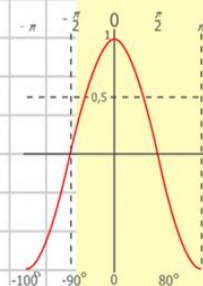
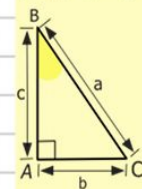
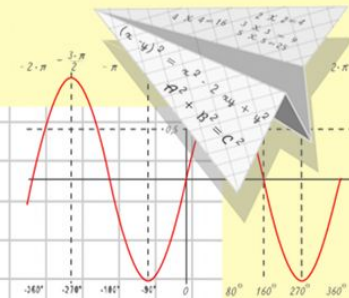
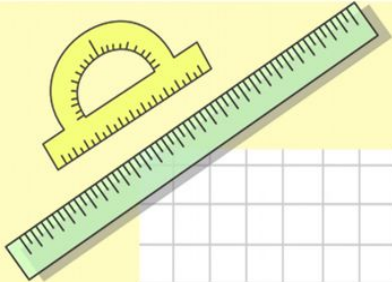


# Математик

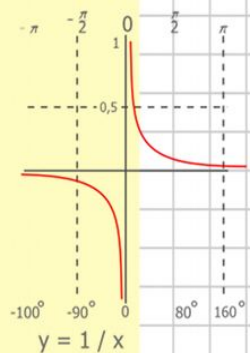
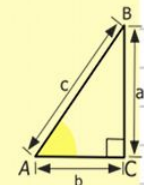
## а

# Угол между плоскостями



$y = \cos x$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

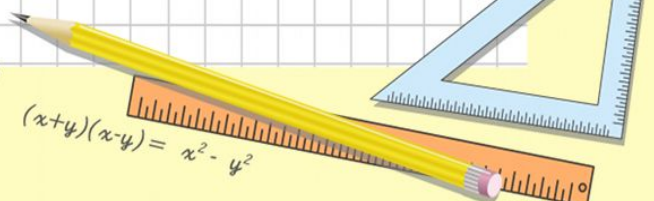


$\sin 90^\circ = 1$



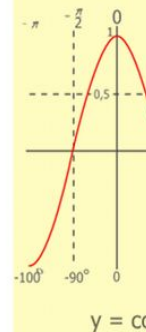
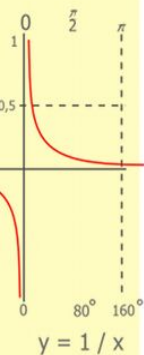
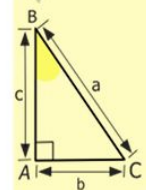
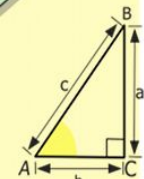
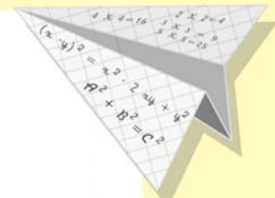
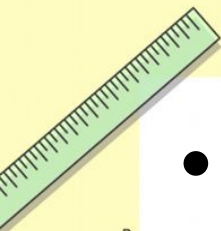
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$



$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

- Домашнее задание.
- 1) Изучить тему: угол между плоскостями, изучить решение задач
- 2) составить конспект и отправить на проверку



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

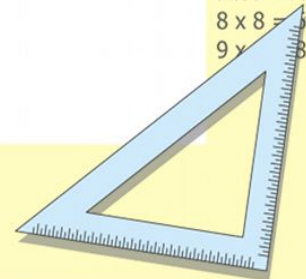
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

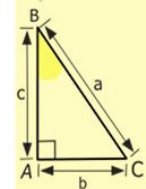
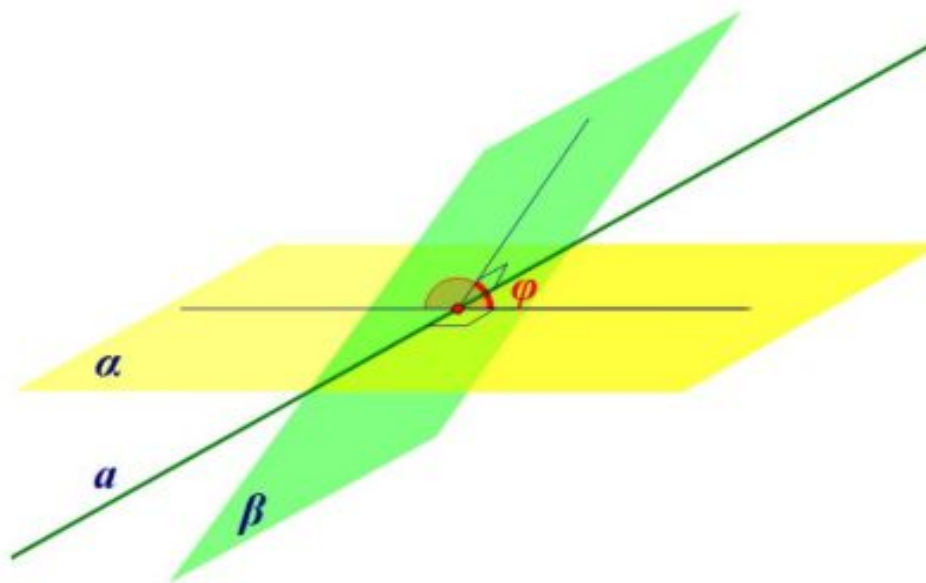
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Две пересекающиеся плоскости образуют две пары равных между собой двугранных углов.

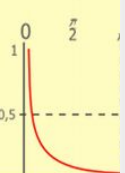
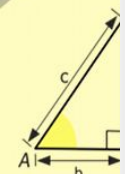
**Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла.**

Чтобы построить **линейный угол двугранного угла**, нужно взять на линии пересечения плоскостей произвольную точку, и в каждой плоскости провести к этой точке луч перпендикулярно линии пересечения плоскостей. **Угол, образованный этими лучами и есть линейный угол двугранного угла:**



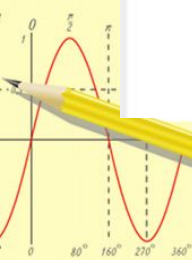
$y = \cos$

- $2 \times 2 = 4$
- $3 \times 3 = 9$
- $4 \times 4 = 16$
- $5 \times 5 = 25$
- $6 \times 6 = 36$
- $7 \times 7 = 49$
- $8 \times 8 = 64$
- $9 \times 9 = 81$



$y = 1/x$

$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

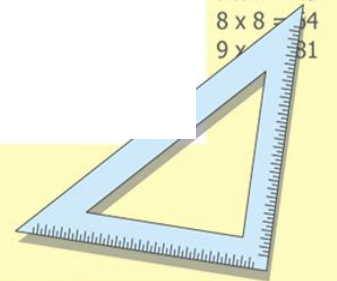
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$\sin 90^\circ = 1$



$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Пусть наши плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  заданы уравнениями:

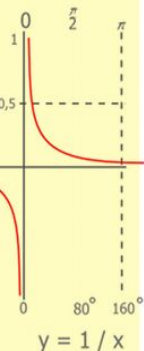
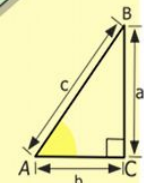
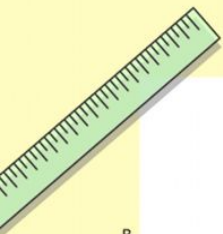
$$\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Косинус угла  $\cos \phi$  между плоскостями находится по такой формуле:

$$\cos \phi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

В ответе мы записываем  $|\cos \phi|$ , так как величиной угла между плоскостями называется величина **меньшего** двугранного угла.



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

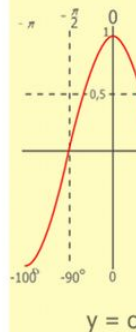
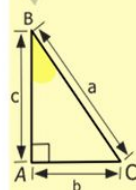
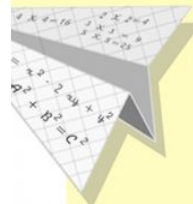


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

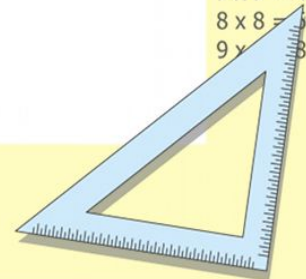
$$x = 70$$

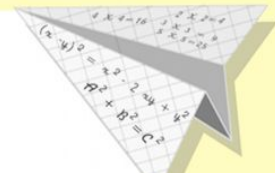
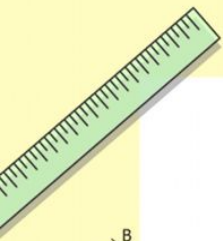
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y = \cos$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81





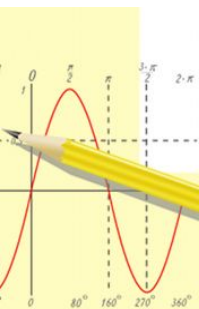
Рассмотрим этот метод более подробно.

Суть метода координат на плоскости и в пространстве заключается в следующем.

1. Ввести систему координат удобным образом (исходя их свойств заданной фигуры)
2. Записать условие задачи в координатах, определив во введенной системе координат координаты точек и/или векторов
3. Используя алгебраические преобразования, решить задачу
4. Интерпретировать полученный результат в соответствии с условием данной задачи

В рассмотренном нами примере, поскольку был дан куб, мы могли ввести систему координат с центром в любой его вершине.

В координатах удобно решать задачи, связанные с поиском расстояний и углов. Но для того чтобы его использовать, нужно знать некоторые формулы:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



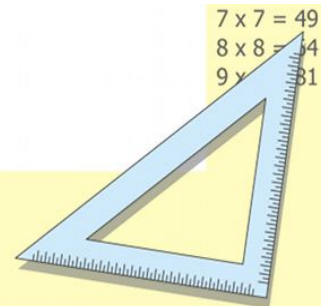
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

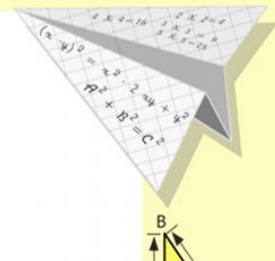
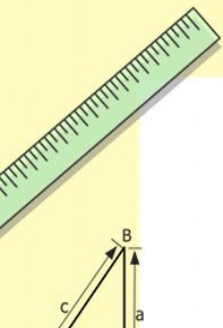
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$\underline{x = 70}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\begin{array}{l} 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$

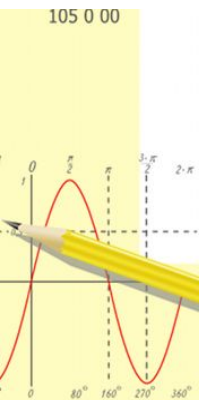




1. Угол между прямыми
2. Угол между прямой и плоскостью
3. Угол между плоскостями
4. Расстояние от точки до плоскости
5. Расстояние от точки до прямой в пространстве
6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между параллельными плоскостями определяется как расстояние от точки, лежащей на одной плоскости, до другой плоскости.

Мы рассмотрим только первые четыре формулы.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

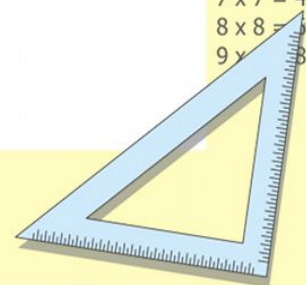


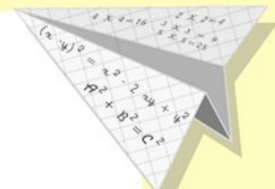
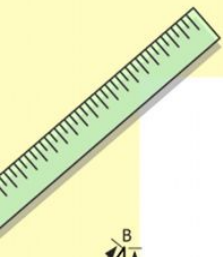
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\begin{aligned} 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \\ 9 \times 9 &= 81 \end{aligned}$$





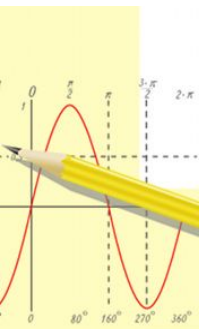
## Угол между прямыми

Если прямая задана двумя точками А и В, то известен направляющий вектор этой прямой  $\overrightarrow{AB}$  с координатами  $\{x_1; y_1; z_1\}$ . Пусть вторая прямая имеет направляющий вектор  $\overrightarrow{CD} = \{x_2; y_2; z_2\}$ . Тогда угол между векторами вычисляется по формуле:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Дальше ищется арккосинус от найденного числа. Заметим, что если косинус получился отрицательным, то это значит, что угол между векторами тупой. Поэтому мы берем модуль получившегося числа.

Фактически мы уже рассмотрели пример вычисления угла между прямыми в пространстве.



$$\frac{a}{c} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



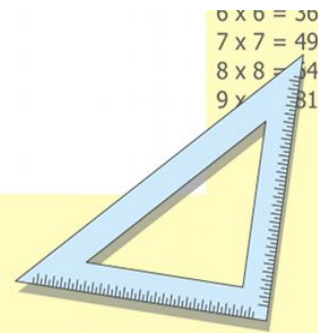
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

0 x 0 =	30
7 x 7 =	49
8 x 8 =	64
9 x 9 =	81



## Угол между прямой и плоскостью

Сначала рассмотрим уравнение плоскости, проходящей через три точки.

$$A(x_0, y_0, z_0), B(x_1, y_1, z_1), C(x_2, y_2, z_2) \quad .$$

Вам известно, что в пространстве плоскость задается уравнением, аналогичным тому, которое на плоскости задает прямую.

Если линейное уравнение вида  $Ax + By + C = 0$  на плоскости задает прямую  $l$ , то уравнение вида  $Ax + By + Cz + D = 0$  задает в пространстве плоскость  $\alpha$ . При этом вектор  $\vec{k} = (A, B, C)$  – это вектор, перпендикулярный плоскости  $\alpha$ . Его называют вектор нормали, или нормальный вектор, или нормаль.

Вам известно, что три точки в пространстве определяют единственную плоскость. Поэтому, если заданы три точки, то мы можем найти уравнение плоскости

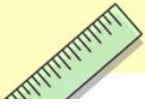
Мы можем подставить координаты заданных точек в уравнение плоскости и решить систему из трех уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cy_0 + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cy_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cy_2 + D = 0 \end{cases}$$

В этой системе четыре неизвестных, однако, мы можем избавиться от одной, если разделим все уравнения на  $D$ :







В этой системе четыре неизвестных, однако, мы можем избавиться от одной, если разделим все уравнения на D:

$$\begin{cases} \tilde{A}x_0 + \tilde{B}y_0 + \tilde{C}y_0 + 1 = 0 \\ \tilde{A}x_1 + \tilde{B}y_1 + \tilde{C}y_1 + 1 = 0 \\ \tilde{A}x_2 + \tilde{B}y_2 + \tilde{C}y_2 + 1 = 0 \end{cases} .$$

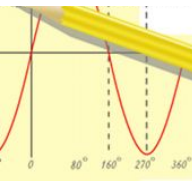
Для изучения данного способа в 11 классе на базовом уровне введение понятий матрица, определитель матрицы не желателен, данные понятия не входят в базовый курс изучения геометрии.

Иногда эта система оказывается несложной. Но иногда бывает трудно ее решить, и тогда можно использовать следующую формулу:

Обозначение  $|M|$  означает определитель матрицы M.

В нашем случае матрица представляет собой таблицу 3x3 элемента. И определитель  $|M|$  вычисляется следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} .$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

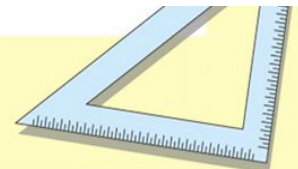
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

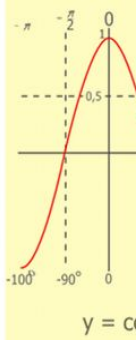
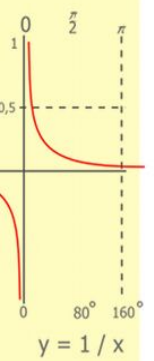
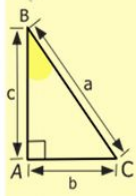
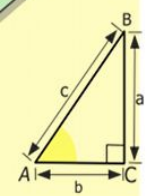
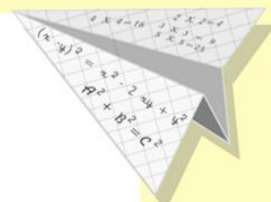
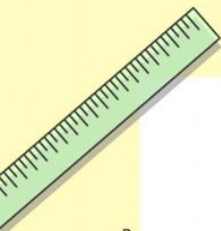
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 20 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$





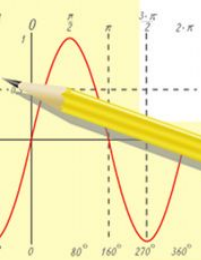
Таким образом, уравнение плоскости будет записано так:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - x_0)(y_1 - y_0)(z_2 - z_0) + (z - z_0)(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) + (y - y_0)(z_1 - z_0)(x_2 - x_0) - (z - z_0)(y_1 - y_0)(x_2 - x_0) - (x - x_0)(z_1 - z_0)(y_2 - y_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0)(z_2 - z_0) = 0$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

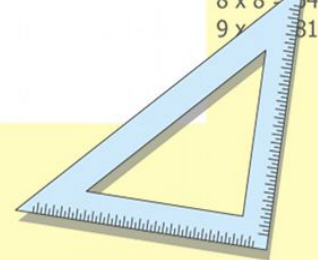
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Пример 1:

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки K(1; -2; 3), L (0; 1; 1), M (1; 0; 1).

Составим систему.

$$\begin{cases} A - 2B + 3C + D = 0 \\ B + C + D = 0 \\ A + C + D = 0 \end{cases}$$

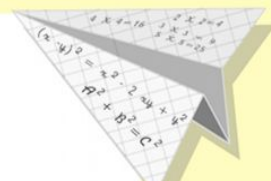
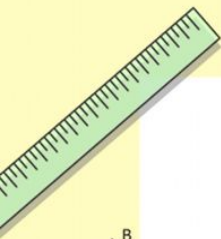
Решая ее, получим значения A, B и C:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = -2 \end{cases}$$

. То есть уравнение плоскости имеет вид:

$$x + y + z - 2 = 0$$

Ответ:  $x + y + z - 2 = 0$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

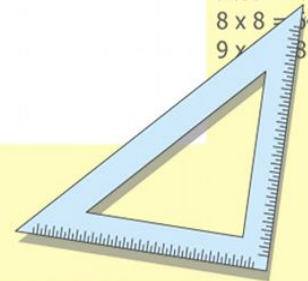


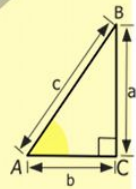
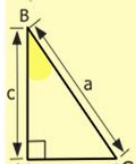
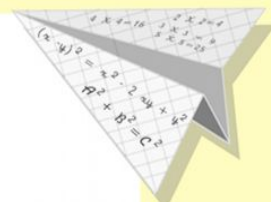
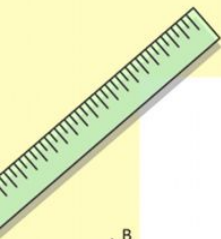
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

7 x 7 =	49
8 x 8 =	64
9 x 9 =	81





Теперь запишем формулу угла между прямой и плоскостью.

Пусть дано уравнение плоскости:  $Ax + By + Cz + D = 0$  и известен  $\vec{p} = \{s, m, n\}$  - направляющий вектор прямой.

Тогда  $\sin \varphi = \frac{|As + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{s^2 + m^2 + n^2}}$  - синус угла между прямой и плоскостью.

$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



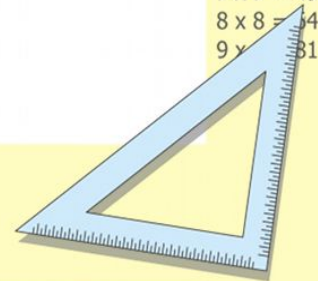
$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

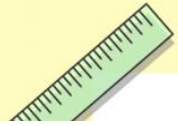
$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$





Пример 2:

Найдем угол между прямой и плоскостью. В качестве плоскости возьмем ту, уравнение которой мы только что написали:

$$x + y + z - 2 = 0$$

Прямая проходит через точки  $T(2; -1; 4)$  и  $P(3; 2; 2)$ .

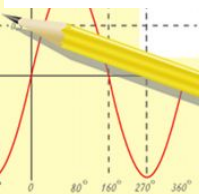
Направляющий вектор прямой:  $\overline{TP} = \{1; 3; -2\}$  .

Найдем синус угла между прямой и плоскостью:

$$\sin \varphi = \frac{|1 + 3 - 2|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{21} .$$

Угол между прямой и плоскостью  $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{42}}{21}$  .

Ответ:  $\arcsin \frac{\sqrt{42}}{21}$  .



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

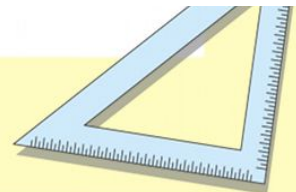


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



## Угол между плоскостями

Пусть:

уравнение первой плоскости:  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

уравнение второй плоскости:  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Тогда  $\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$  - косинус угла между этими плоскостями

Пример 3:

Найдем угол между плоскостями:

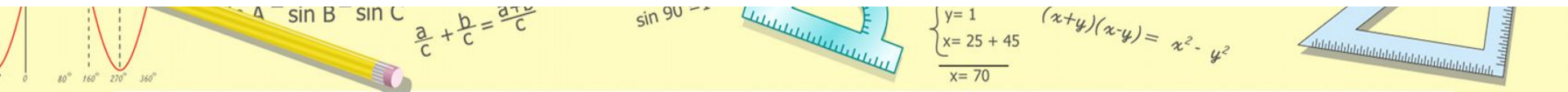
$$x - 2y + 3 = 0 \quad \text{и} \quad 2x + y + z - 1 = 0$$

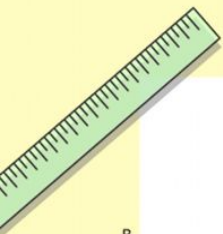
Найдем косинус угла между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{|2 - 2 + 0|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0$$

Угол между плоскостями:  $\varphi = 90^\circ$

Ответ:  $\varphi = 90^\circ$





## Расстояние от точки до плоскости

Пусть координаты точки:  $M(x_0; y_0; z_0)$ , уравнение плоскости:  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

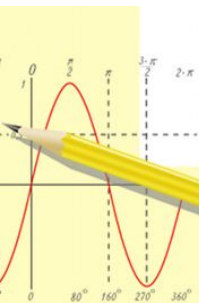
Тогда Расстояние от точки до плоскости вычисляется по формуле:  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

Пример 4.

Найдем расстояние от точки  $M(4; 3; 4)$  до плоскости  $x - 2y + 3 = 0$ .

$$d = \frac{4 - 6 + 3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Теперь рассмотрим решение задачи координатным методом с использованием рассмотренных формул.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



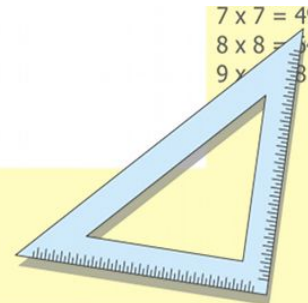
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

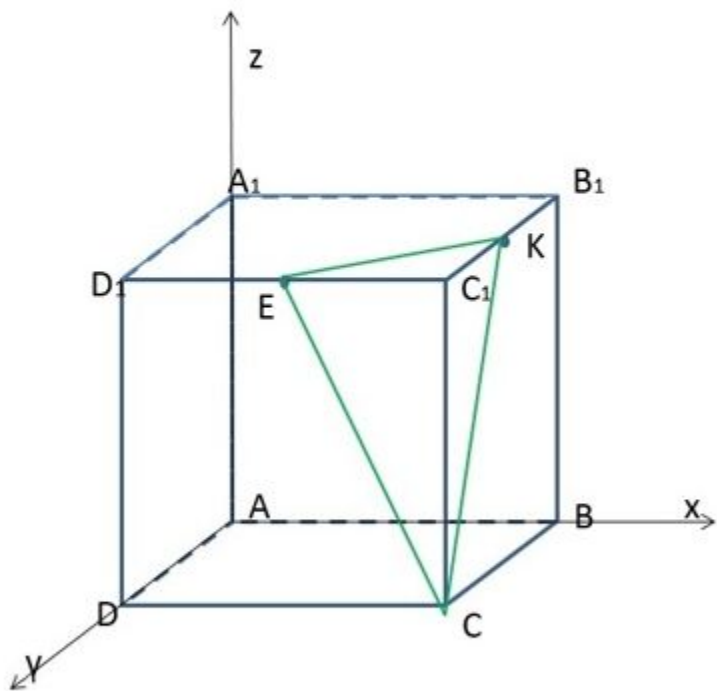
$$\begin{aligned} 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \\ 9 \times 9 &= 81 \end{aligned}$$



Пример 5.

ABC...D1 – куб с ребром 4. Найти расстояние от точки A до плоскости EKC (E – середина D1C1, K – середина C1B1)

Введем систему координат с началом в вершине A так, как показано на рисунке:



Интересующие нас точки будут иметь координаты:

$A(0; 0; 0)$ ,  $C(4; 4; 0)$ ,  $E(4; 2; 4)$ ,  $K(2; 4; 4)$ .





Напишем уравнение плоскости ЕКС:

$$\begin{cases} 4A + 2B + 4C + D = 0 \\ 2A + 4B + 4C + D = 0 \\ 4A + 4B + D = 0 \end{cases}$$

Решая ее, получим значения A, B, C и D:

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = -16 \end{cases}$$

Уравнение плоскости имеет вид:  $2x + 2y + z - 16 = 0$

Теперь найдем расстояние от точки A до плоскости ЕКС:

$$d = \frac{|16|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Ответ:  $5\frac{1}{3}$

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

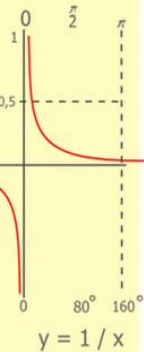
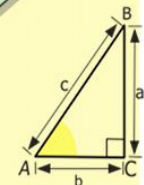
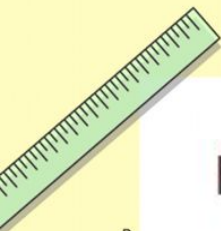
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

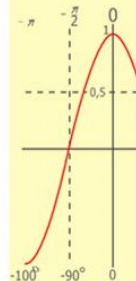
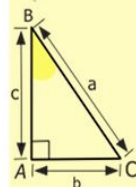
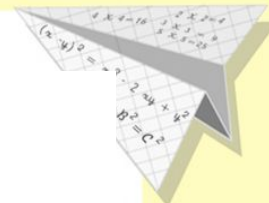
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

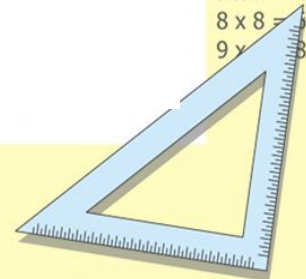


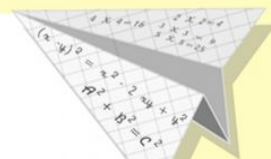
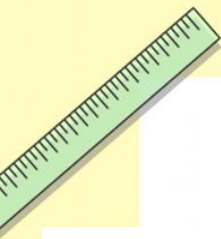
$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} 500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$y = \cos$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81





Рассмотрим задачу (№14 из варианта ЕГЭ).

В кубе  $ABC...D_1$  все рёбра равны 4. На его ребре  $BB_1$  отмечена точка  $K$  так, что  $KB = 3$ . Через точки  $K$  и  $C_1$  построена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- а) Докажите, что  $A_1P : PB_1 = 2 : 1$ , где  $P$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $A_1B_1$ .
- б) Найдите угол наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости грани  $BB_1C_1C$ .

Решение:

Переформулируем первый пункт этой задачи таким образом:

Проведем плоскость через точки  $P$ ,  $K$  и  $C_1$  и докажем, что она параллельна прямой  $BD_1$ .

Введем систему координат так, как показано на рисунке:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

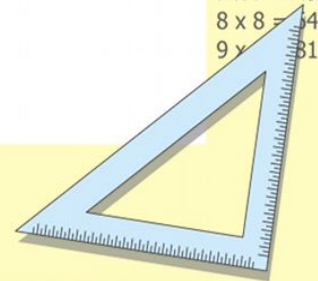


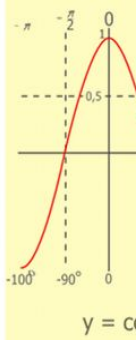
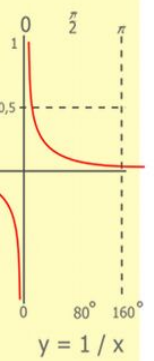
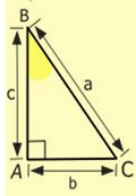
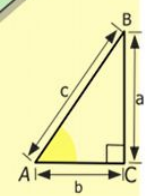
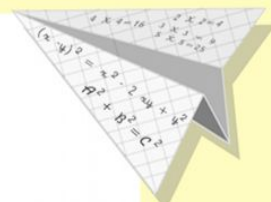
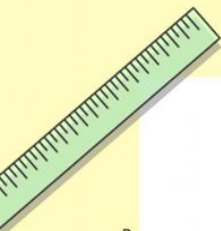
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

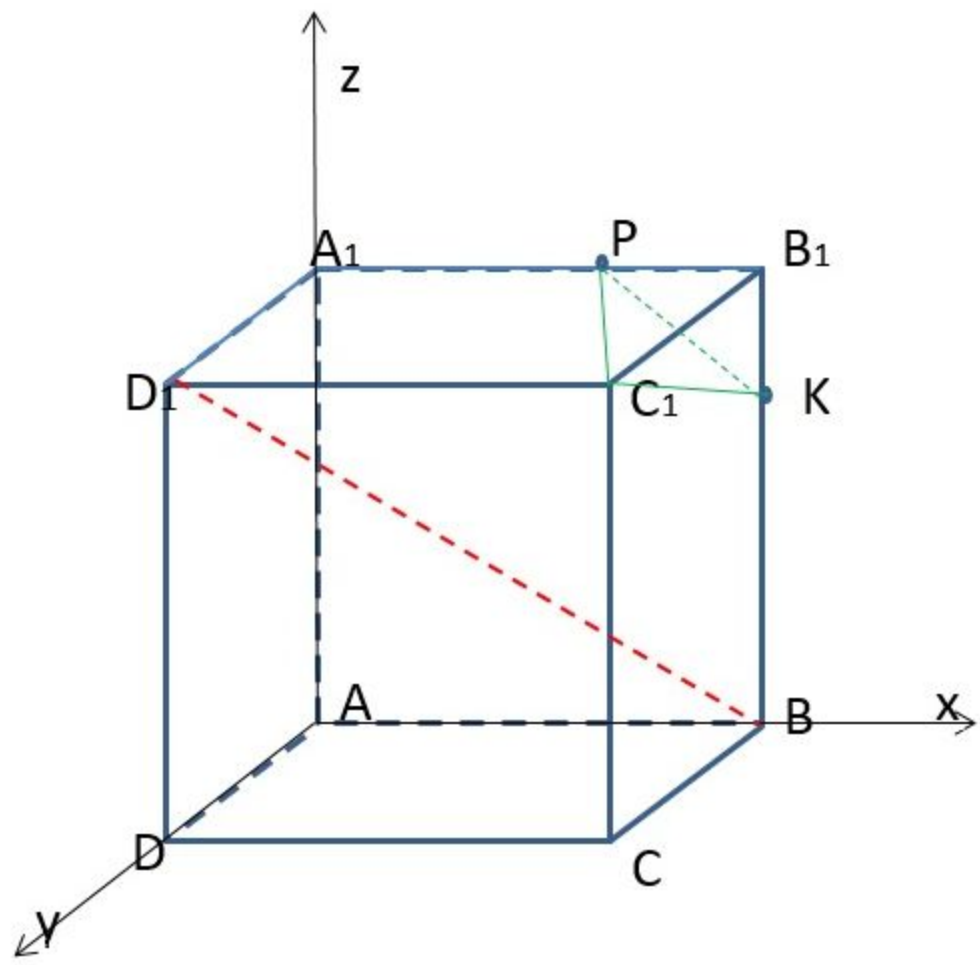
7 x 7 =	49
8 x 8 =	64
9 x 9 =	81





$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ + 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



Найдем координаты точек P, K и C<sub>1</sub> :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

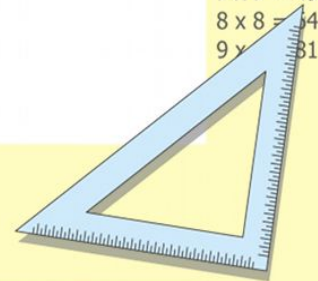
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Найдем координаты точек  $P, K$  и  $C_1$  :

$$P\left(\frac{8}{3}; 0; 4\right), K(4; 0; 3), C_1(4; 4; 4).$$

Напишем уравнение плоскости  $PKC_1$  :

$$\begin{cases} \frac{8}{3}A + 4C + D = 0 \\ 4A + 3C + D = 0 \\ 4A + 4B + 4C + D = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 8A + 12C + 4D = 0 \\ 4A + 3C + D = 0 \\ 4A + 4B + 4C + D = 0 \end{cases}$$

Решая ее, получим значения  $A, B, C$  и  $D$ :

$$\begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \\ C = 4 \\ D = -24 \end{cases}.$$

$3x - y + 4z - 24 = 0$  - уравнение плоскости

Теперь докажем, что плоскость  $3x - y + 4z - 24 = 0$  параллельна прямой  $BD_1$ .

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

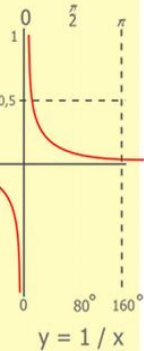
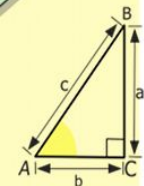
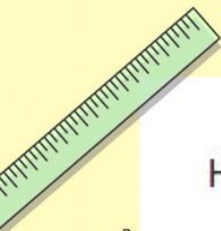
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

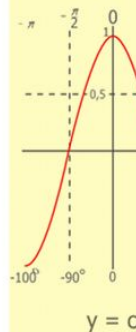
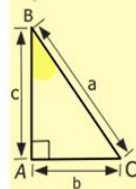
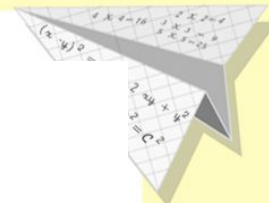
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

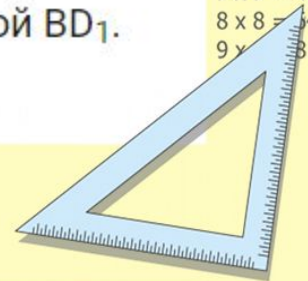
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$





Найдем угол между прямой  $BD_1$  и плоскостью  $3x - y + 4z - 24 = 0$ .

Точки  $B$  и  $D_1$  имеют координаты:  $B(4; 0; 0)$ ,  $D_1(0; 4; 4)$ .

Направляющий вектор прямой  $BD_1$  – это вектор  $\overrightarrow{BD_1}$ .

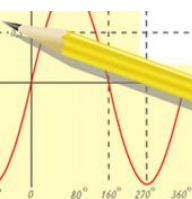
Он имеет координаты  $\overrightarrow{BD_1} = \{-4; 4; 4\}$ .

Теперь найдем синус угла между вектором  $\overrightarrow{BD_1}$  и плоскостью  $3x - y + 4z - 24 = 0$ .

$$\sin \varphi = \frac{|As + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{s^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{3(-4) - 1 \cdot 4 + 4 \cdot 4}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{s^2 + m^2 + n^2}} = 0$$

В этом случае нам не нужно считать знаменатель дроби. Так как числитель получился равен 0, то дробь равна 0, то есть синус угла между плоскостью и прямой равен 0, значит, плоскости параллельны или совпадают. Но, так как точка  $B$ , например, в плоскости, очевидно, не лежит, то плоскости параллельны.



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

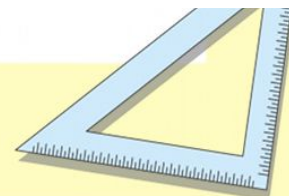


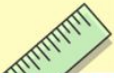
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$





Это значит, что плоскость, параллельная прямой  $BD_1$  и проходящая через точки  $K$  и  $C_1$  действительно пересекает ребро  $A_1B_1$  в точке  $P$  так, что  $A_1P : PB_1 = 2 : 1$ . Что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим второй пункт задачи. Уравнение плоскости  $PKC_1$  у нас есть. Плоскость  $BB_1$  параллельна координатной плоскости  $YOZ$  и проходит через точку

$B(4; 0; 0)$ . Поэтому она имеет уравнение  $x - 4 = 0$ .

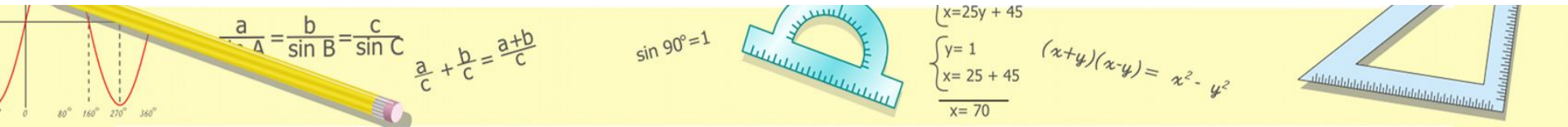
То есть ее коэффициенты  $\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = -4 \end{cases}$ .

Найдем угол между плоскостями, используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{3}{1 \cdot \sqrt{9 + 1 + 16}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

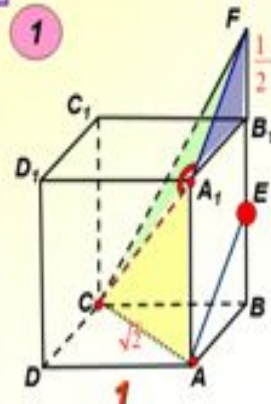
Ответ:  $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{26}}$ .



**Задача №1.** Точка E – середина ребра  $BB_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найти угол между прямыми  $AE$  и  $CA_1$ .

Решение геометрическим методом. Решение методом координат.

**1**



**Дано:**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб,  $BE = EB_1$ .

**Найти:**  $\varphi = (\overline{AE}, \overline{CA_1})$

**Решение:**

Из  $\triangle ACA_1$  найдем  $CA_1$ :  $CA_1 = \sqrt{3}$ .

Проведем через  $A_1$  прямую  $A_1 F \parallel AE$ .

$\varphi = (\overline{AE}, \overline{CA_1}) = \angle CA_1 F$ .

Из  $\triangle A_1 B_1 F$  ( $\angle B_1 = 90^\circ$ ) найдем  $A_1 F$ :

$$A_1 F = \sqrt{A_1 B_1^2 + B_1 F^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

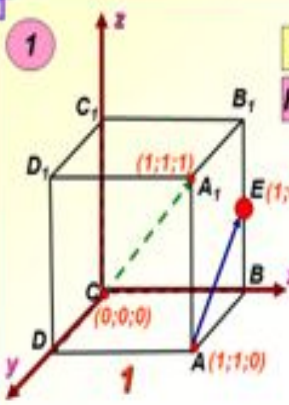
Из  $\triangle C B F$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) найдем  $CF$ :  $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

Из  $\triangle CA_1 F$  найдем  $\cos \varphi$ :  $\cos \varphi = \frac{CA_1^2 + A_1 F^2 - CF^2}{2 \cdot CA_1 \cdot A_1 F} = \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

**Ответ:**  $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

**1**



**Дано:**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб,  $BE = EB_1$ .

**Найти:**  $\varphi = (\overline{AE}, \overline{CA_1})$

**Решение:**

Введем систему координат. Определим координаты точек  $A, E, C, A_1$ .

$\varphi = (\overline{AE}, \overline{CA_1}) = (\overline{AE}, \overline{CA_1})$

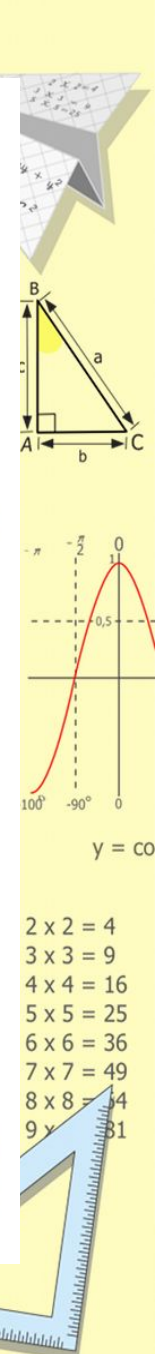
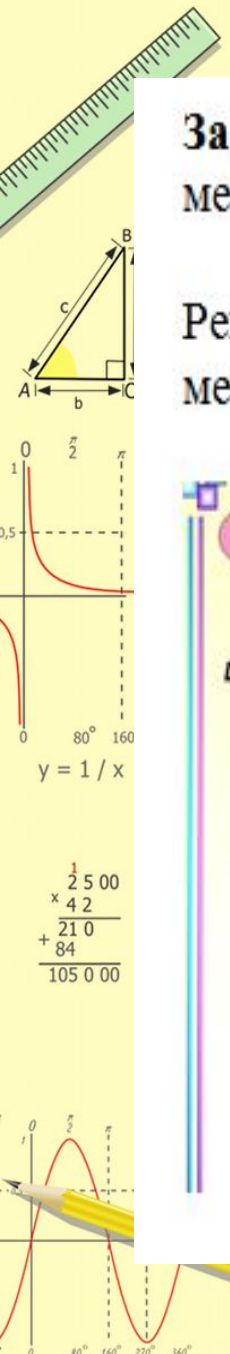
Направляющие векторы прямых:

$$\overline{CA_1} \{1; 1; 1\}, \overline{AE} \{0; -1; \frac{1}{2}\}$$

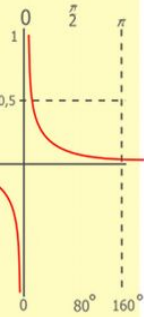
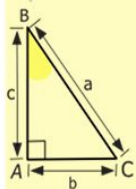
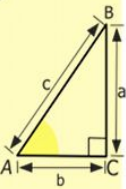
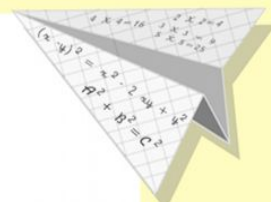
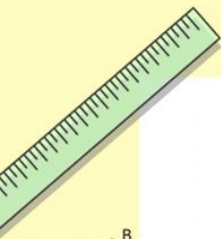
$$\cos \varphi = \frac{|\overline{AE} \cdot \overline{CA_1}|}{|\overline{AE}| \cdot |\overline{CA_1}|} = \frac{|0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + (\frac{1}{2})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$ .

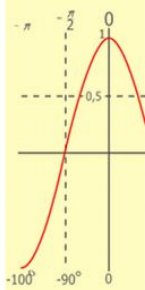
**Ответ:**  $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{15}}{15}$ .



$\sin A = \sin B = \sin C$ ,  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ ,  $\sin 90^\circ = 1$ ,  $\begin{cases} y=1 \\ x=25+45 \\ x=70 \end{cases}$ ,  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$



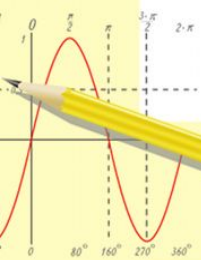
y = 1 / x



y = cos

1 2 5 00  
x 4 2  
-----  
21 0  
+ 84  
-----  
105 0 00

- 2 x 2 = 4
- 3 x 3 = 9
- 4 x 4 = 16
- 5 x 5 = 25
- 6 x 6 = 36
- 7 x 7 = 49
- 8 x 8 = 64
- 9 x 9 = 81



a/c = b/A = sin B = sin C

a/c + b/c = a+b/c

sin 90° = 1



{ y = sin 90  
x = 25y + 45

{ y = 1  
x = 25 + 45  
-----  
x = 70

(x+y)(x-y) = x^2 - y^2

