Теоретическая механика

Часть 1
Кинематика

Глава 3. Движение твердой среды

§ 1. Неизменяемая система, твердое тело, твердая среда

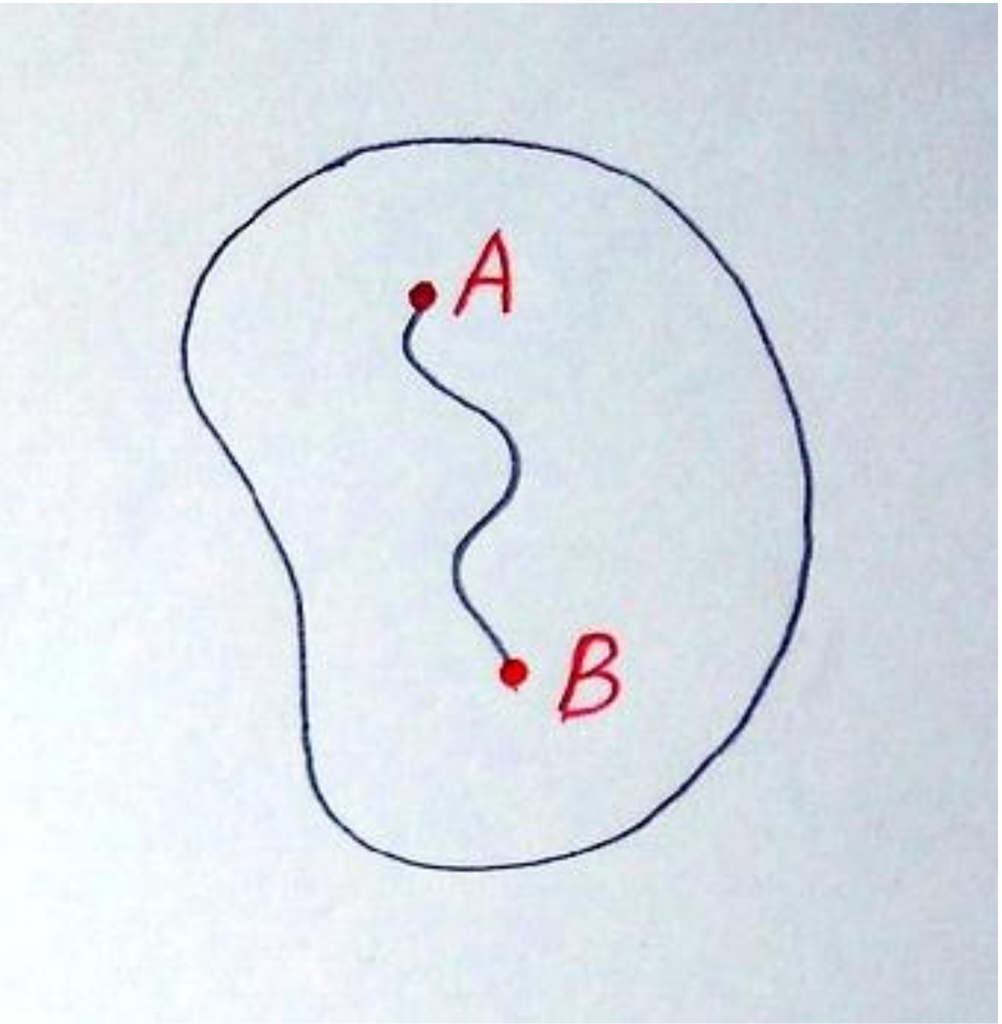
Рассмотрим некоторое множество $\{A_\alpha\}$ отмеченных точек, которое будем называть «системой».

Определение 1. Система $\{A_\alpha\}$ отмеченных точек называется ***неизменяемой***, если расстояния между точками этой системы не меняются со временем.

Примеры : ДСО $S=(O,E_1,E_2,E_3)$; какая-либо система точек $\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, координаты которых не изменяются со временем.

Определение 2. ***Твердым телом*** называется ограниченная неизменяемая система отмеченных точек.

Замечание. Иногда в определение твердого тела добавляют условие ***линейной связности*** : для любой пары точек из твердого тела существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и полностью лежащая в теле. В этом случае твердое тело рассматривается как континуальное множество, как «сплошная среда».


A
B

Примеры. Конечная система точек $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, координаты которых не изменяются со временем, – пример «дискретного» твердого тела (не выполняется условие линейной связности).

Шар радиуса R с центром в начале координат – пример «сплошного» твердого тела (выполняется условие линейной связности).

Определение 3. ***Твердой средой*** называется неизменяемая система отмеченных точек, которая в каждый момент времени заполняет собой все пространство E^3.

Пример. Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и «подвижную» $S'=(O',E_1',E_2',E_3')$. Пусть Σ – множество отмеченных точек, неподвижных относительно S':

$$M\in\Sigma \Leftrightarrow r'_{O'M}=const,$$

где $r'_{O'M}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ – координатный вектор точки M в S'.

Система точек Σ является неизменяемой и в каждый момент времени заполняет собой все пространство E^3. Следовательно, Σ – твердая среда. В этом случае говорят, что *твердая среда* Σ *неподвижна относительно* *ДСО* S', а *система* S' *жестко связана со средой* Σ.

§ 2. Скорости и ускорения точек твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S=(O,E_1,E_2,E_3)$ и «подвижную» $S'=(O',E'_1,E'_2,E'_3)$. Пусть твердая среда Σ неподвижна относительно ДСО S'.

Рассмотрим также матрицу $D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ – матрицу перехода от S к S'.

Если $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ – координатное представление вектора $\vec{q}$ в S, а $q' = \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{pmatrix}$ – координатное представление вектора $\vec{q}$ в S', то $q = Dq'$.

Для любой точки $M \in \Sigma$ имеем :

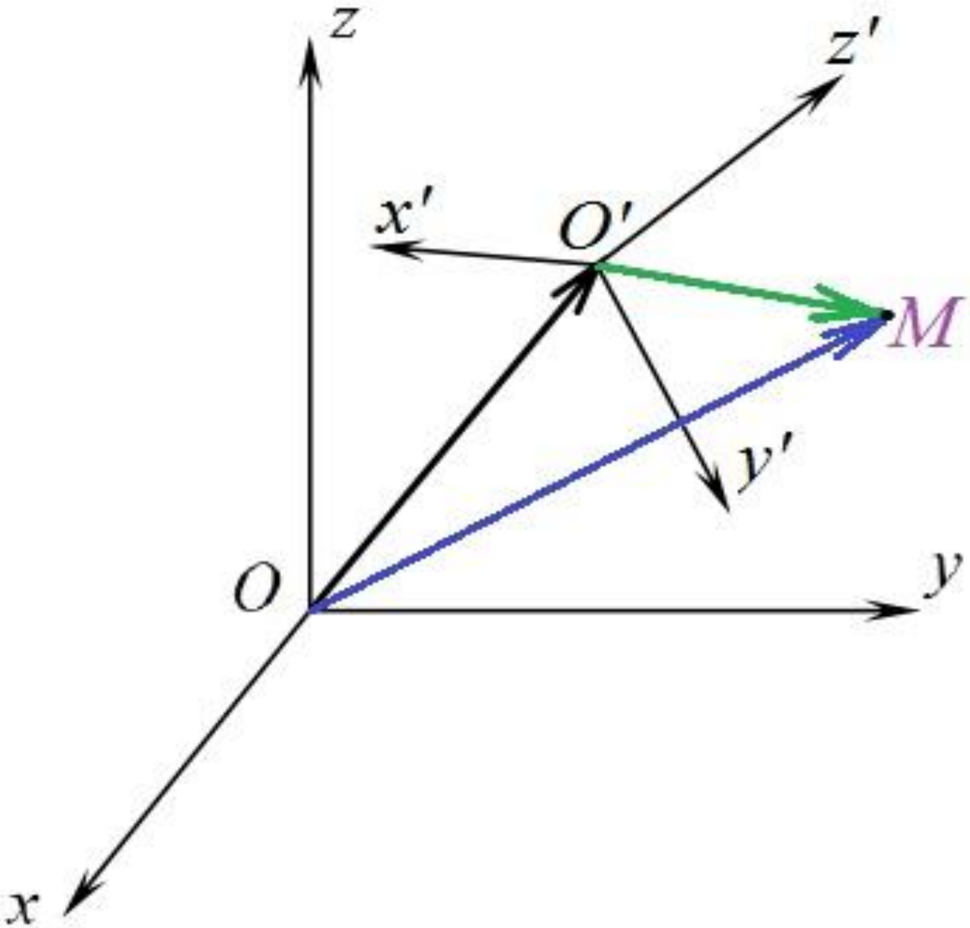
r_{OM} – координатный вектор точки M в S,

$r'_{O'M}$ – координатный вектор точки M в S',

$r_{OM} = r_{OO'} + r_{O'M} = r_{OO'} + D\,r'_{O'M}$, $r'_{O'M} = const$.

Тогда $v_M = \dot{r}_{OO'} + \dot{D}\,r'_{O'M}$ – скорость точки M в S,

$w_M = \ddot{r}_{OO'} + \ddot{D}\,r'_{O'M}$ – ускорение точки M в S.


z
z′
x′
O′
M
y′
O
y
x

Рассмотрим две точки $M, N \in \Sigma$. Арифметический вектор $r_{MN} = r_{ON} - r_{OM}$ представляет собой координатное представление геометрического вектора $\overrightarrow{MN}$ в системе S, а арифметический вектор $r'_{MN} = r'_{O'N} - r'_{O'M}$ – координатное представление вектора $\overrightarrow{MN}$ в системе S'.

Заметим, что $D r'_{MN} = r_{MN} \Rightarrow r'_{MN} = D^{-1} r_{MN} = D^T r_{MN}$.

В силу неподвижности точек $M, N \in \Sigma$ относительно S',

$$r'_{O'N} = const,\ r'_{O'M} = const \Rightarrow r'_{MN} = const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D^T r_{MN} = r'_{MN} = const.$$

Скоростью направленного отрезка $\overline{MN}$ (в системе S) называется арифметический вектор

$$v_{MN} = \dot{r}_{MN} = \dot{r}_{ON} - \dot{r}_{OM} = v_N - v_M .$$

При этом (в силу того, что $D^T r_{MN} = const$)

$$\dot{r}_{MN} = \frac{d}{dt}((DD^T)r_{MN}) = \frac{d}{dt}(D(D^T r_{MN})) = \dot{D}(D^T r_{MN}). \quad (2.1)$$

Ускорением направленного отрезка $\overline{MN}$ (в системе S) называется арифметический вектор

$$w_{MN} = \ddot{r}_{MN} = \ddot{r}_{ON} - \ddot{r}_{OM} = w_N - w_M .$$

§ 3. Векторное произведение двух векторов

1. Векторное произведение двух геометрических векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два неколлинеарных вектора. ***Векторным произведением*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ (обозначение: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$), удовлетворяющий следующим трем условиям:

1) $|\vec{c}\,|=|\vec{a}\,||\vec{b}\,|\sin(\vec{a},\vec{b})$, где $(\vec{a},\vec{b})$ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$,

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные векторы, то, по определению, их векторное произведение равно нулевому вектору.

Рассмотрим координатные представления векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в ДСО S: $r_a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $r_b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Тогда верна следующая формула (из курса Аналитической геометрии) :

$$r_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ где } i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Векторное произведение двух арифметических векторов. Рассмотрим два арифметических вектора $p=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ и $q=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. Их векторное произведение h определяется следующим равенством :

$$h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}:=\begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix},\ \text{где}\quad i=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ j=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ k=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначение: $h=p\times q$.

Нетрудно убедиться, что из равенства $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ следует аналогичное равенство для координатных представлений этих векторов:

$$r_c = r_a \times r_b .$$

§ 3. Поступательное движение твердой среды

Рассмотрим две декартовы системы отсчета: «неподвижную» $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ и «подвижную» $S' = (O', E_1', E_2', E_3')$. Пусть твердая среда Σ неподвижна относительно ДСО S' (система S' жестко связана со средой Σ).

И пусть D – матрица перехода от S к S'.

Определение 1. Движение твердой среды Σ относительно ДСО S называется ***поступательным***, если все точки среды Σ движутся относительно S с одинаковыми скоростями :

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[v_A(t) = v_B(t)].$$

Определение 2. Говорят, что направленный отрезок $\overline{AB} \subset \Sigma$ *перемещается параллельно самому себе* относительно ДСО S, если координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ в S не изменяются со временем (то есть координатное представление вектора $\overrightarrow{AB}$ в S $r_{AB}(t) = const$).

Лемма. Твердая среда Σ движется поступательно относительно ДСО S тогда и только тогда, когда для каждой пары точек $A, B \in \Sigma$ направленный отрезок $\overline{AB} \subset \Sigma$ перемещается параллельно самому себе.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть среда Σ движется поступательно относительно ДСО S, то есть

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[v_A(t) = v_B(t)].$$

Тогда

$$(\forall A, B \in \Sigma)(\forall t \in (\alpha, \beta))[\dot{r}_{AB} = \dot{r}_{OB} - \dot{r}_{OA} = v_B - v_A = 0],$$

следовательно, $(\forall A, B \in \Sigma)[r_{AB}(t) = const]$.

Достаточность. Доказать самостоятельно.

Теорема (критерий поступательного движения). Твердая среда Σ движется поступательно относительно ДСО S тогда и только тогда, когда в среде Σ существуют два неколлинеарных отрезка, перемещающихся относительно S параллельно самим себе.

Доказательство. *Необходимость* очевидна.

Достаточность. Пусть неколлинеарные отрезки $\overline{AB} \subset \Sigma$ и $\overline{MN} \subset \Sigma$ перемещаются параллельно самим себе, то есть их координатные представления в S постоянны:

$$r_{AB}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = const, \quad r_{MN}(t) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = const.$$

Рассмотрим геометрический вектор $\vec{q} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{MN}$. Тогда его координатное представление в системе S

$$q = r_{AB} \times r_{MN} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = const.$$

В силу того, точки $A, B, M, N \in \Sigma$ неподвижны относительно S', координатные представления отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{MN}$ в S' также постоянны: $r'_{AB} = const$, $r'_{MN} = const$. Поэтому координатное представление q' вектора $\vec{q} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{MN}$ в системе S' тоже постоянно:

$$q' = r'_{AB} \times r'_{MN} = const.$$

Векторы r_{AB}, r_{MN}, q линейно независимы (доказать!), следовательно, r_{AB}, r_{MN}, q – базис в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Покажем, что каждый направленный отрезок $\overline{EF} \subset \Sigma$ перемещается параллельно самому себе. Возьмем две произвольные точки $E, F \in \Sigma$ и разложим вектор r_{EF} по базису r_{AB}, r_{MN}, q:

$$r_{EF} = \alpha \cdot r_{AB} + \beta \cdot r_{MN} + \gamma \cdot q.$$

Заметим, что вектор $D^T r_{EF} = const$ (так как $D^T r_{EF} = r'_{EF}$ – координатное представление вектора $\overrightarrow{EF}$ в ДСО S', а точки $E, F \in \Sigma$ неподвижны относительно S'), а также $D^T r_{AB} = r'_{AB} = const$, $D^T r_{MN} = r'_{MN} = const$, $D^T q = q' = const$, поэтому

$$\dot{r}_{EF} = \frac{d}{dt}((DD^T)r_{EF}) = \frac{d}{dt}(D(D^T r_{EF})) = \dot{D}(D^T r_{EF}) = \dot{D}D^T r_{EF},$$

$$\dot{r}_{AB} = \dot{D}D^T r_{AB}, \quad \dot{r}_{MN} = \dot{D}D^T r_{MN}, \quad \dot{q} = \dot{D}D^T q.$$

Тогда

$$\dot{r}_{EF} = \dot{D}D^T r_{EF} = \dot{D}D^T(\alpha \cdot r_{AB} + \beta \cdot r_{MN} + \gamma \cdot q) =$$

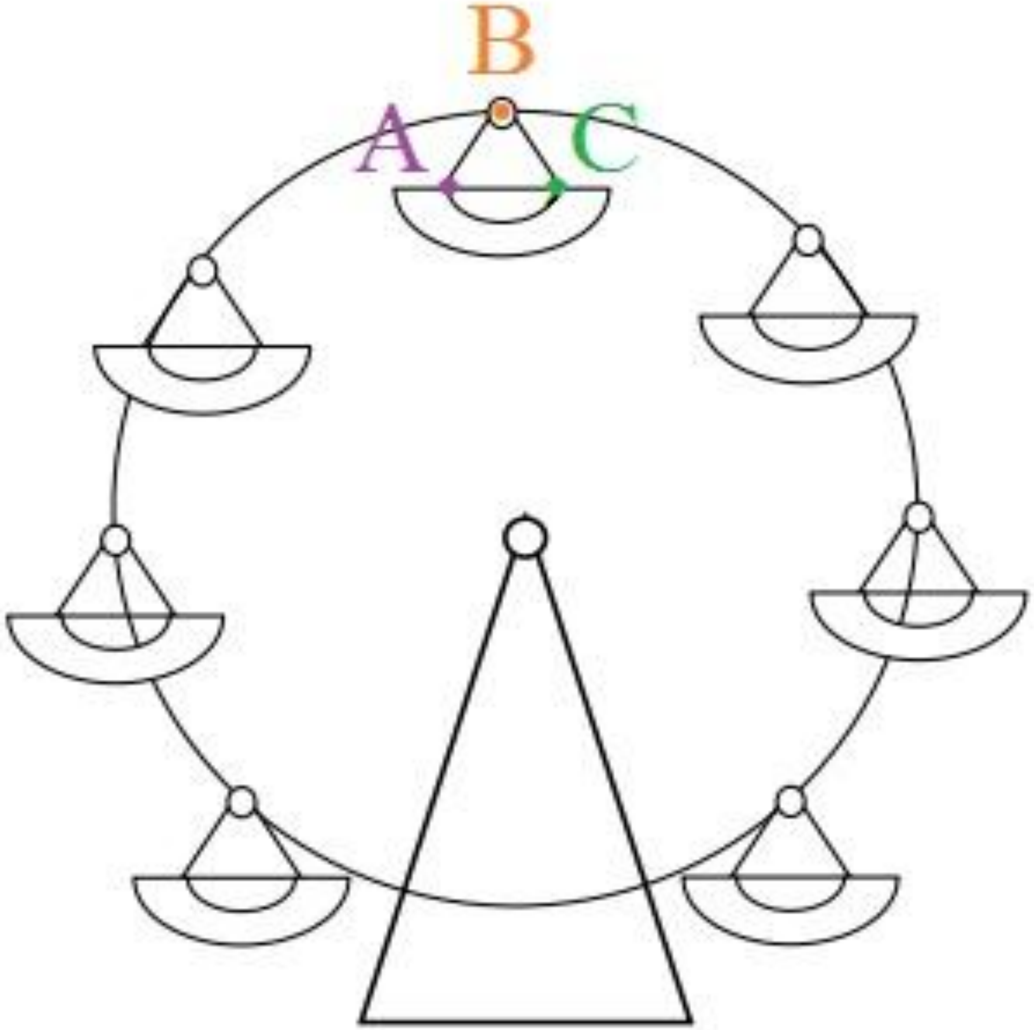
$$= \alpha \cdot (\dot{D}D^T r_{AB}) + \beta \cdot (\dot{D}D^T r_{MN}) + \gamma \cdot (\dot{D}D^T q) =$$

$$= \alpha \cdot \dot{r}_{AB} + \beta \cdot \dot{r}_{MN} + \gamma \cdot \dot{q} = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0\,.$$

Следовательно, $r_{EF} = const$. В силу произвольности выбора точек $E, F \in \Sigma$ это означает, что каждый отрезок среды перемещается параллельно самому себе, то есть среда Σ движется поступательно. Теорема доказана.

Задача. Докажите, что твердая среда Σ движется поступательно относительно ДСО S тогда и только тогда, когда матрица перехода от S к S' постоянна (не зависит от времени).

В качестве **примера** можно привести движение твердой среды Σ, связанной с любой кабиной «колеса обзора». Очевидно, неколлинеарные отрезки $AB \subset \Sigma$ и $BC \subset \Sigma$ перемещаются параллельно самим себе.


B
A
C