

Окружность Аполлония

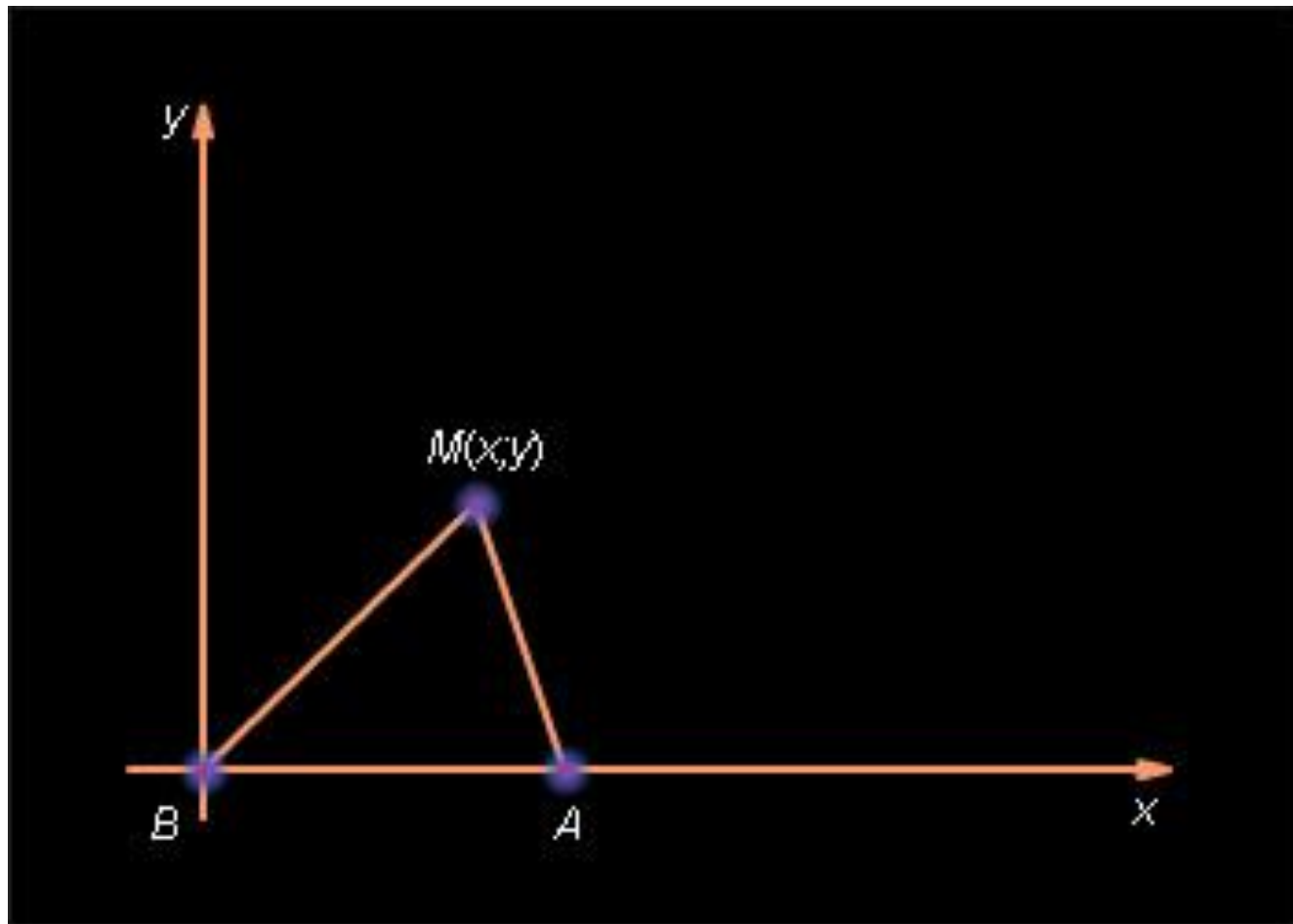
Задача: Что представляет собой множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная?

- Решение: Впервые эту задачу сформулировал и решил Аполлоний Пергский, (260-170 гг. до н.э.)

- Решение получилось очень сложное – поскольку применены геометрические приемы. Однако в работах французского математика Рене Декарта эта задача решена более элегантно. Декарт применил метод координат.

- . Итак, пусть даны две точки ,А и В и некоторое положительное число k , равное отношению расстояний до точки М.
- 1случай. Если $k=1$,тогда множество точек М есть серединный перпендикуляр к отрезку АВ.
- 2 случай. Пусть k целое не отрицательное число не равное 1
- Для удобства решения возьмем $k=2$, т.е. $MA: MB=2$.
- Введем систему прямоугольных координат. Совместим начало отсчета с точкой В. В качестве положительной полуоси x возьмем луч ВА.

- Тогда получим следующие координаты точек: $B(0,0)$, $A(a,0)$, $M(x,y)$. Пусть $a=3$ опять для простоты рассуждений.



- Тогда, пользуясь формулами расстояния между двумя точками, запишем:

$$|MB| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$MB^2 = x^2 + y^2$$

$$|MA| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$MA^2 = (x-3)^2 + y^2$$

$$\frac{MA^2}{MB^2} = 2^2 = 4 \Rightarrow MA^2 = 4MB^2$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$4x^2 - x^2 + 6x - 9 - y^2 + 4y^2 = 0$$

$$3x^2 + 6x + 3y^2 = 9$$

$$x^2 + 2x + y^2 = 3$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 4$$

- Получили уравнение окружности с центром в точке $(-1;0)$ и радиусом $r=2$.
- Значение радиуса не случайно вспомним, что мы выбрали $k=2$.

- Решая задачу в общем виде т.е. при условии ,что точка A имеет координаты $(a;0)$ и $k \neq 1$ получим уравнение окружности в виде:
- В данной системе координат точка B имеет координаты $(0; 0)$, а точка A – $(a; 0)$, где $a > 0$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка, удовлетворяющая условию задачи, то есть $AM = k \cdot BM$, где k – заданное положительное число. Если $k = 1$, то это означает, что искомое множество состоит из точек, равноудаленных от данных точек A и B . Из свойств серединного перпендикуляра к отрезку следует, что искомым множеством в этом случае будет прямая, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно оси Ox .

- Пусть теперь $k \neq 1$. имеем
и условие принадлежности точки M
искомому множеству можно записать в
виде

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Это равенство эквивалентно
равенствам

$$x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = k^2x^2 + k^2y^2;$$

$$(1 - k^2)x^2 - 2xa + a^2 + (1 - k^2)y^2 = 0;$$

$$x^2 - 2x \frac{a}{1 - k^2} + a^2 + y^2 = 0.$$

- Выделяя полный квадрат, получим

$$x^2 - 2x \frac{a}{1 - k^2} + \frac{a^2}{(1 - k^2)^2} - \frac{a^2}{(1 - k^2)^2} + a^2 + y^2 = 0; \quad \left(x - \frac{a}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2 k^2}{(1 - k^2)^2}$$

- Это уравнение окружности с центром в точке $O\left(\frac{a}{1 - k^2}, 0\right)$, лежащей на оси OX ,

- и радиуса $R = \frac{ak}{|1 - k^2|}$.

- Полученная окружность носит имя древнегреческого геометра [Аполлония](#), решившего поставленную задачу чисто геометрическим методом.