислении высказываний называют конечную последовательность формул, каждая из которых есть аксиома или получается из них по правилу МР.

Пример 1

$$p \to (q \to p)$$

Это выражение является аналогом аксиомы 1. $A \to (B \to A)$

В котором A заменено на p, а B заменено на q.

Пример 2

$$(p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p))$$

Это выражение является аналогом аксиомы

2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

В котором A заменено на p, а B заменено на q, C заменено на p

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Пример 3

$$(p\to q)\to(p\to p)$$

Это выражение является результатом применения правила МР к примерам 1 и 2

$$\frac{A\to B, A}{B}$$

A = $p\to(q\to p)$; B= $(p\to q)\to(p\to p)$

Всякая пропозициональная формула А называется выводимой или теоремой исчисления высказываний, если существует вывод в котором последняя формула равна А. Пример 3 выводимая формула или теорема.

Исчисление высказываний

Теорема. Всякая теорема исчисления высказываний есть тавтология.

Проверим это для самой длинной аксиомы 2

2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (а2) или П→З

Для того чтобы формула (а2) была ложной (не тавтологией) посылка П $(A \to (B \to C))$ должна быть истиной, а заключение З $((A \to B) \to (A \to C))$ ложным.

Чтобы заключение было ложным необходимо $(A \to B) = 1$, $(A \to C) = 0$. Последнее означает $A=1$ $C=0$ (в1)

Получаем A, $(A \to B)$, $(A \to (B \to C)$ - истина

Из этого следует B, $(B \to C)$ - истина

Из этого следует C – истина (в2)

Выводы (в1) и (в2) есть противоречие, следовательно формула (а2) не бывает ложной

ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Пусть Г некоторое множество формул. Выводом из Г называется последовательность формул, каждая из которых является аксиомой и принадлежит к Г или получается из аксиом по правилу MP.
Всякая формула А называется выводимой из Г, если существует вывод из Г в котором последняя формула равна А
В этом случае применяют запись $\Gamma \vdash A$.
Эта запись читается «А выводима из Г». Если Г пустое множество, то пишут $\vdash A$

Высказывание вида **A V B (A дизъюнкция B)** истинно тогда и только тогда, когда ***истинно хотя бы одно из входящих в него простых (элементарных) высказываний***

Таблица истинности для **A V B**

A	B	A v B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Союз **«или»** употребляется в неисключающих друг друга случаях.