Математика

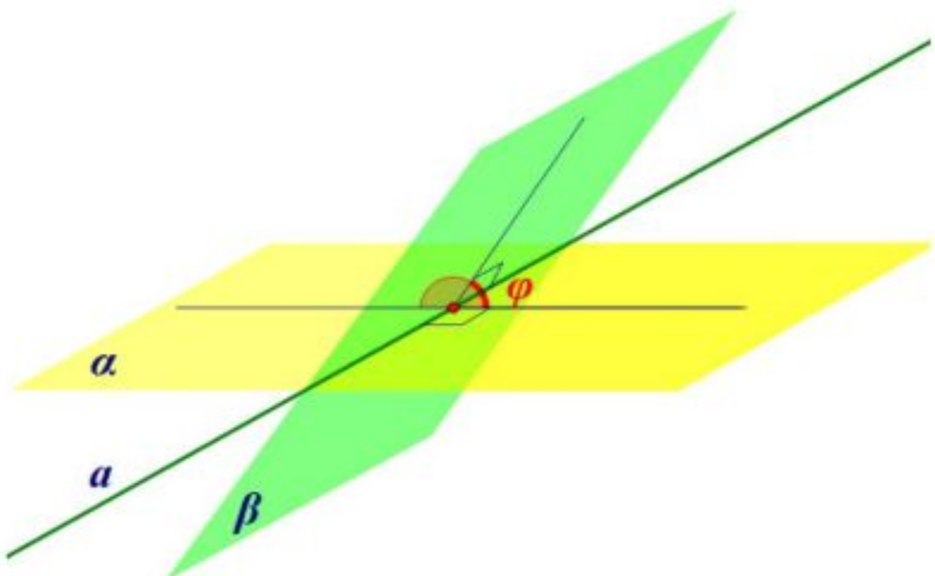
Угол между плоскостями

- Домашнее задание.
- 1) Изучить тему: угол между плоскостями, изучить решение задач
- 2) составить конспект и отправить на проверку

Две пересекающиеся плоскости образуют две пары равных между собой двугранных углов.

Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла.

Чтобы построить **линейный угол двугранного угла**, нужно взять на линии пересечения плоскостей произвольную точку, и в каждой плоскости провести к этой точке луч перпендикулярно линии пересечения плоскостей. **Угол, образованный этими лучами и есть линейный угол двугранного угла:**



Пусть наши плоскости α и β заданы уравнениями:

$$\alpha\colon\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta\colon\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Косинус угла $\cos\phi$ между плоскостями находится по такой формуле:

$$\cos\phi = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{sqrta_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2\cdot\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2}}$$

В ответе мы записываем $\left|\cos\phi\right|$, так как величиной угла между плоскостями называется величина **меньшего** двугранного угла.

Рассмотрим этот метод более подробно.

Суть метода координат на плоскости и в пространстве заключается в следующем.

1. Ввести систему координат удобным образом (исходя их свойств заданной фигуры)
2. Записать условие задачи в координатах, определив во введенной системе координат координаты точек и/или векторов
3. Используя алгебраические преобразования, решить задачу
4. Интерпретировать полученный результат в соответствии с условием данной задачи

В рассмотренном нами примере, поскольку был дан куб, мы могли ввести систему координат с центром в любой его вершине.

В координатах удобно решать задачи, связанные с поиском расстояний и углов. Но для того чтобы его использовать, нужно знать некоторые формулы:

1. Угол между прямыми
2. Угол между прямой и плоскостью
3. Угол между плоскостями
4. Расстояние от точки до плоскости
5. Расстояние от точки до прямой в пространстве
6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между параллельными плоскостями определяется как расстояние от точки, лежащ
одной плоскости, до другой плоскости.

Мы рассмотрим только первые четыре формулы.

Угол между прямыми

Если прямая задана двумя точками A и B, то известен направляющий вектор этой прямой $\overrightarrow{AB}$ с координатами { $x_1;\ y_1;\ z_1$ }. Пусть вторая прямая имеет направляющий вектор $\overrightarrow{CD} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$. Тогда угол между векторами вычисляется по формуле:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{;}\ \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DC}\right|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} \cdot \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2}}\ .$$

Дальше ищется арккосинус от найденного числа. Заметим, что если косинус получился отрицательным, то это значит, что угол между векторами тупой. Поэтому мы берем модуль получившегося числа.

Фактически мы уже рассмотрели пример вычисления угла между прямыми в пространстве.

Угол между прямой и плоскостью

Сначала рассмотрим уравнение плоскости, проходящей через три точки.

$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x_1, y_1, z_1),\ C(x_2, y_2, z_2)$.

Вам известно, что в пространстве плоскость задается уравнением, аналогичным тому, которое на плоскости задает прямую.

Если линейное уравнение вида $Ax + By + C = 0$ на плоскости задает прямую l, то уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ задает в пространстве плоскость α. При этом вектор $\vec{k} = (A, B, C)$ – это вектор, перпендикулярный плоскости α. Его называют вектор нормали, или нормальный вектор, или нормаль.

Вам известно, что три точки в пространстве определяют единственную плоскость. Поэтому, если заданы три точки, то мы можем найти уравнение плоскости

Мы можем подставить координаты заданных точек в уравнение плоскости и решить систему из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cy_0 + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cy_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cy_2 + D = 0 \end{cases}$$

В этой системе четыре неизвестных, однако, мы можем избавиться от одной, если разделим все уравнения на D:

В этой системе четыре неизвестных, однако, мы можем избавиться от одной, если разделим все уравнения на D:

$$\begin{cases} \tilde{A}x_0 + \tilde{B}y_0 + \tilde{C}y_0 + 1 = 0 \\ \tilde{A}x_1 + \tilde{B}y_1 + \tilde{C}y_1 + 1 = 0 \\ \tilde{A}x_2 + \tilde{B}y_2 + \tilde{C}y_2 + 1 = 0 \end{cases}.$$

Для изучения данного способа в 11 классе на базовом уровне введение понятий матрица, определитель матрицы не желателен, данные понятия не входят в базовый курс изучения геометрии.

Иногда эта система оказывается несложной. Но иногда бывает трудно ее решить, и тогда можно использовать следующую формулу:

Обозначение |M| означает определитель матрицы M.

В нашем случае матрица представляет собой таблицу 3x3 элемента. И определитель |M| вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Таким образом, уравнение плоскости будет записано так:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - x_0)(y_1 - y_0)(z_2 - z_0) + (z - z_0)(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) + (y - y_0)(z_1 - z_0)(x_2 - x_0) -$$

$$-(z - z_0)(y_1 - y_0)(x_2 - x_0) - (x - x_0)(z_1 - z_0)(y_2 - y_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0)(z_2 - z_0) = 0$$

Пример 1:

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки K(1; -2; 3), L (0; 1; 1), M (1; 0; 1).

Составим систему.

$$\begin{cases} A - 2B + 3C + D = 0 \\ B + C + D = 0 \\ A + C + D = 0 \end{cases}.$$

Решая ее, получим значения A, B и C: $\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = -2 \end{cases}$. То есть уравнение плоскости имеет вид:

$$x + y + z - 2 = 0 .$$

Ответ: $x + y + z - 2 = 0$.

Теперь запишем формулу угла между прямой и плоскостью.

Пусть дано уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$ и известен $\vec{p} = \{s, m, n\}$ - направляющий вектор прямой.

Тогда $\sin\varphi = \dfrac{|As + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{s^2 + m^2 + n^2}}$ – синус угла между прямой и плоскостью.

Пример 2:

Найдем угол между прямой и плоскостью. В качестве плоскости возьмем ту, уравнение которой мы только что написали:

$$x + y + z - 2 = 0$$

Прямая проходит через точки T(2; -1; 4) и P(3; 2; 2).

Направляющий вектор прямой: $\overrightarrow{TP} = \{1;\ 3; -2\}$.

Найдем синус угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{|1 + 3 - 2|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{21} .$$

Угол между прямой и плоскостью $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{42}}{21}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{42}}{21}$.

Угол между плоскостями

Пусть:

уравнение первой плоскости: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

уравнение второй плоскости: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$ - косинус угла между этими плоскостям

Пример 3:

Найдем угол между плоскостями:

$\mathbf{x - 2y + 3 = 0}$ и $\mathbf{2x + y + z - 1 = 0}$.

Найдем косинус угла между плоскостями:

$$\mathbf{\cos\varphi = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0}$$.

Угол между плоскостями: $\boldsymbol{\varphi = 90^0}$

Ответ: $\boldsymbol{\varphi = 90^0}$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть координаты точки: $M(x_0; y_0; z_0)$, уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Тогда Расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Пример 4.

Найдем расстояние от точки M(4; 3; 4) до плоскости $x - 2y + 3 = 0$.

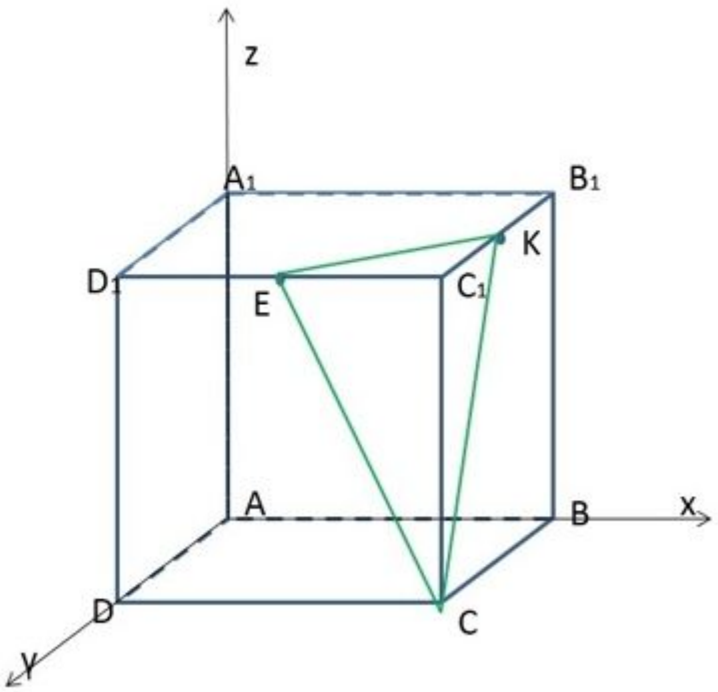
$$d = \frac{4 - 6 + 3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Теперь рассмотрим решение задачи координатным методом с использованием рассмотренных формул.

Пример 5.

АВС…D1 – куб с ребром 4. Найти расстояние от точки А до плоскости ЕКС (Е – середина D1C1, К – середина C1B1)

Введем систему координат с началом в вершине А так, как показано на рисунке:



Интересующие нас точки будут иметь координаты:

А(0; 0; 0), С(4; 4; 0), Е(4; 2; 4), К(2; 4; 4).

Напишем уравнение плоскости ЕКС:

$$\begin{cases} 4A + 2B + 4C + D = 0 \\ 2A + 4B + 4C + D = 0 \\ 4A + 4B + D = 0 \end{cases}.$$

Решая ее, получим значения A, B, C и D: $\begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = -16 \end{cases}$.

Уравнение плоскости имеет вид: $2x + 2y + z - 16 = 0$

Теперь найдем расстояние от точки А до плоскости ЕКС: $d = \frac{|16|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

Ответ: $5\frac{1}{3}$.

Рассмотрим задачу (№14 из варианта ЕГЭ).

В кубе $ABC...D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

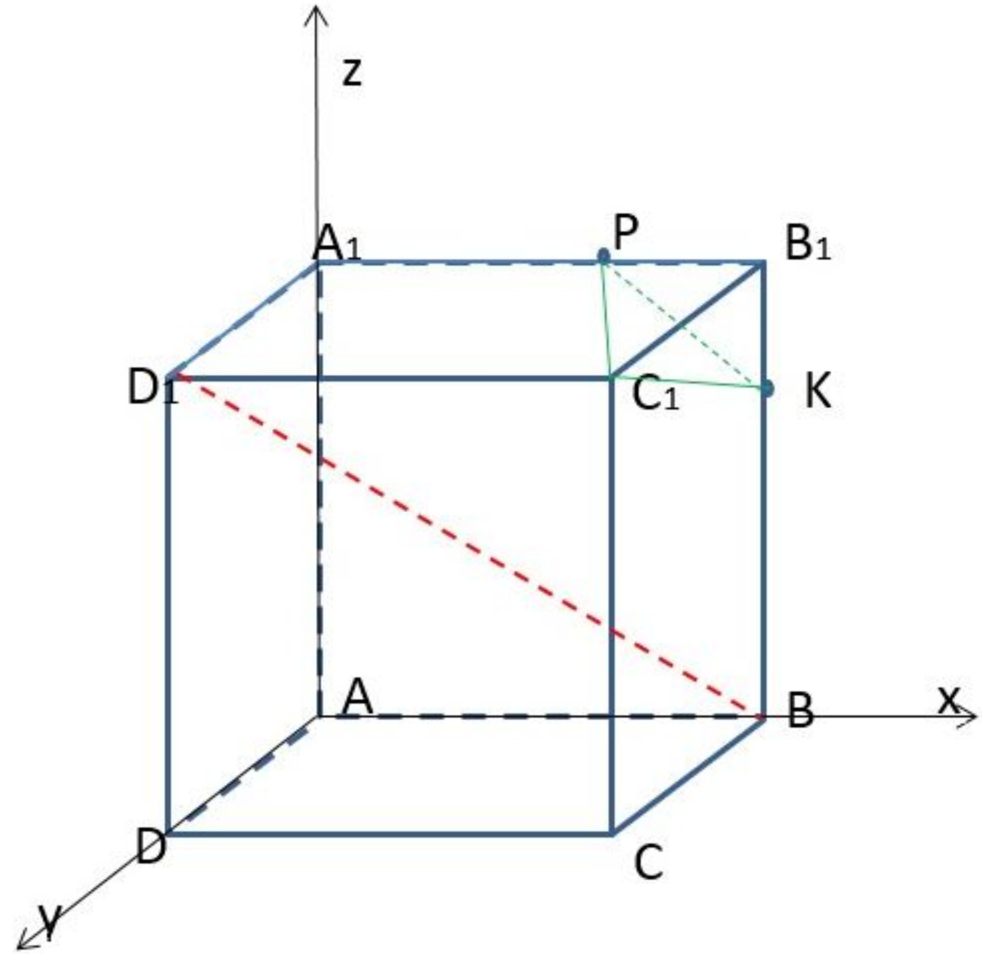
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Решение:

Переформулируем первый пункт этой задачи таким образом:

Проведем плоскость через точки P, K и C_1 и докажем, что она параллельна прямой BD_1.

Введем систему координат так, как показано на рисунке:



Найдем координаты точек $\mathbf{P}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{C_1}$:

Найдем координаты точек $\mathbf{P, K}$ и $\mathbf{C_1}$:

P($\frac{8}{3}$; 0; 4), K(4; 0; 3), C_1 (4; 4; 4).

Напишем уравнение плоскости $\mathbf{PKC_1}$:

$$\begin{cases} \frac{8}{3}A + 4C + D = 0 \\ 4A + 3C + D = 0 \\ 4A + 4B + 4C + D = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8A + 12C + 4D = 0 \\ 4A + 3C + D = 0 \\ 4A + 4B + 4C + D = 0 \end{cases}$$

Решая ее, получим значения A, B, C и D: $\begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \\ C = 4 \\ D = -24 \end{cases}$.

$\mathbf{3x - y + 4z - 24 = 0}$ - уравнение плоскости

Теперь докажем, что плоскость $\mathbf{3x - y + 4z - 24 = 0}$ параллельна прямой BD_1.

Найдем угол между прямой BD_1 и плоскостью $3x - y + 4z - 24 = 0$.

Точки B и D_1 имеют координаты: B (4; 0; 0), D_1 (0; 4; 4).

Направляющий вектор прямой BD_1 – это вектор $\overrightarrow{BD1}$.

Он имеет координаты $\overrightarrow{BD1} = \{-4; 4; 4\}$.

Теперь найдем синус угла между вектором $\overrightarrow{BD1}$ и плоскостью $3x - y + 4z - 24 = 0$.

$$\sin\varphi = \frac{|As + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{s^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{3(-4) - 1 \cdot 4 + 4 \cdot 4}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{s^2 + m^2 + n^2}} = 0.$$

В этом случае нам не нужно считать знаменатель дроби. Так как числитель получился равен 0, то дробь равна 0, то есть синус угла между плоскостью и прямой равен 0, значит, плоскости параллельны или совпадают. Но, так как точка B, например, в плоскости, очевидно, не лежит, то плоскости параллельны.

Это значит, что плоскость, параллельная прямой BD_1 и проходящая через точки K и C_1 действительно пересекает ребро A_1B_1 в точке P так, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$. Что и требовалось доказать.

Теперь рассмотри второй пункт задачи. Уравнение плоскости PKC_1 у нас есть. Плоскость BB_1 параллельна координатной плоскости YOZ и проходит через точку

$B(4; 0; 0)$. Поэтому она имеет уравнение $x - 4 = 0$.

То есть ее коэффициенты $\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = -4 \end{cases}$.

Найдем угол между плоскостями, используя формулу

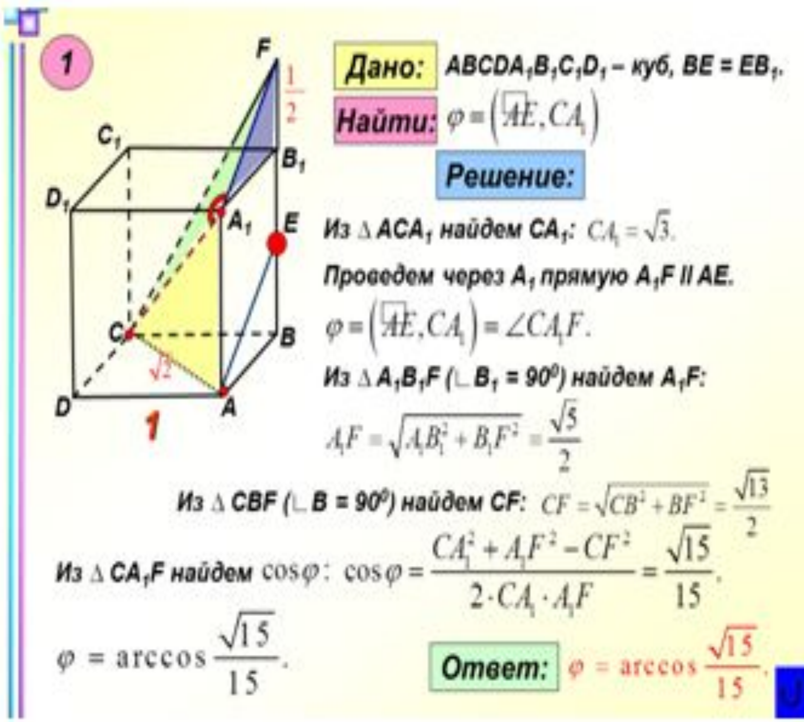
$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{1 \cdot \sqrt{9 + 1 + 16}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

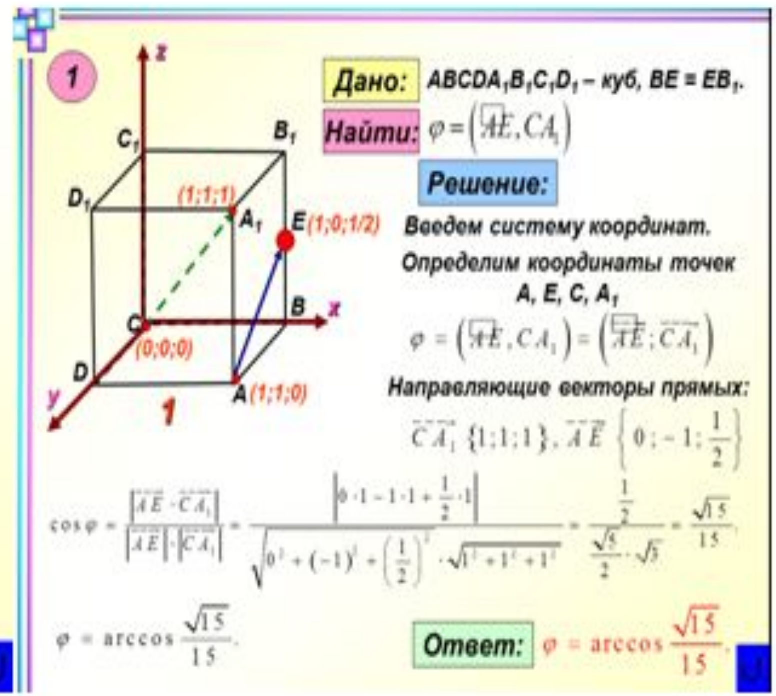
Ответ: $\varphi = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{26}}$.

Задача №1. Точка E – середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол между прямыми AE и CA_1.

Решение геометрическим методом:



Решение методом координат:




y = 1 / x
2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
sin 90°=1
y=sin 90
x=25y + 45
y= 1
x= 25 + 45
x= 70
(x+y)(x-y) = x² - y²