Окружность Аполлония

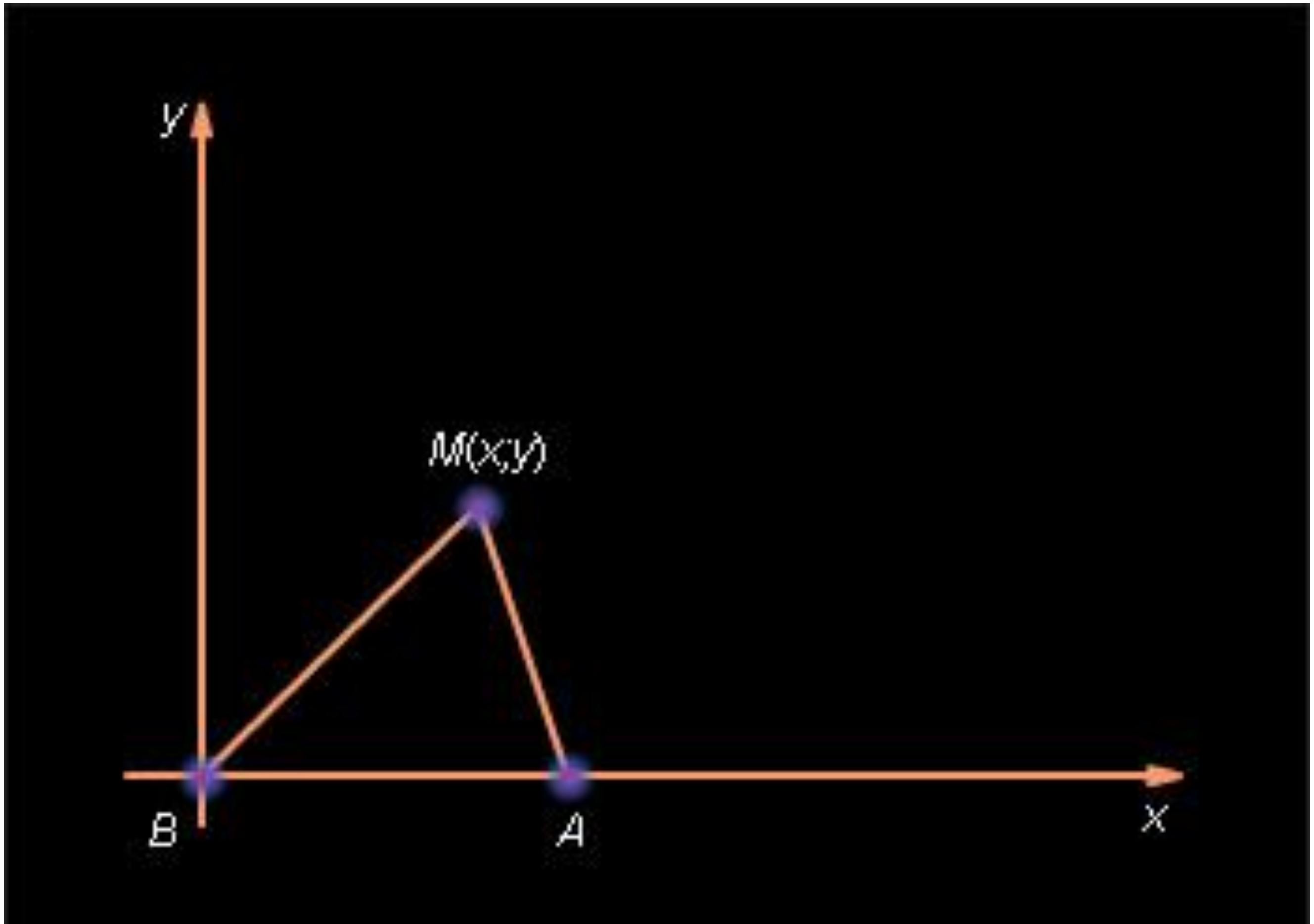
Задача: Что представляет собой множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная?

- Решение: Впервые эту задачу сформулировал и решил Аполлоний Пергский, (260-170 гг. до н.э.)

- Решение получилось очень сложное – поскольку применены геометрические приемы. Однако в работах французского математика Рене Декарта эта задача решена более элегантно. Декарт применил метод координат.

- . Итак, пусть даны две точки ,А и В и некоторое положительное число k, равное отношению расстояний до точки М.
- 1случай. Если k=1,тогда множество точек М есть серединный перпендикуляр к отрезку АВ.
- 2 случай. Пусть k целое не отрицательное число не равное 1
- Для удобства решения возьмем k=2 , т.е. МА: МВ=2.
- Введем систему прямоугольных координат. Совместим начало отсчета с точкой В. В качестве положительной полуоси х возьмем луч ВА.

- Тогда получим следующие координаты точек: B(0,0), A(a,0), M(x,y). Пусть a=3 опять для простоты рассуждений.



- Тогда, пользуясь формулами расстояния между двумя точками, запишем:

$$|MB| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$MB^2 = x^2 + y^2$$

$$|MA| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$MA^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$\frac{MA^2}{MB^2} = 2^2 = 4 \Rightarrow MA^2 = 4MB^2$$

$$(x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2)$$

$$x^2-6x+9+y^2=4x^2+4y^2$$

$$4x^2-x^2+6x-9-y^2+4y^2=0$$

$$3x^2+6x+3y^2=9$$

$$x^2+2x+y^2=3$$

$$(x+1)^2+y^2=4$$

- Получили уравнение окружности с центром в точке (-1;0) и радиусом r=2.
- Значение радиуса не случайно вспомним, что мы выбрали k=2.

- Решая задачу в общем виде т.е. при условии ,что точка А имеет координаты (a;0) и $k \neq 1$ получим уравнение окружности в виде:

- В данной системе координат точка *B* имеет координаты (0; 0), а точка *A* – (*a*; 0), где $a > 0$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка, удовлетворяющая условию задачи, то есть $AM = k \cdot BM$, где *k* – заданное положительное число. Если $k = 1$, то это означает, что искомое множество состоит из точек, равноудаленных от данных точек *A* и *B*. Из свойств серединного перпендикуляра к отрезку следует, что искомым множеством в этом случае будет прямая, проходящая через середину отрезка *AB* перпендикулярно оси *OX*.

- Пусть теперь *k* ≠ 1. имеем $AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $BM = \sqrt{x^2 + y^2}$, и условие принадлежности точки *M* искомому множеству можно записать в виде

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Это равенство эквивалентно равенствам

$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = k^2x^2 + k^2y^2;$$

$$\left(1 - k^2\right)x^2 - 2xa + a^2 + \left(1 - k^2\right)y^2 = 0;$$

$$x^2 - 2x\frac{a}{1 - k^2} + a^2 + y^2 = 0.$$

- Выделяя полный квадрат, получим

$$x^2 - 2x\frac{a}{1-k^2} + \frac{a^2}{\left(1-k^2\right)^2} - \frac{a^2}{\left(1-k^2\right)^2} + a^2 + y^2 = 0;\quad \left(x - \frac{a}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{\left(1-k^2\right)^2}.$$

- Это уравнение окружности с центром в точке $O\left(\frac{a}{1-k^2}, 0\right)$, лежащей на оси *OX*,
- и радиуса $R = \frac{ak}{\left|1-k^2\right|}$.
- Полученная окружность носит имя древнегреческого геометра Аполлония, решившего поставленную задачу чисто геометрическим методом.