Теорема о сложности сортировки

Изученные ранее методы сортировки имели порядок сложности:

$$O(n^2) \rightarrow O(n^{1,2}) \rightarrow O(n \log_2 n)$$

Вопрос:

До какого предела

можно снижать

трудоемкость сортировки?

Теорема о сложности сортировки

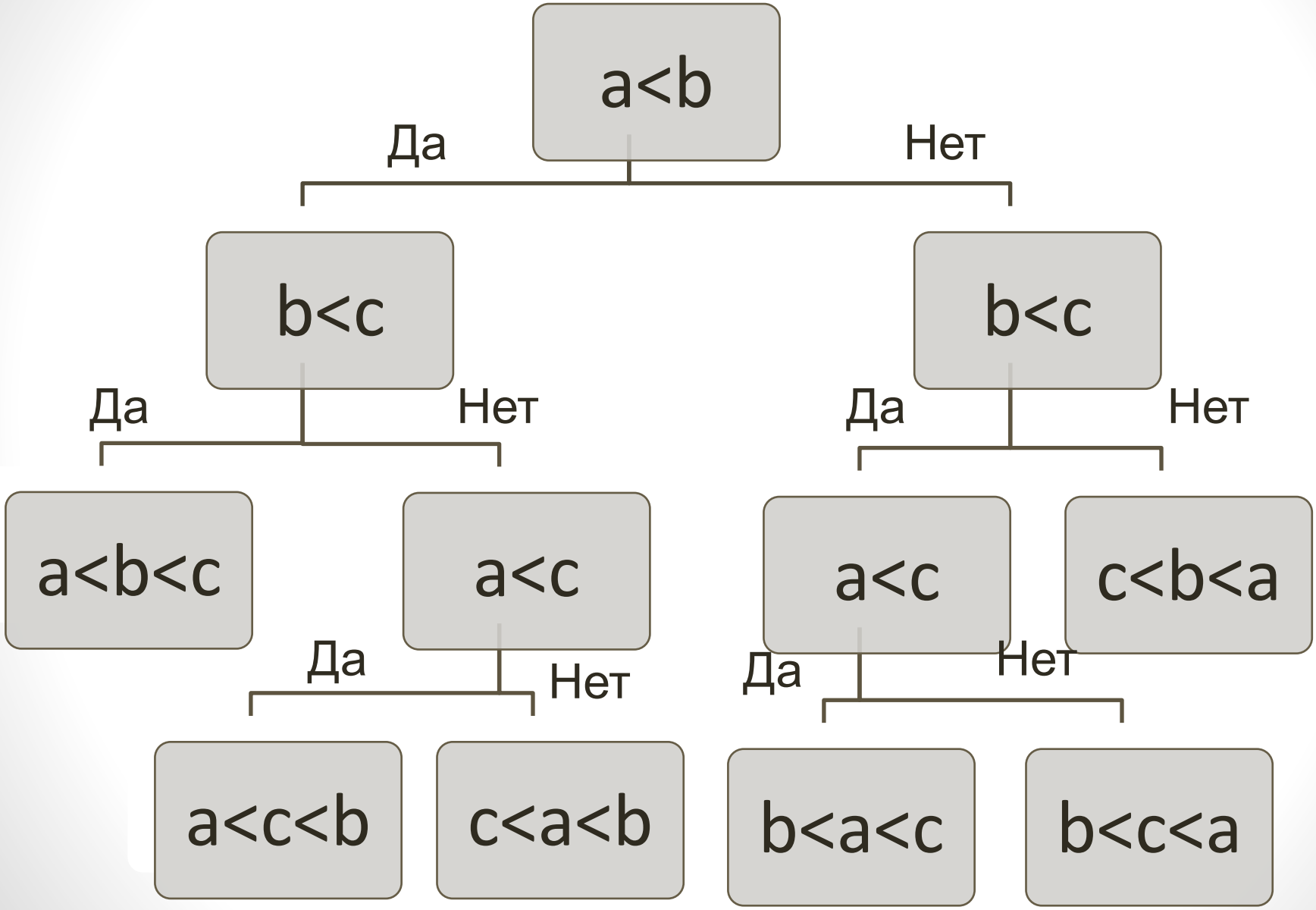
Теорема.

Если все перестановки из **n** элементов равновероятны, то любое **дерево решений**, сортирующее последовательность из **n** элементов, имеет **среднюю высоту** не менее

$$log_2(n!)\,.$$

Приведем нестрогое доказательство.

Рассмотрим дерево решений для сортировки **трех** элементов **a, b, c**.


a<b
Да
Нет
b<c
b<c
Да
Нет
Да
Нет
a<b<c
a<c
a<c
c<b<a
Да
Нет
Да
Нет
a<c<b
c<a<b
b<a<c
b<c<a

Теорема о сложности сортировки

Листья дерева - это все возможные перестановки элементов a, b, c.

Для того, чтобы узнать, какая перестановка нужна для упорядочения элементов ***a, b, c***, достаточно сделать в некоторых случаях **2** сравнения, в других - **3** сравнения:

$$C_{ср} = \frac{2+3+3+3+3+2}{6} = \frac{\text{длина внешнего пути дерева}}{2*3 = n!}$$

Теорема о сложности сортировки

- $$C_{ср} = \frac{2+3+3+3+3+2}{6} = \frac{\text{длина внешнего пути дерева}}{2*3 = n!}$$

Из теории графов известно, что

длина внешнего пути двоичного дерева с **m** листьями

$$D(m) \geq m \log_2 m \ .$$

В нашем дереве $n!$ листьев, поэтому

$$C_{ср} \geq \frac{n! \log_2 n!}{n!}$$

$$C_{ср} \geq \log_2 n!$$

Используем **нижнюю оценку** для $\log_2 n!$:

$$log_2 n! > n\, log_2 n - n\, log_2 e$$

$$C_{ср} \geq n\, log_2 n - n\, log_2 e$$

Получаем **следствие из теоремы**:

Не существует алгоритма сортировки *n* элементов, использующего в среднем менее $n \log_2 n - n \log_2 e$ операций сравнения.

Класс сложности порядка $n \log_2 n$ является предельно достижимым для алгоритмов, основанных на операциях сравнения.

Для пересылок:

если мы определили требуемую перестановку

и имеем память для второй копии массива,

то достаточно сделать ***n*** пересылок.

На сегодняшний день

алгоритм, имеющий

n log $_2$ ***n*** сравнений и ***n*** пересылок,

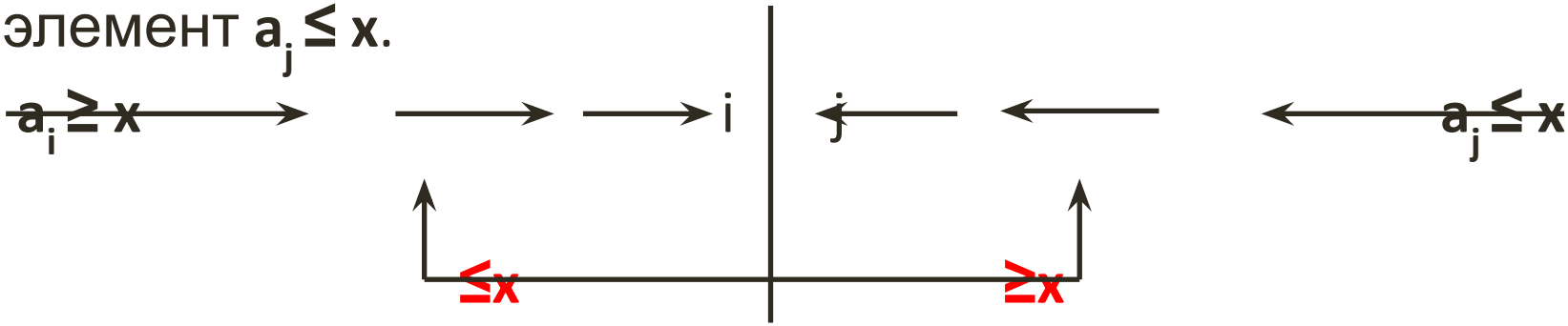
неизвестен.

Рассмотрим метод сортировки,

самый быстрый из известных.

Метод Хоара (Hoare, 1962)
QuickSort

Возьмем **произвольный элемент массива**, обозначим его через **X**. Просматривая массив слева, найдем элемент $a_i \geq x$. Просматривая массив справа, найдем элемент $a_j \leq x$.



Поменяем местами a_i и a_j. Будем **продолжать процесс просмотра и обмена**, пока **i** не станет больше **j**.

В результате массив окажется разделенным на две части: левую с элементами ≤x, и правую с элементами ≥x.

Метод Хоара (QuickSort)

Алгоритм на псевдокоде

L, R – левая и правая границы рабочей части массива

QuickSort *(L, R)*

x := a_L, i := L, j := R

DO (i≤j)

DO (a_i < x) i := i+1 OD

DO (a_j > x) j := j-1 OD

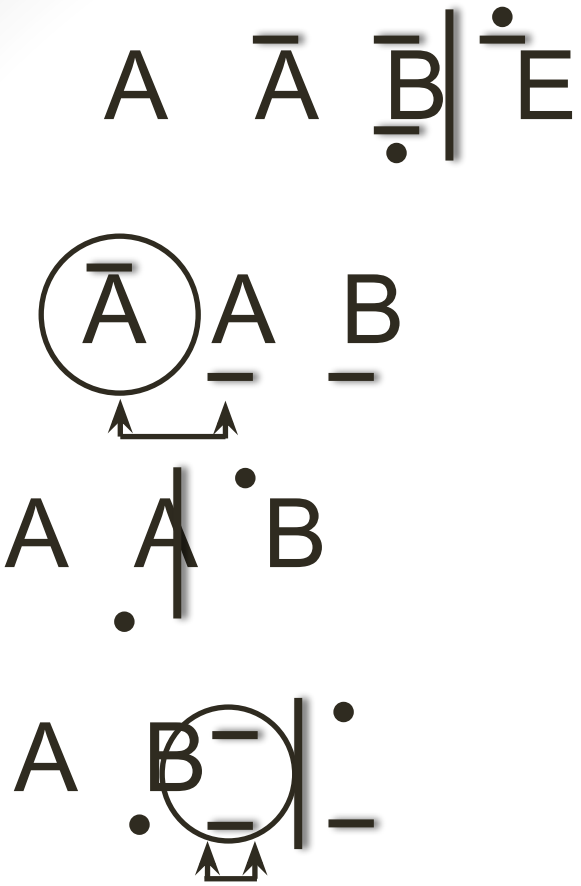
IF (i<=j) $a_i \leftrightarrow a_j$, i := i+1, j := j -1 FI

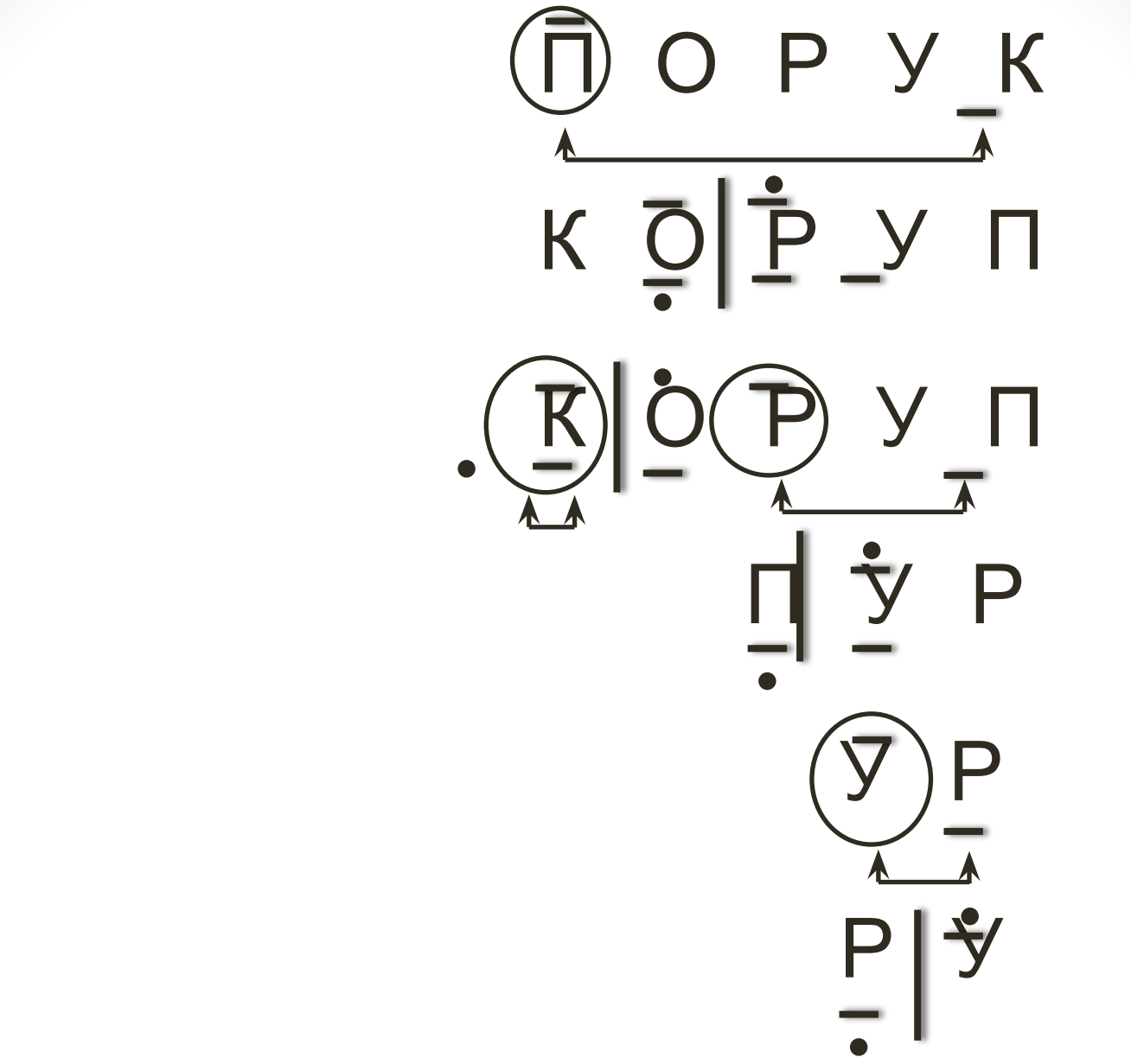
OD

IF (L<j) QuickSort (L, j) FI

IF (i<R) QuickSort (i, R) FI


К У Р А П О В А Е
Е У Р А П О В А К
Е А Р А П О В У К
Е А В А П О Р У К
Е А В А


A A B E
A A B
A A B
A B



А А В Е К О П Р У

Трудоемкость **алгоритма QuickSort** существенно зависит от того, как соотносится выбираемый элемент X с остальными элементами в массиве.

Рассмотрим два крайних случая:

1) X = **min**(**max**) (a_L ,…, a_R)

В этом случае после разделения в одной части массива будет оставаться только один элемент, а в другой части - все остальные.

$$C_1 = (n+2)+(n+1)+\ldots+2 = \frac{n^2+5n+4}{2}$$

$$M_1 = 3(n-1)$$

Трудоемкость в этом случае сравнима с методом прямого выбора: $O(n^2)$, $n \to \infty$

2) X = **med** (a_L ,…, a_R) – медиана

Определение.

Элемент a_m называется медианой для элементов a_L ,…, a_R , если **количество** элементов **меньших** a_m равно количеству элементов **больших** a_m
(с точностью до одного элемента).

В примере буква К – медиана для КУРАПОВАЕ.

В этом случае массив разделяется на две равные части.

Определим **наименьшее возможное количество сравнений**.
Возьмем для примера **n = 15** (степень двойки), затем массив делится на **7 и 7**, затем на **3,3,3,3**.

Пример. 

Размер части массива		Количество сравнений в части массива		Количество частей	Количество сравнений
15		16		1	
7		8		2	
3		4		4	

n =$15 = 2^4$-1

n = 2^k-1 => k = $\log_2(n+1)$

Из таблицы k = 4, 3 = к-1 - количество итераций.

C = (k-1)2^k = (log(n+1) - 1) 2^k = **(n+1) log(n+1) - (n+1)**

– близкое к минимально возможному значению.

Итак, количество сравнений **C = n log n**

Количество пересылок

зависит от расположения элементов,

но **не может быть** больше **одного обмена** (3 пересылки) **на два сравнения**.

Поэтому количество пересылок –

величина того же порядка, что и количество сравнений:

M = n log n.

Средняя трудоемкость QiuckSort: O (n log n), n □ ∞

Проблема глубины рекурсии

В теле подпрограммы доступны все объекты, описанные в основной программе, в том числе и имя самой подпрограммы. Это позволяет внутри тела подпрограммы осуществлять вызов самой подпрограммы.

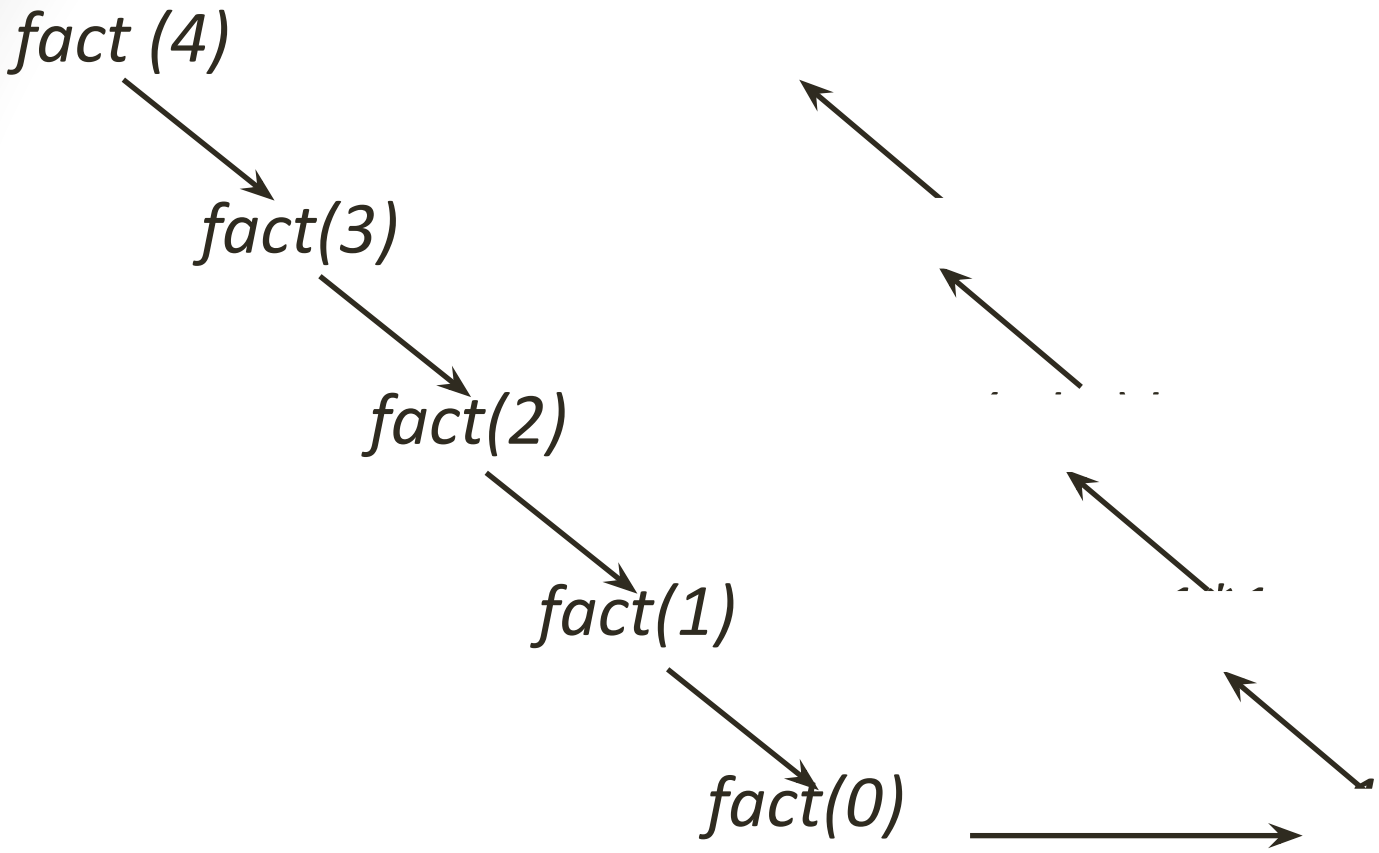
Определение. Процедуры и функции, организующие вызовы «самих себя» называются *рекурсивными.*

Многие математические алгоритмы используют рекурсию, поэтому рекурсия широко используется в программировании.

Пример: Известный **алгоритм вычисления факториала** неотрицательного целого числа: 0! = 1, 1! = 1, n! = (n-1)! n.

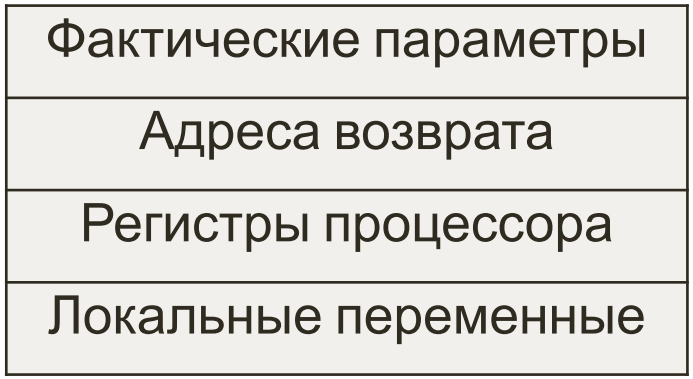
```
long fact (int n) {
        if (n<0) return 0;
        if (n==0) return 1;
```

Вычисление 4!



Рекурсивное выполнение программы более компактно и наглядно, но существует опасность переполнения стека.

Фрейм:



При выходе из подпрограммы эта память (фрейм) освобождается.

Но если подпрограмма вызывает другую подпрограмму или саму себя,

то в дополнение к существующему фрейму

создается новый.

n вложенных вызовов ->

выделение n фреймов в памяти

Quick Sort(L,R) (Первая версия)

<Разделение на две части>

IF (L<j) QuickSort (L,j) FI

IF (i<R) QuickSort (i,R) FI

Рассмотренный алгоритм может потребовать **в худшем случае n вложенных вызовов** (n - размер массива), т.е. **глубина рекурсии может достигать n**.

Это большой **недостаток алгоритма**.

Покажем, как можно **уменьшить глубину рекурсии до** $log_2 n$.

Вместо **двух** рекурсивных вызовов

(для левой и правой части массива)

будем использовать только **один рекурсивный вызов**,

а другой заменим **новой итерацией цикла**.

Вопрос:

Для **какой** части массива нужно делать рекурсивный вызов,

чтобы уменьшить глубину рекурсии?

Ответ:

Для меньшей по размеру части массива.

Алгоритм на псевдокоде

QuickSort(L,R) (вторая версия)

```
DO ( L<R )
        <Разделение на две части>
        IF ( j-L < R-i ) QuickSort( L, j ),  L := i
            ELSE         QuickSort( i, R ),  R := j
        FI
OD
```

В этом случае худший вариант,

когда обе части массива равны,

тогда **глубина рекурсии** $log_2 n$.

Пример:

для массива из **1 млн**. элементов (n = 1000000)

понадобится одновременно менее **20** фреймов в памяти.

Примеры рекурсии

1. Преподаватель всегда прав.
2. Если преподаватель не прав, смотри **пункт 1**.

Бюрократия разрастается, чтобы удовлетворить нужды **разрастающейся бюрократии**.

Смысл жизни – в достижении её **цели**, **цель жизни** – в наполнении ее **смыслом**.

Если у вас украли кредитную карту, позвоните по телефону указанному на оборотной стороне кредитной карты.

Для выхода **в Интернет**, скачайте нашу программу **из Интернета**.

Keyboard not found. Press F1 to continue.

Салат : помидоры, огурцы, **салат**.

Метод	Трудоемкость	Устойчивость	Зависимость от упорядоченности
ShellSort	$O(n^{1,2})$	Не устойчив	Зависит
HeapSort	$O(n \log_2 n)$	Не устойчив	Практически не зависит
QuickSort	$O(n \log_2 n)$	Не устойчив	Зависит