

# Тема урока:

Углы в пространстве. Перпендикулярность плоскостей.

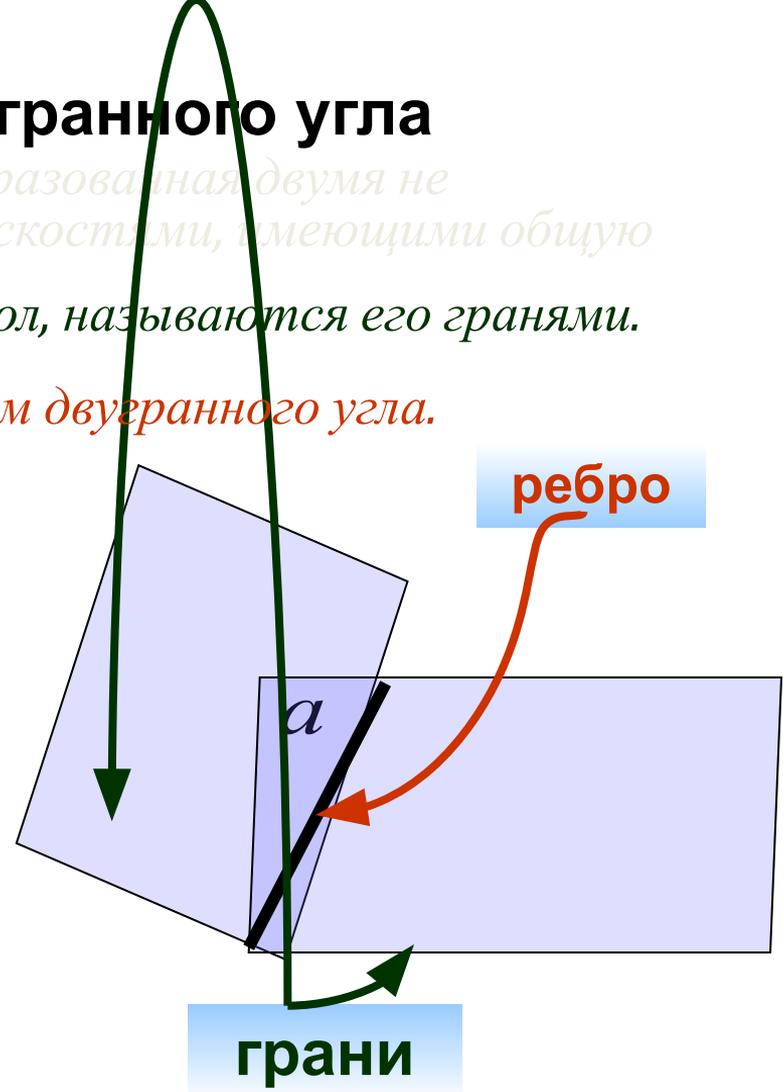
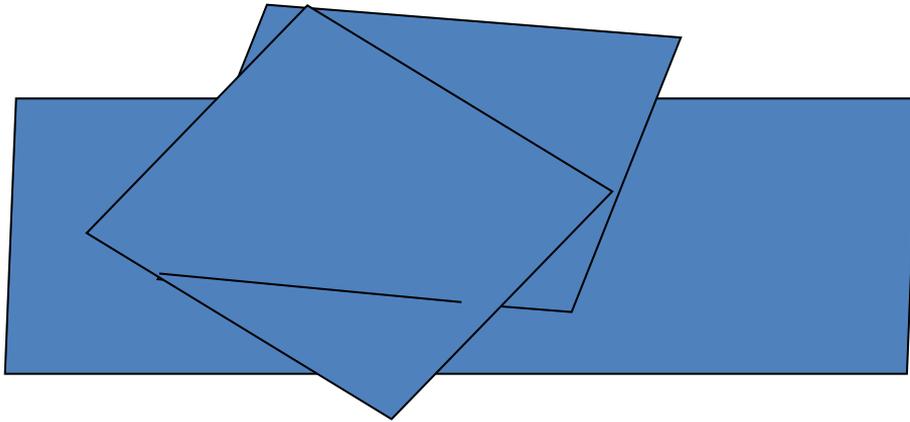
# Определение двугранного угла

*Двугранным углом называется фигура, образованная двумя не принадлежащим одной плоскости полуплоскостями, имеющими общую границу – прямую.*

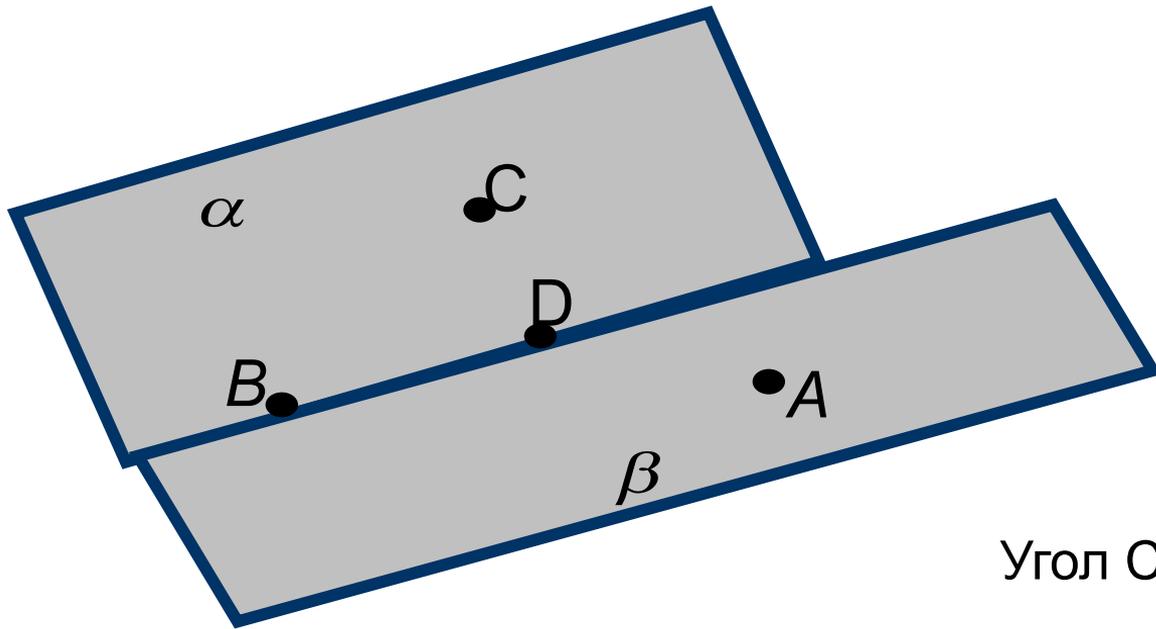
*Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями.*

$\alpha$

*Общая граница этих полуплоскостей – ребром двугранного угла.*



*Обозначение двугранного угла.*

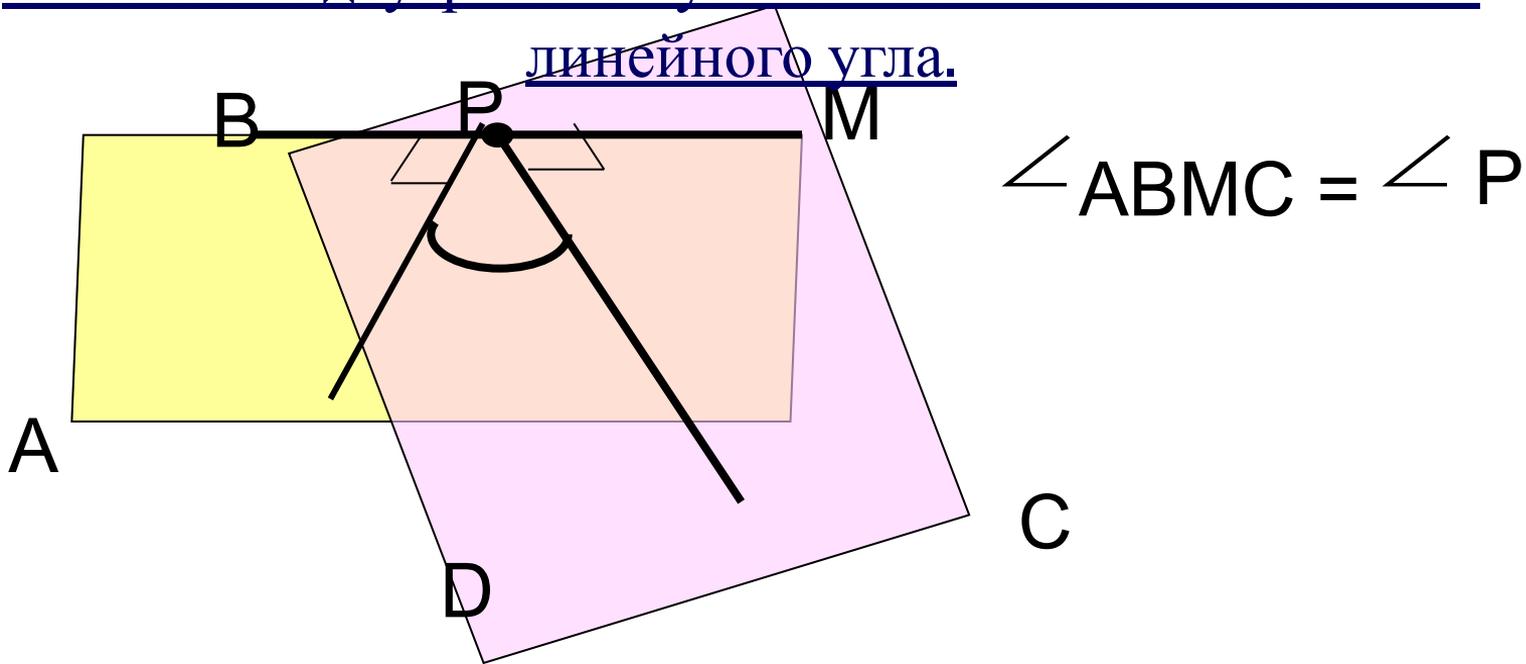


Угол  $CBDA$

## Измерение двугранных углов. Линейный угол.

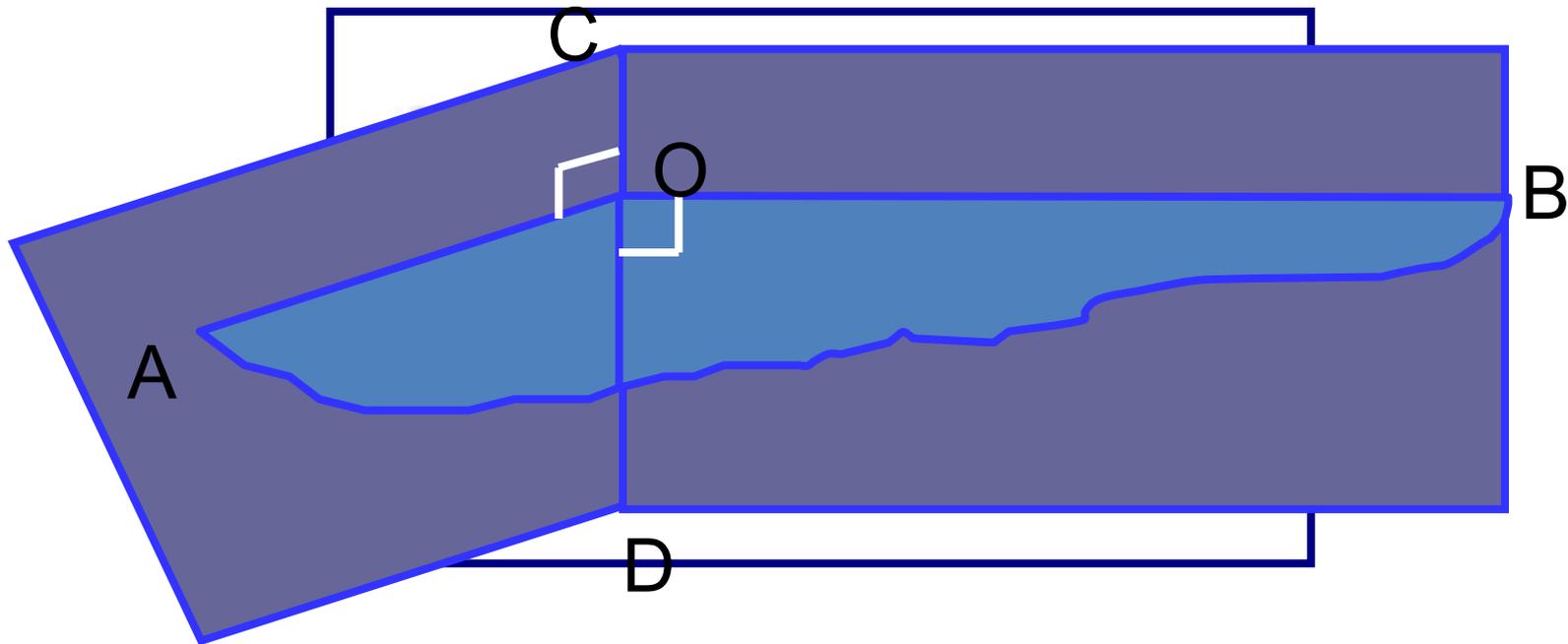
Величиной двугранного угла называется величина его

линейного угла.



Угол P – линейный угол двугранного угла ABMC

*Линейным углом двугранного угла называется сечение двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру.*



*Способ нахождения (построения) линейного угла.*

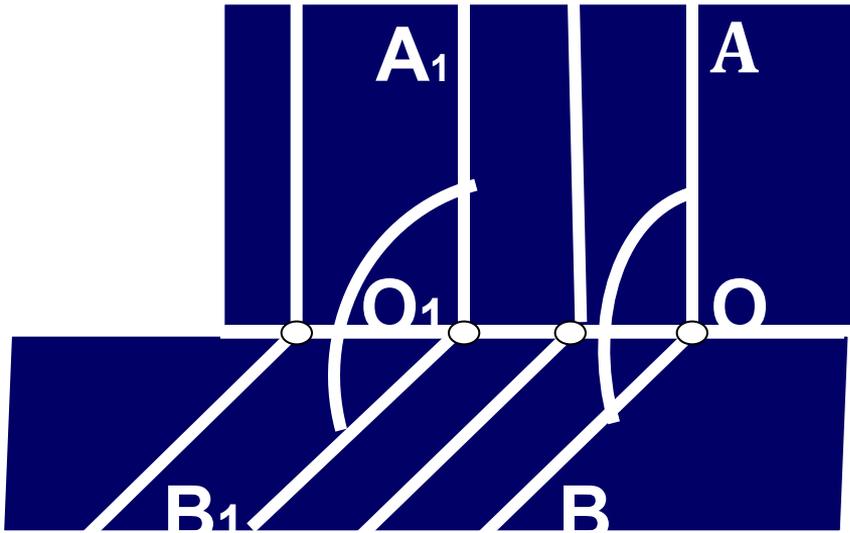
*1. Найти (увидеть) ребро и грани двугранного угла*

*2. В гранях найти направления (прямые) перпендикулярные ребру*

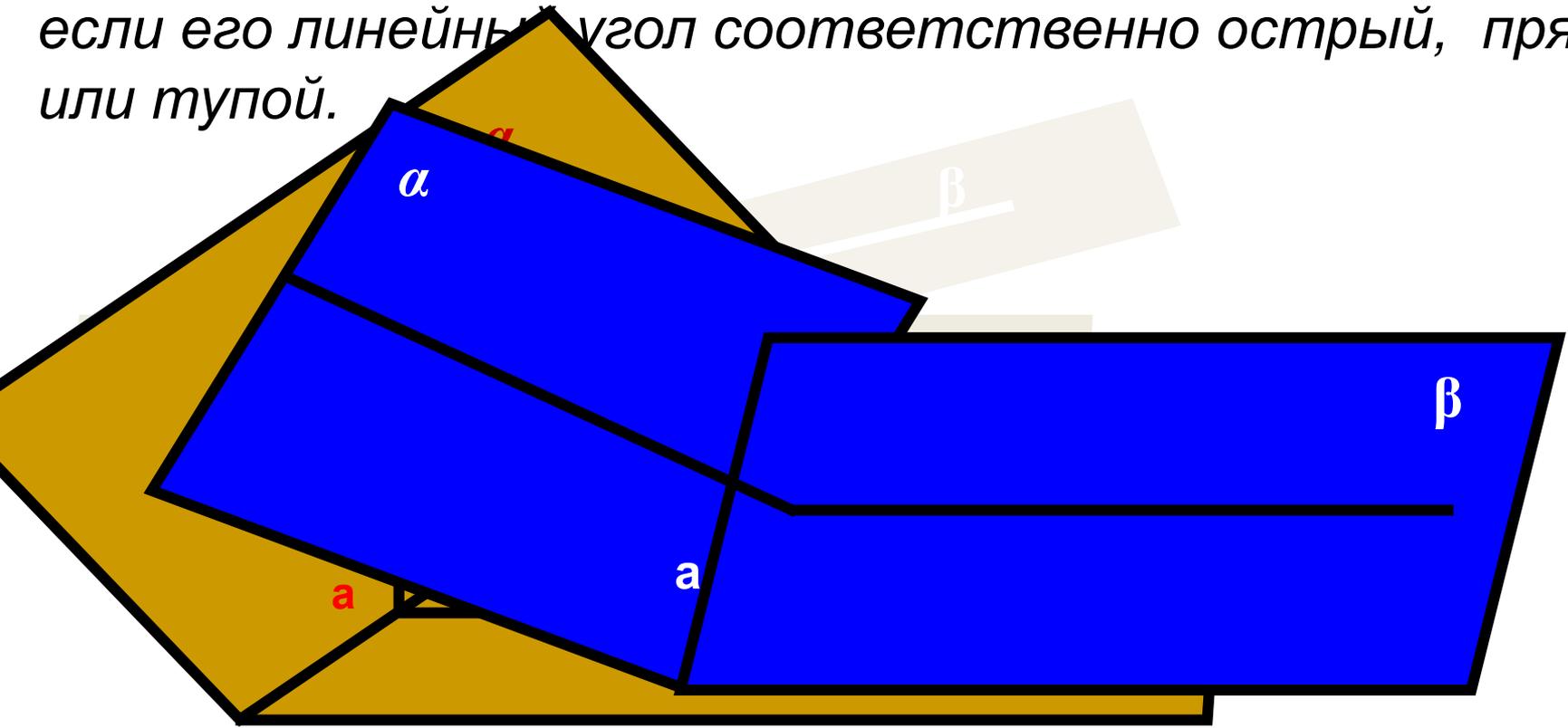
*3. (при необходимости) заменить выбранные направления параллельными им лучами с общим началом на ребре двугранного угла*

При изображении сохраняется **параллельность** и

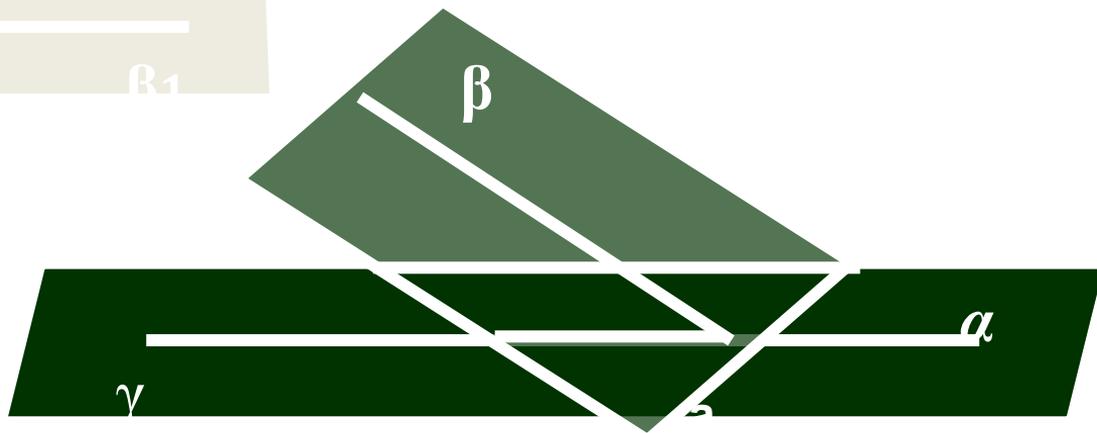
*Величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.*



*Двугранный угол является острым , прямым или тупым, если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой.*



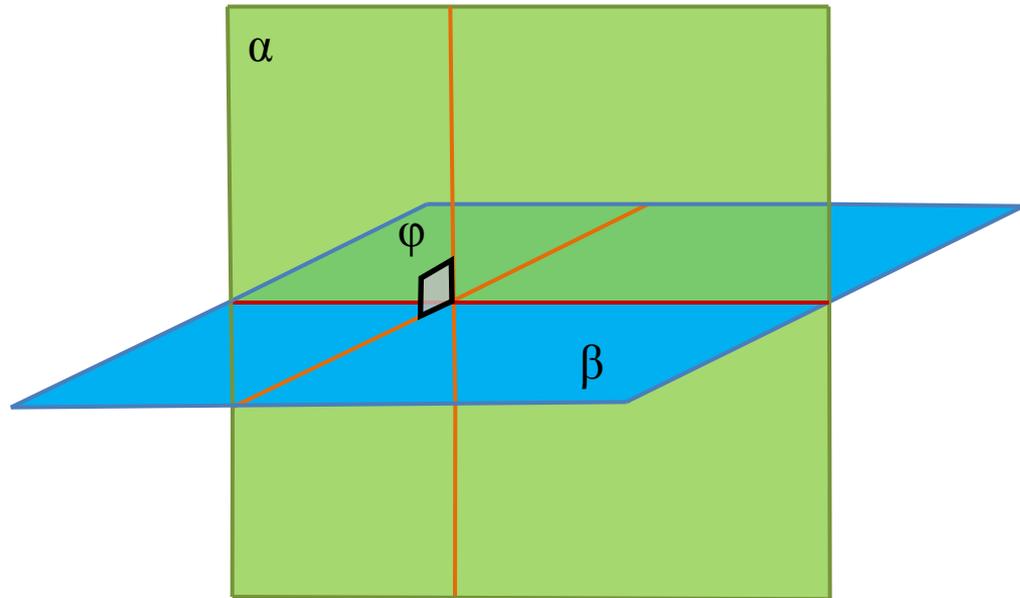
Аналогично тому , как и на плоскости , в пространстве определяются смежные и вертикальные двугранные углы.



Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных при их пересечении.

Угол между параллельными или совпадающими плоскостями полагается равным нулю.

$\alpha, \beta$  — плоскости  
 $\varphi$  — двугранный угол  
между плоскостями  
 $\varphi = 90^\circ$

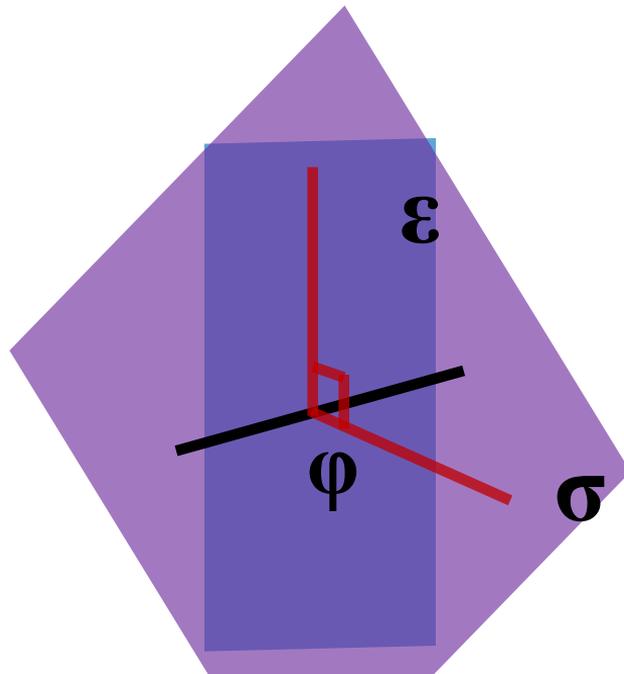




## Определение

Две плоскости называются перпендикулярными, если двугранный угол между ними равен  $90^\circ$

$$\varepsilon \perp \sigma, \text{ т.к. } \varphi = 90^\circ$$



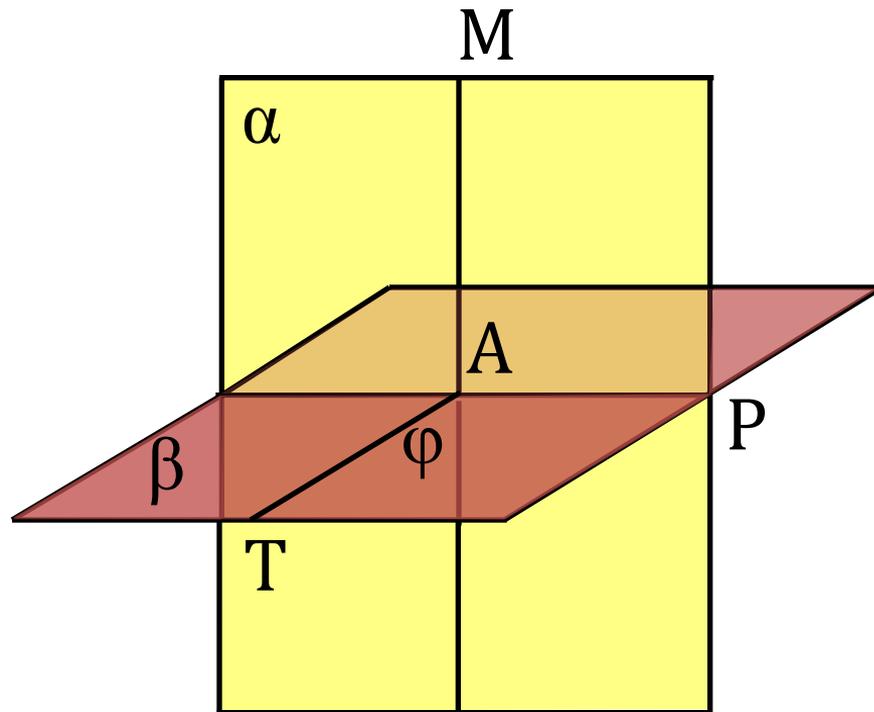


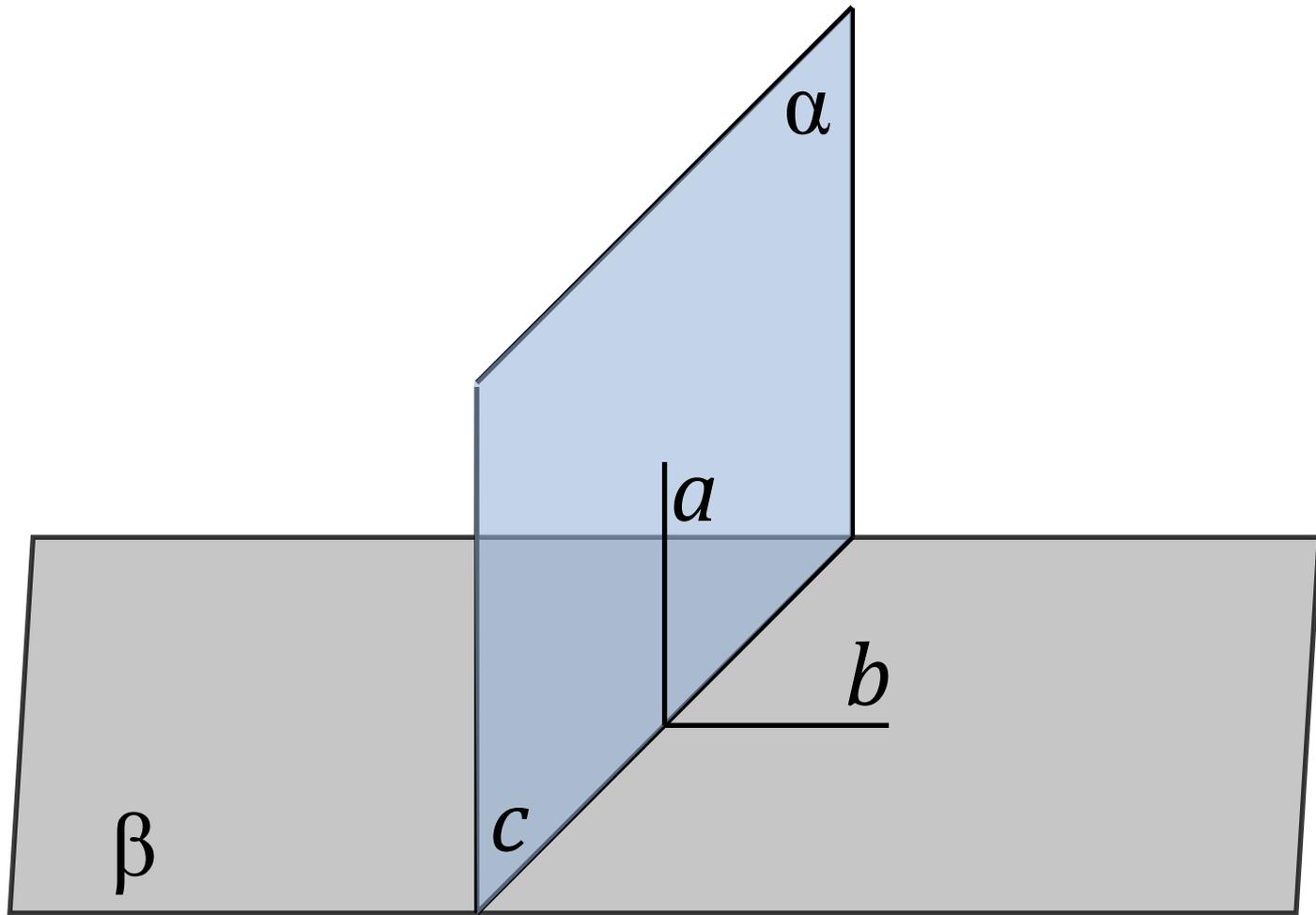
Стена и потолок



## Теорема (признак перпендикулярности двух плоскостей)

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны





# Задача

**Дано:**

$\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC \subset \alpha$ ,  $\angle$  между плоскостями  $\alpha$  и  $\triangle ABC = 60^\circ$ ,  $AC = 5$  см,  $AB = 13$  см

**Найти:** расстояние от  $B$  до  $\alpha$

**Решение:**

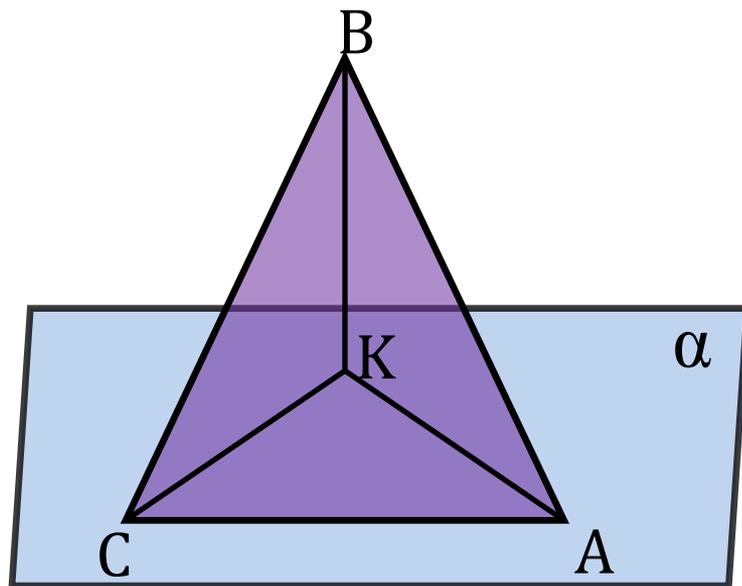
1) Построим  $BK \perp \alpha$ . Тогда  $KC$  — проекция  $BC$  на  $\alpha$

2)  $BC \perp AC$  (по условию), значит, (по ТТП),  $KC \perp AC \Rightarrow \angle BCK$  — линейный угол двугранного угла  $ABCK$ , т. е.  $\angle BCK = 60^\circ$

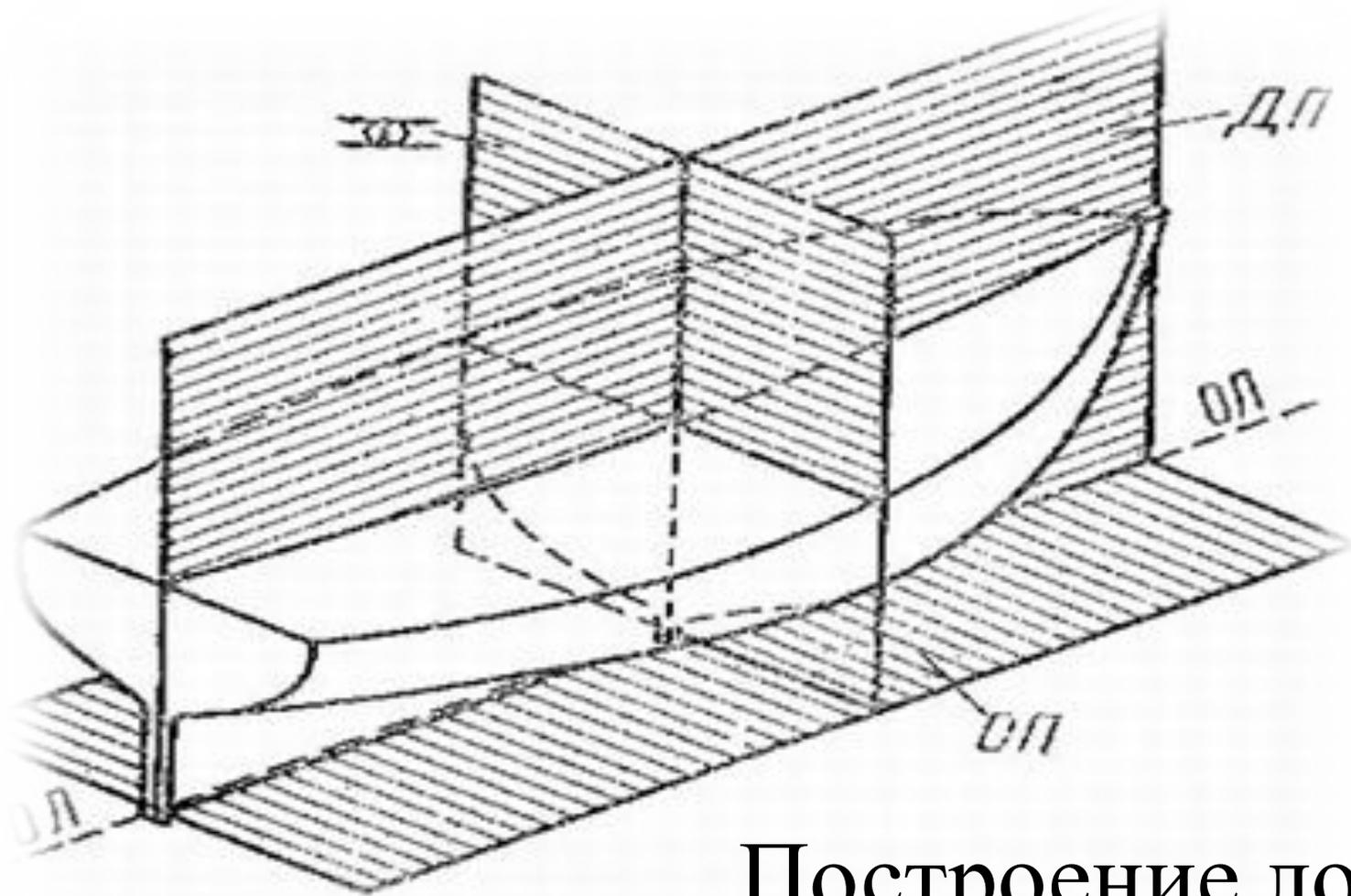
3) Из  $\triangle BCA$  по теореме Пифагора:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

из  $\triangle BCK$ :  $BK = BC \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$  (см)



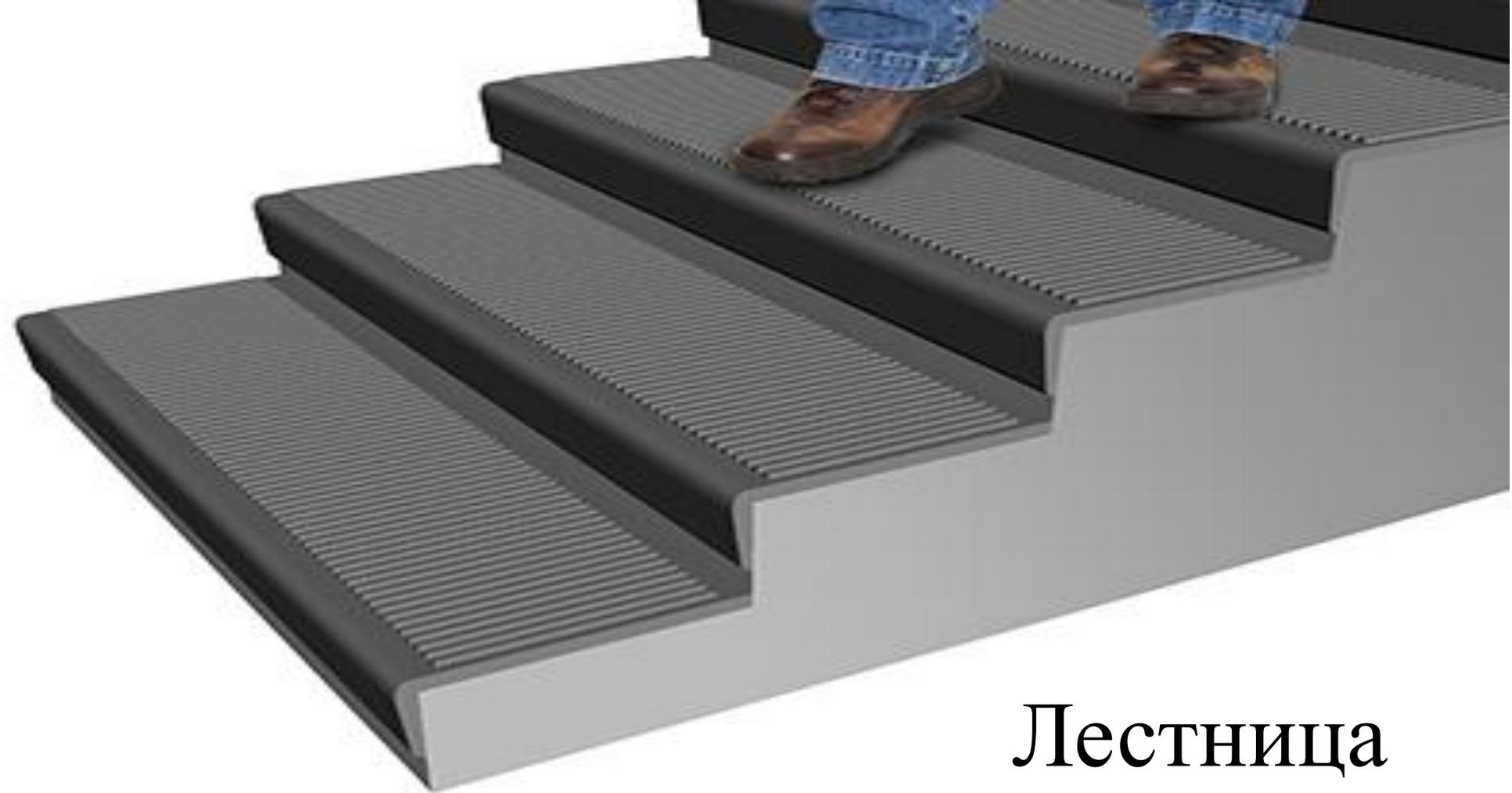
**Ответ:**  $6\sqrt{3}$  см



Построение лодки



Построение моста



Лестница

## Упражнения

### А

**2.61.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . 1) Покажите все пары взаимно перпендикулярных граней. 2) Найдите угол между прямой  $AB$  и плоскостью  $ACC_1 A_1$ . 3) Найдите угол между плоскостями  $ACC_1 A_1$  и

$ABB_1 A_1$ . 4) Покажите, что плоскости  $ACC_1 A_1$  и  $BDD_1 B_1$  взаимно перпендикулярны.

**2.62.** Величина линейного угла двугранного угла равна: 1)  $30^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $60^\circ$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до второй грани, если расстояние от точки  $A$ , расположенной в одной грани, до ребра двугранного угла 10 см.

**2.66.** Наклонная  $AB$  образует с плоскостью угол  $\varphi$ , отрезок  $AC$  – проекция этой наклонной к данной плоскости. Найдите:

а) длину проекции, если: 1)  $AB = 48$  см,  $\varphi = 60^\circ$ ; 2)  $AB = 4\sqrt{2}$  см,  $\varphi = 45^\circ$ ;

б) длину наклонной, если: 1)  $AC = 4\sqrt{3}$  см,  $\varphi = 30^\circ$ ; 2)  $AC = 5$  дм,  $\varphi = 60^\circ$ ;

в) угол  $\varphi$ , если: 1)  $AB = 24$  см,  $AC = 12$  см; 2)  $AB = 8$  м,  $AC = 4\sqrt{2}$  м.