

Напряженность и потенциал

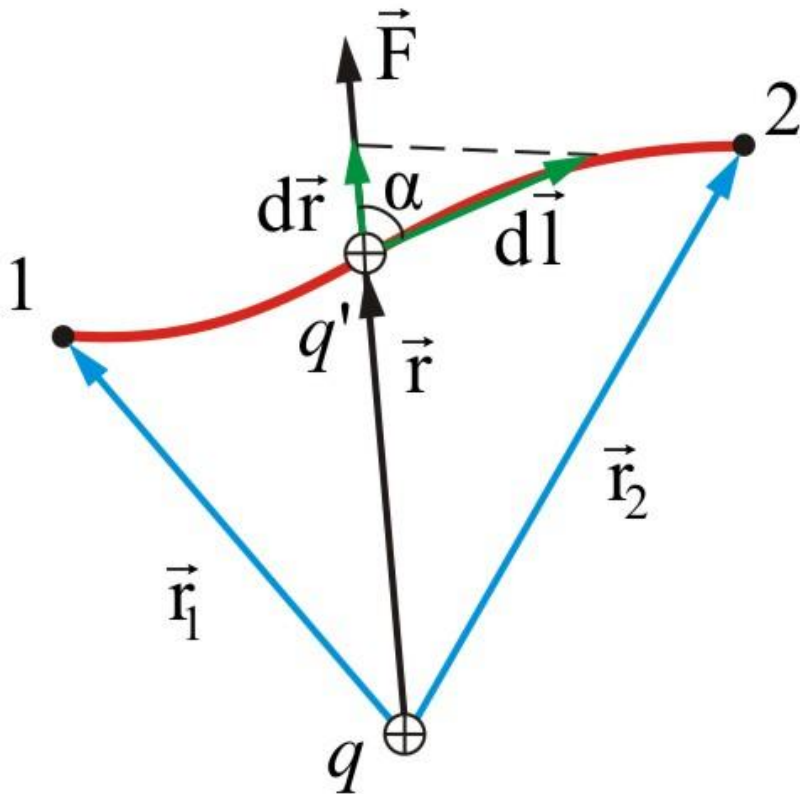
- В предыдущей теме было показано, что взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через **электростатическое поле**. Описание электростатического поля мы рассматривали с помощью **вектора напряженности** \vec{E} , равного силе, действующей в данной точке на помещенный в неё пробный единичный положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

- *Существует и другой способ описания поля – с помощью **потенциала**.*
- *Однако для этого необходимо сначала **доказать, что силы электростатического поля консервативны, а само поле потенциально.***

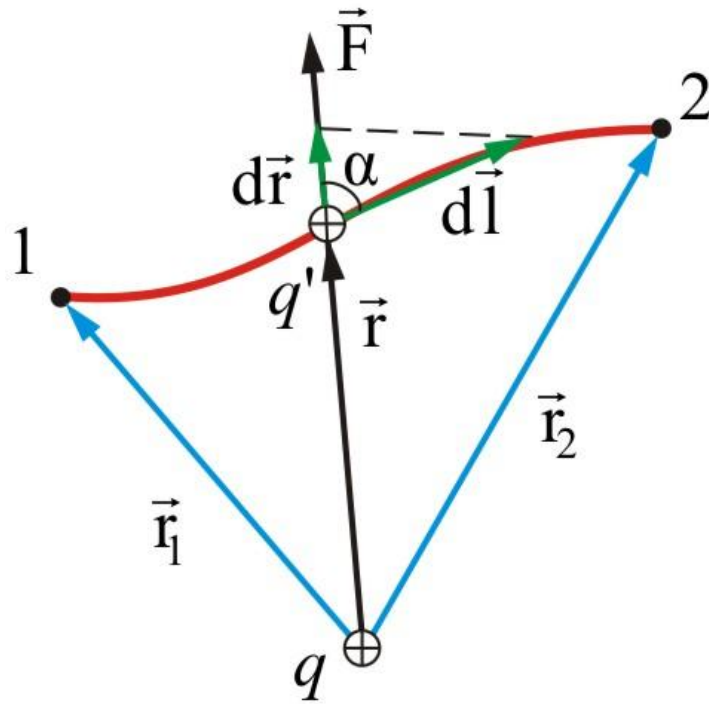
Работа сил электростатического поля.

- Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q .
- В любой точке этого поля на пробный точечный заряд q' действует сила F



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$



- где $F(r)$ – модуль вектора силы, $\frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, определяющий положение заряда q относительно q' , ϵ_0 – электрическая постоянная.

- Для того, чтобы доказать, что *электростатическое поле потенциально*, нужно доказать, что *силы электростатического поля консервативны*.
- Из раздела «Физические основы механики» известно, что *любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек*.

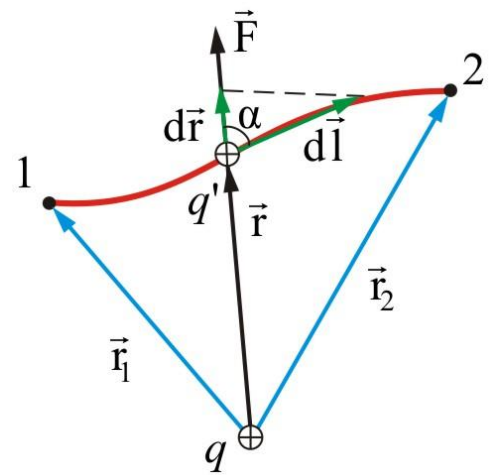
- Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом q по перемещению заряда q' из точки 1 в точку 2.

- Работа на отрезке пути $d\vec{l}$ равна:

- $$dA = F d\vec{l} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} d\vec{l} \cos \alpha,$$

- где dr – приращение радиус-вектора при перемещении на $d\vec{l}$; $dr = d\vec{l} \cos \alpha,$

- $$dA = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$



- Полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна интегралу:

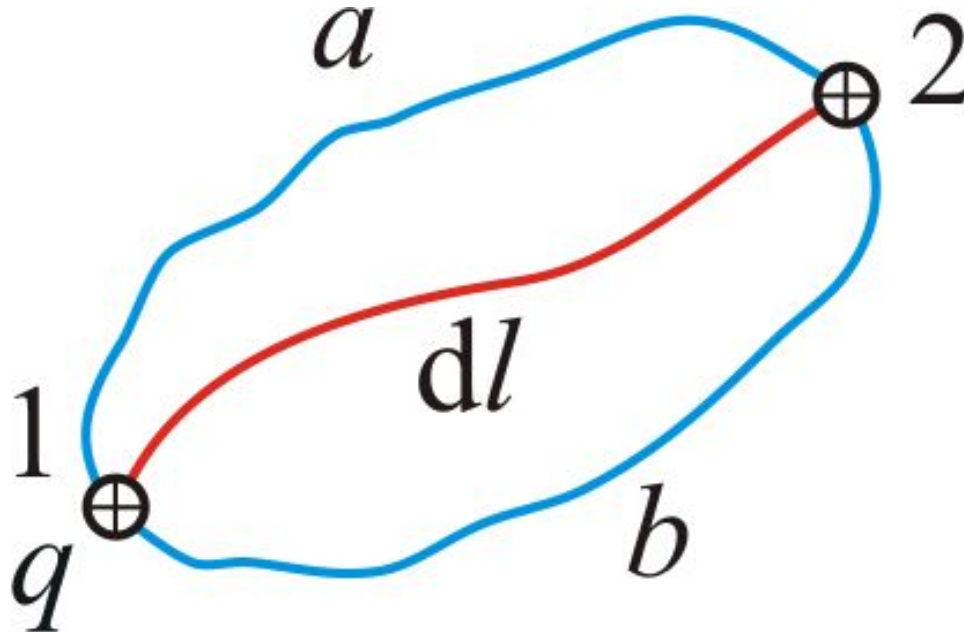
-

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

- **Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения. Следовательно, силы поля консервативны, а само поле – потенциально.**

- Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 заданного поля в точку 2, взять положительный единичный заряд q , то элементарная работа сил поля будет равна:

$$dA = q \vec{E} d\vec{l}.$$



- Тогда вся работа равна:

$$A = q \int \vec{E} d\vec{l}.$$

- Такой интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией вектора \vec{E}**

- Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по произвольному замкнутому пути:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

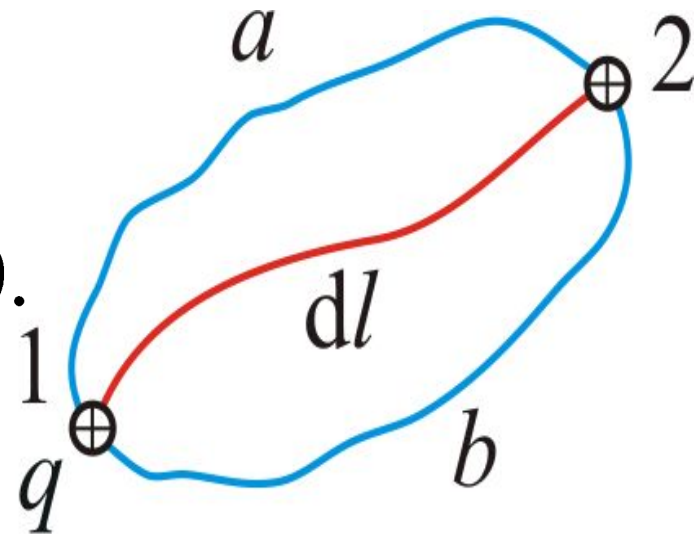
- **теорема о циркуляции вектора \vec{E}** .

- Для доказательства теоремы разобьем произвольно замкнутый путь на две части: $1a2$ и $2b1$. Из сказанного выше следует, что

$$\int_1^2 E dl = - \int_2^1 E dl.$$

- (Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны). Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q \oint E dl = q \int_1^2 E dl - q \int_2^1 E dl = 0.$$



- Теорема о циркуляции позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам.
- Рассмотрим простой пример, подтверждающий это заключение.
- *1) Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми.* В самом деле, если это не так, и какая-то линия – замкнута, то, взяв циркуляцию вдоль этой линии, мы сразу же $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ приходим к противоречию с теоремой о циркуляции вектора \vec{E} :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$
- А в данном случае направление интегрирования в одну сторону, поэтому циркуляция вектора не равна нулю.

Работа и потенциальная энергия

- ***электростатическое поле потенциально.***
- Следовательно, можно ввести функцию состояния, зависящую от координат – ***потенциальную энергию.***

- Исходя из принципа суперпозиции сил ,

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$$

- можно показать, что общая работа A будет равна сумме работ каждой силы:

$$A = \sum_k A_k.$$

- *Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма.*

- **Работу**

через убыль

потенциальной энергии – разность двух функций состояний:

$$A_{12} = W_1 - W_2.$$

Это выражение для работы можно переписать

в виде:

- $$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

- Сопоставляя формулу получаем **выражение для потенциальной энергии** заряда q' в поле заряда

q :

- $$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$$

Потенциал. Разность потенциалов

- Разные пробные заряды q', q'', \dots будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями W', W'' и так далее $W / q'_{\text{пр}}$. Однако отношение $W / q'_{\text{пр}}$ будет для всех зарядов одним и тем же.

- Поэтому можно ввести **скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой поля – потенциал:**

$$\varphi = \frac{W}{q'}$$

- Подставив в выражение для потенциала значение потенциальной энергии , получим выражение для ***потенциала точечного заряда***:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} .$$

- Потенциал, как и потенциальная энергия, определяют с точностью до постоянной интегрирования.

- физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что *потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю.*
- Когда говорят «потенциал такой-то точки» – имеют в виду *разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность.*

- Другое определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q} \quad \text{или} \quad A_{\infty} = q\varphi$$

- *т.е. потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность*
- *(или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля).*
- При этом $\varphi > 0$, если $q > 0$.

- Если поле создается системой зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получаем:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k q'}{r_k}$$

- Тогда и для потенциала $\varphi = \sum_k \varphi_k$ или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k}{r_k}$$

- *т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.*
- *А вот напряженности складываются при наложении полей – векторно.*

- Выразим работу сил электростатического поля через разность потенциалов между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

- Таким образом, работа над зарядом q равна произведению заряда на убыль потенциала:

- $$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU,$$

- где U – напряжение.

$$A = qU$$

- Формулу $A_{\infty} = q\varphi$ можно использовать для установления единиц потенциала:

за единицу потенциала принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу равную единице.

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл}$$

- В СИ единица потенциала

Электрон - вольт (эВ) – это ,
совершенная силами поля над зарядом,
равным заряду электрона при
1 В, то есть:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Производными единицами эВ являются
МэВ, ГэВ и ТэВ:

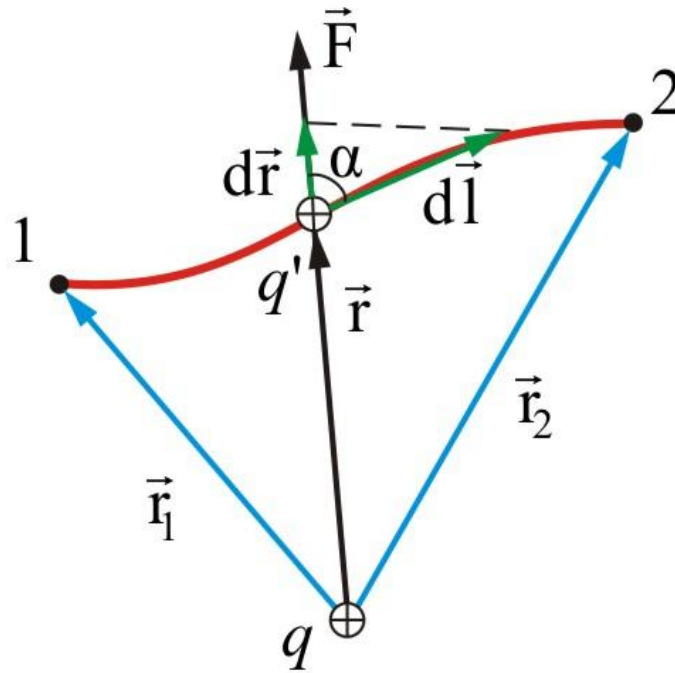
$$1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-13} \text{ Дж,}$$

$$1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-10} \text{ Дж,}$$

$$1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ} = 1,60 \cdot 10^{-7} \text{ Дж.}$$

Связь между напряженностью и потенциалом

- Изобразим перемещение заряда q' по произвольному пути l в электростатическом поле.



- Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке $d\vec{l}$ можно найти так:

$$dA = F_l dl = E_l q dl,$$

$$dA = F_l dl = E_l q dl,$$

- С другой стороны, эта работа, равна убыли потенциальной энергии заряда, перемещенного на расстоянии dl :

-

- $dA = -q d\varphi$; *тогда*

$$E_l q dl = -q d\varphi$$

- отсюда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

- Для ориентации $d\mathbf{l}$ (направление перемещения) в пространстве, надо знать проекции на оси координат:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k},$$

- Определение градиента: **сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть *градиент этой функции***

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k},$$

grad φ – вектор, показывающий направление набыстрейшего увеличения функции.

- Коротко связь между \vec{E} и φ записывается так:

- $$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

- или так:

- $$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

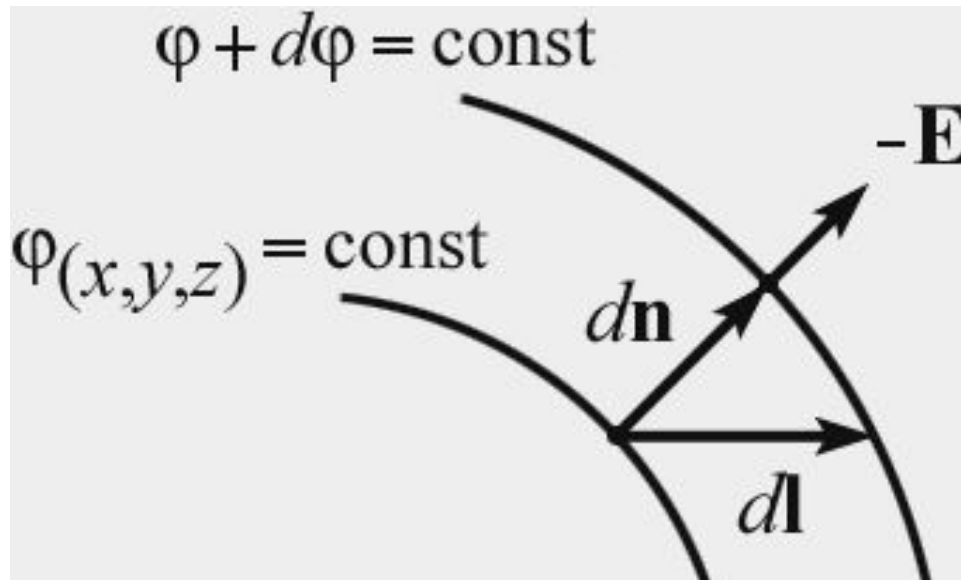
- где ∇ (набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона

- Знак минус говорит о том, что вектор направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

Вектор напряженности электрического поля E направлен против направления наискорейшего роста потенциала:

$$\vec{E} = - \frac{d\varphi}{dn} \vec{n}$$

\vec{n} – единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности $\varphi = \text{const}$



Безвихревой характер электростатического поля

- Из условия $\vec{E} = -\nabla\varphi$ следует одно важное соотношение, а именно, **величина, векторного произведения $[\nabla, \vec{E}]$ для стационарных электрических полей всегда равна нулю.** Действительно, по определению, имеем

$$[\nabla, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \varphi = 0$$

- поскольку определитель содержит две одинаковые строки.

- Величина $[\nabla, \vec{E}]$ называется **ротором** или **вихрем**

- Мы получаем **важнейшее уравнение электростатики:**

- $$\text{rot} \vec{E} = 0$$

**электростатическое поле –
безвихревое.**

- Согласно **теореме Стокса**, присутствует следующая связь между контурным и поверхностным интегралами:

- $$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = 0$$

- где контур L ограничивающий поверхность S ориентация которой определяется \vec{n} направлением вектора положительной нормали : $d\vec{S} = \vec{n} dS$

- Поэтому **работа при перемещении заряда по любому замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю.**

Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

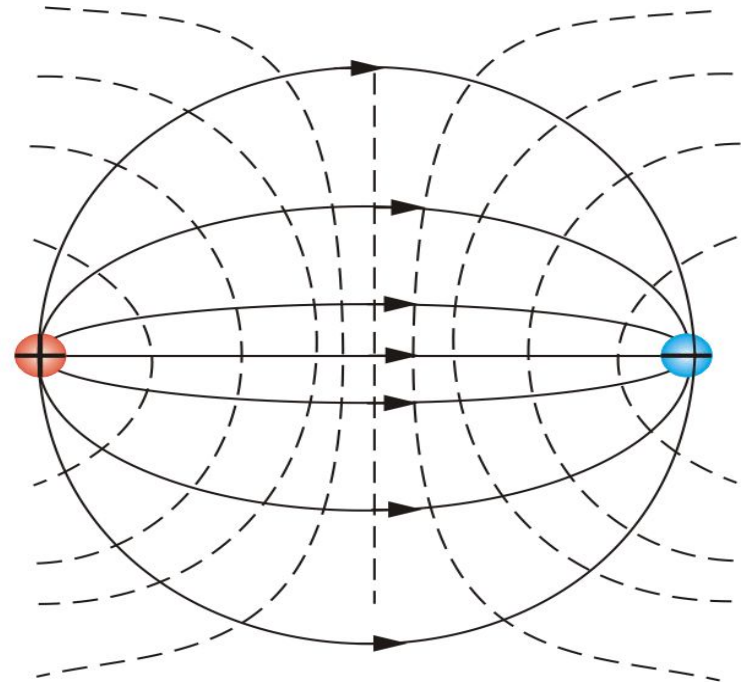
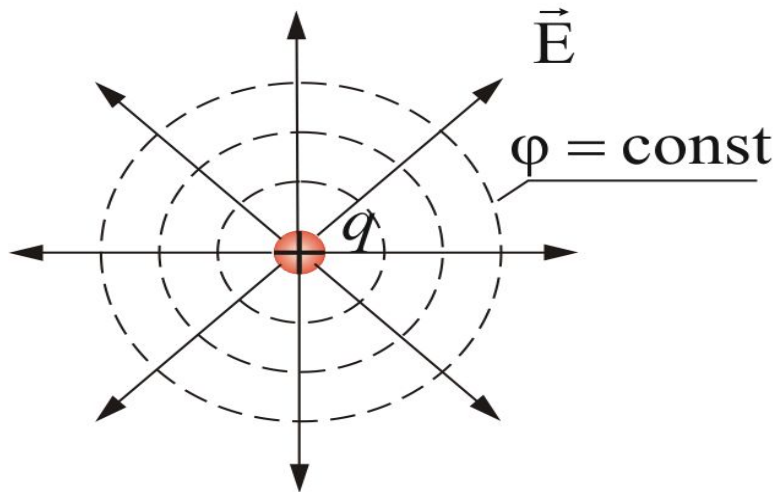
- Направление *силовой линии* (линии напряженности) в каждой точке совпадает с направлением \vec{E} .
- Отсюда следует, что **напряженность равна разности потенциалов U на единицу длины силовой линии.**
- Именно вдоль силовой линии происходит максимальное изменение потенциала. Поэтому всегда можно определить Φ между двумя точками, измеряя U между ними, причем тем точнее, чем ближе точки.
- **В однородном электрическом поле** силовые линии – прямые. Поэтому здесь определить \vec{E} наиболее просто:

$$E = \frac{U}{l}$$

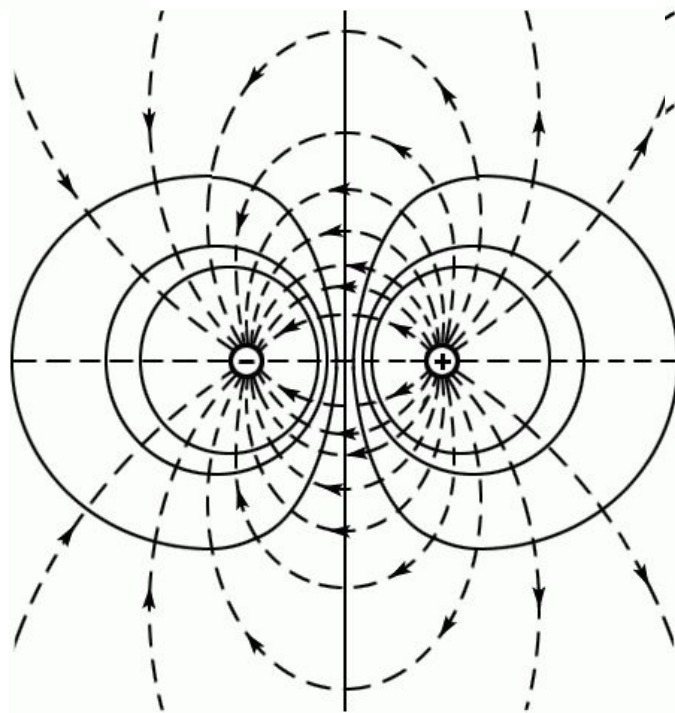
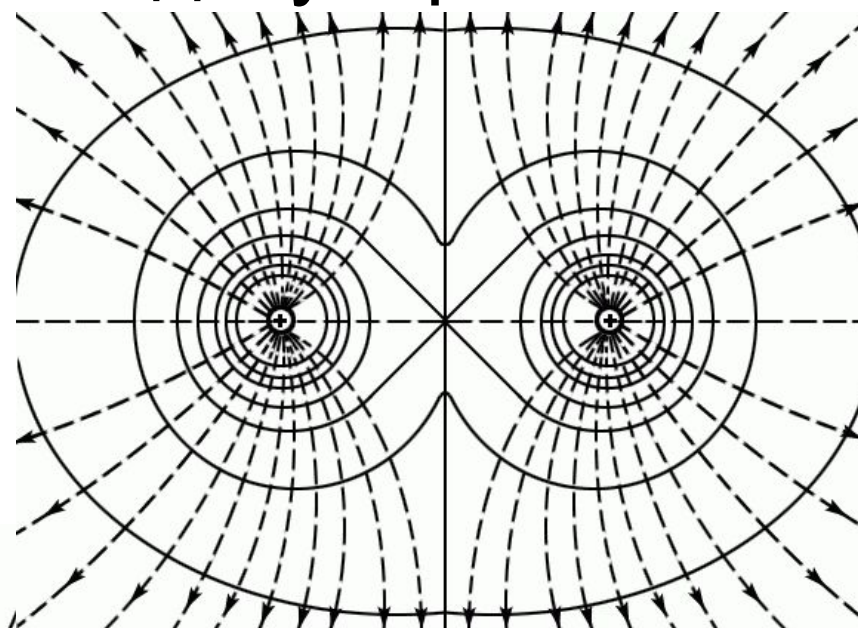
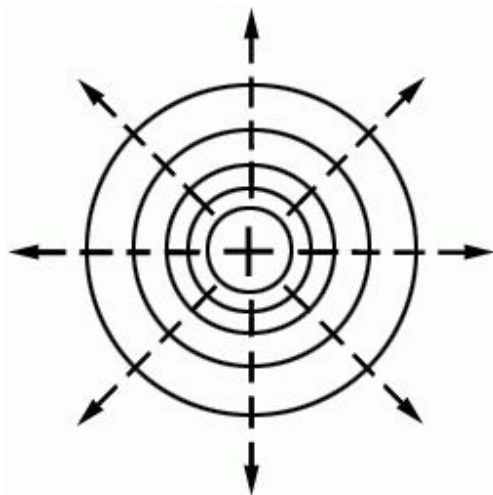
- *Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется эквипотенциальной поверхностью.*

- Уравнение этой поверхности

- $\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const.}$



Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны



- Формула $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке.
- Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям \vec{E} в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\mathbf{E}, d\mathbf{l}).$$

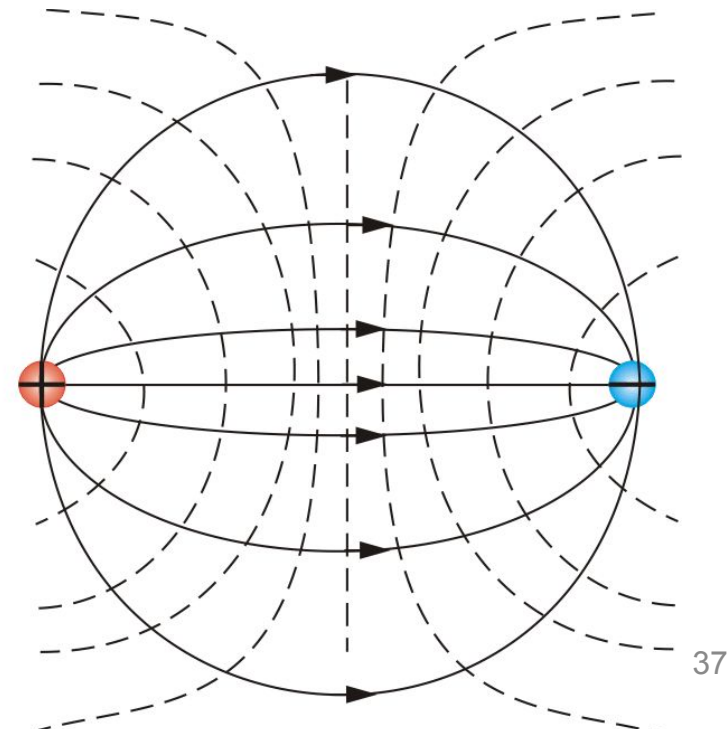
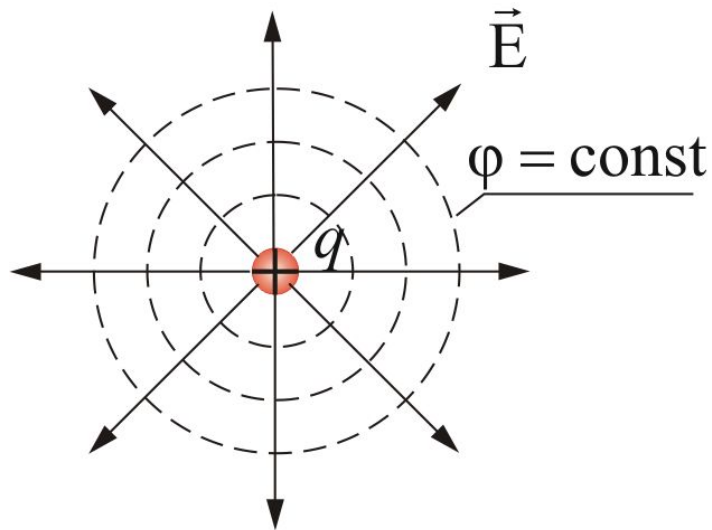
- Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути.
- Для обхода по замкнутому контуру получим:
- т.е. пришли к известной нам теореме $\oint \mathbf{E} = 0$ циркуляции вектора напряженности:

циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

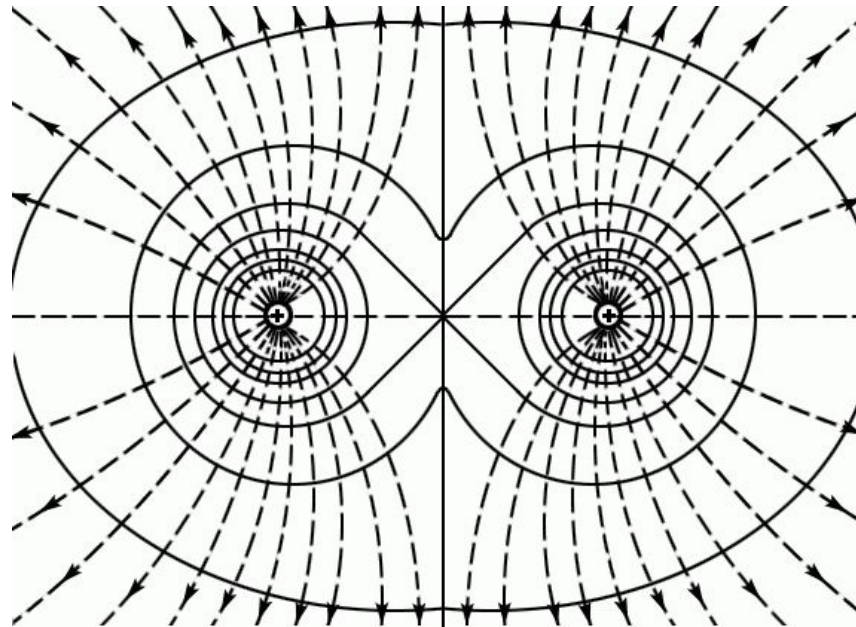
$$\oint (\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0,$$

Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.

- Из обращения в нуль циркуляции вектора следует, что **линии электростатического поля не могут быть замкнутыми**: они **начинаются на положительных зарядах (истоки)** и на **отрицательных зарядах заканчиваются (стоки)** или **уходят в бесконечность**



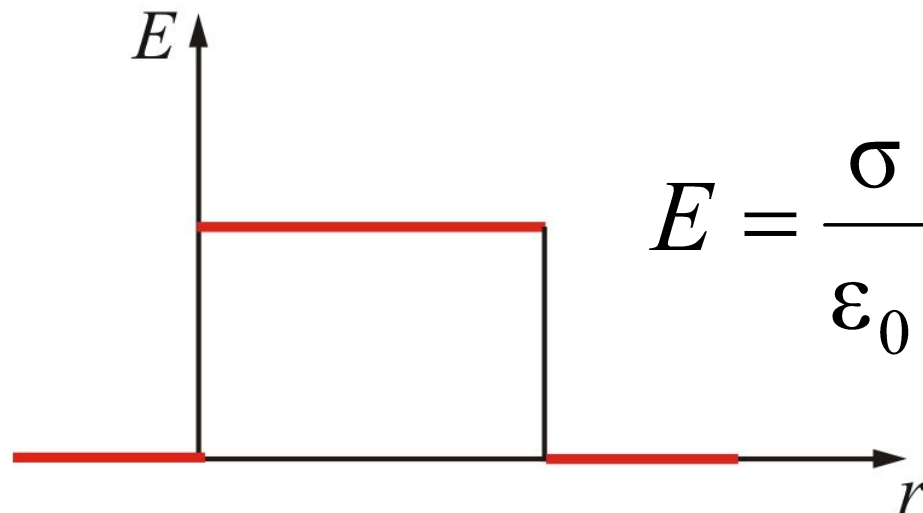
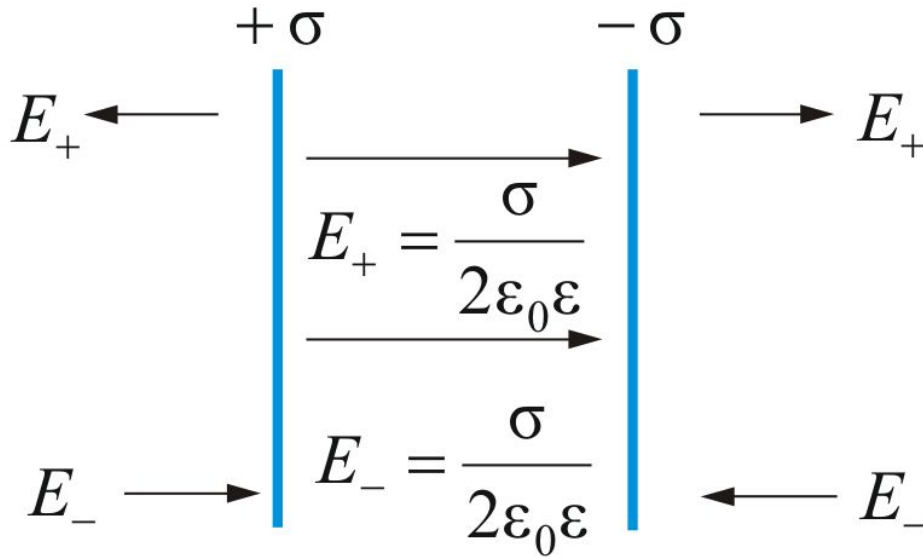
Там, где расстояние между эквипотенциальными поверхностями мало, напряженность поля наибольшая. Наибольшее электрическое поле в воздухе при атмосферном давлении достигает около 10^6 В/м.



Расчет потенциалов простейших электростатических полей

- Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами

Разность потенциалов между двумя бесконечными заряженными плоскостями



- Мы показали, что напряженность связана с потенциалом

- $E = \frac{d\varphi}{dl}$, $d\varphi = -Edl$

- где $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ – напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями

- $\sigma = q/S$ – поверхностная плотность заряда.

- Чтобы получить выражение для потенциала между плоскостями, проинтегрируем выражение $d\varphi = -Edl$

- $$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx;$$

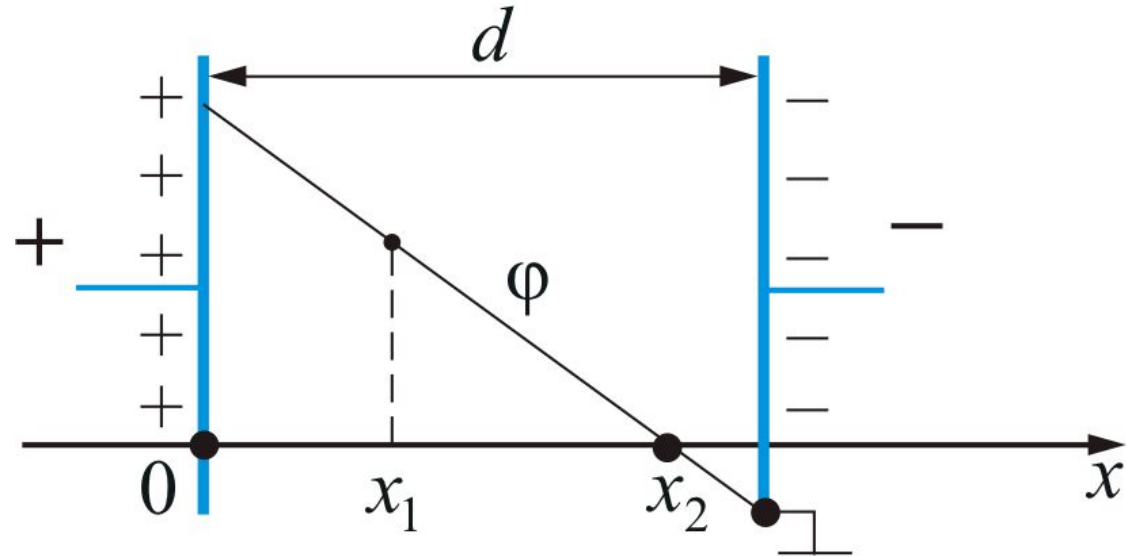
- $$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (x_2 - x_1)$$

При $x_1 = 0$ и $x_2 = d$

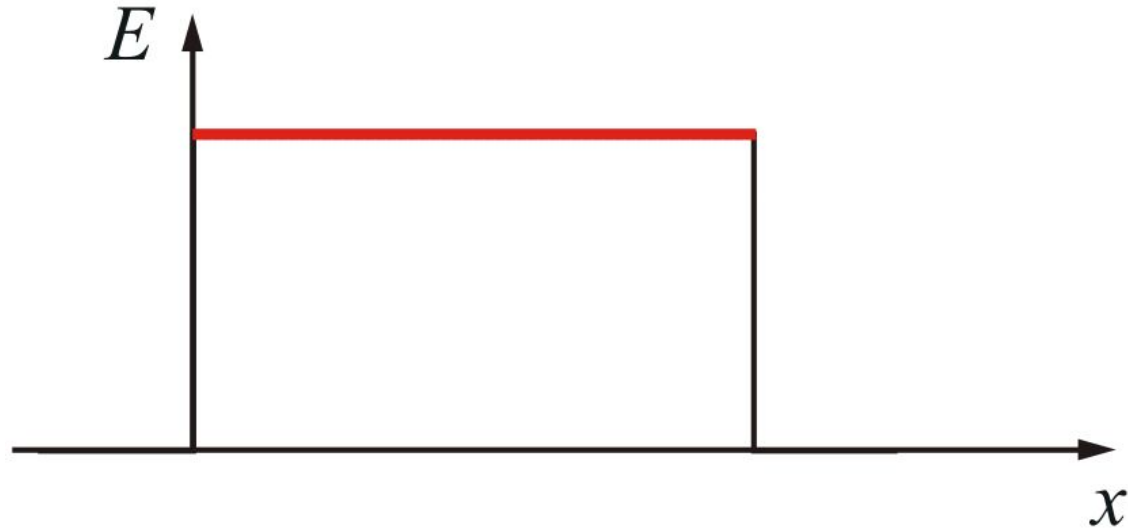
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

- На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от расстояния между плоскостями.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Разность потенциалов между точками поля, образованного бесконечно длинной цилиндрической поверхностью

- С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что

$$E = \begin{cases} 0 & \text{– внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} & \text{на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} & \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$

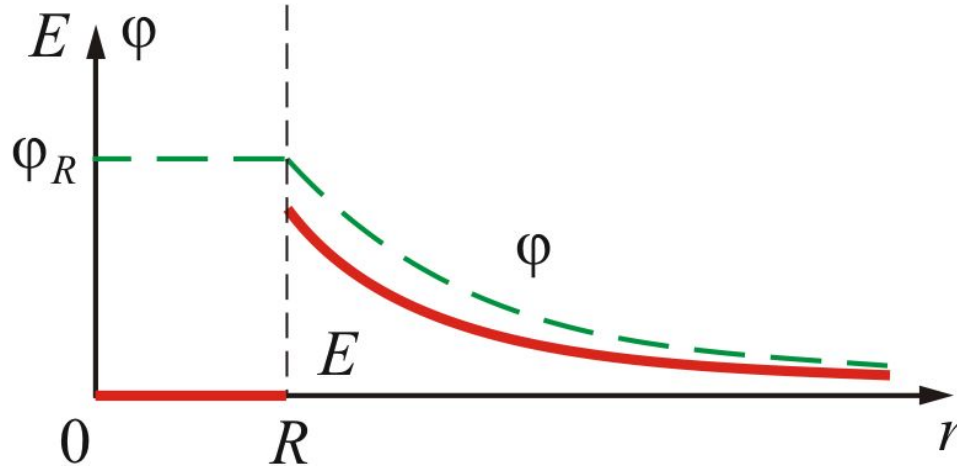
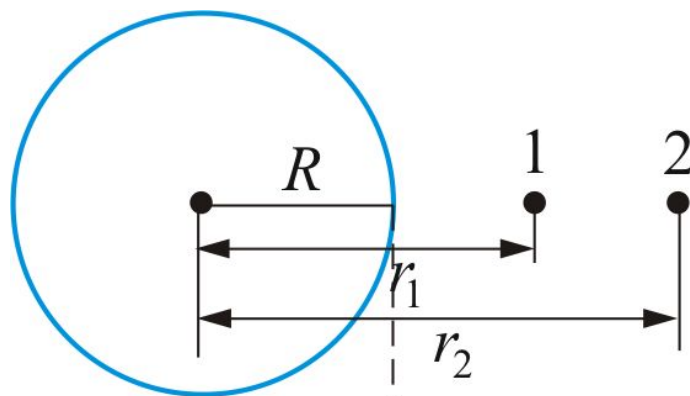
- Тогда, т.к. $d\varphi = -E dr$; $\int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$

- отсюда следует, что разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

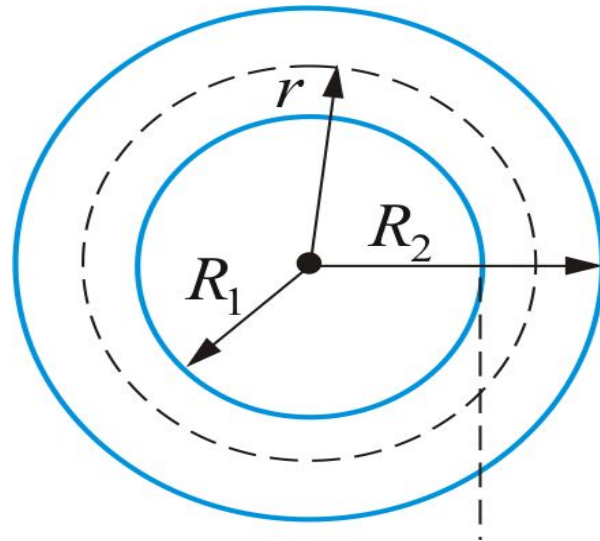
- $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}$

- $\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = \text{const} & \text{— внутри и на поверхности} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{— вне цилиндра.} \end{cases}$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = \text{const} & \text{— внутри и на поверхности} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} & \text{— вне цилиндра.} \end{cases}$$



Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора



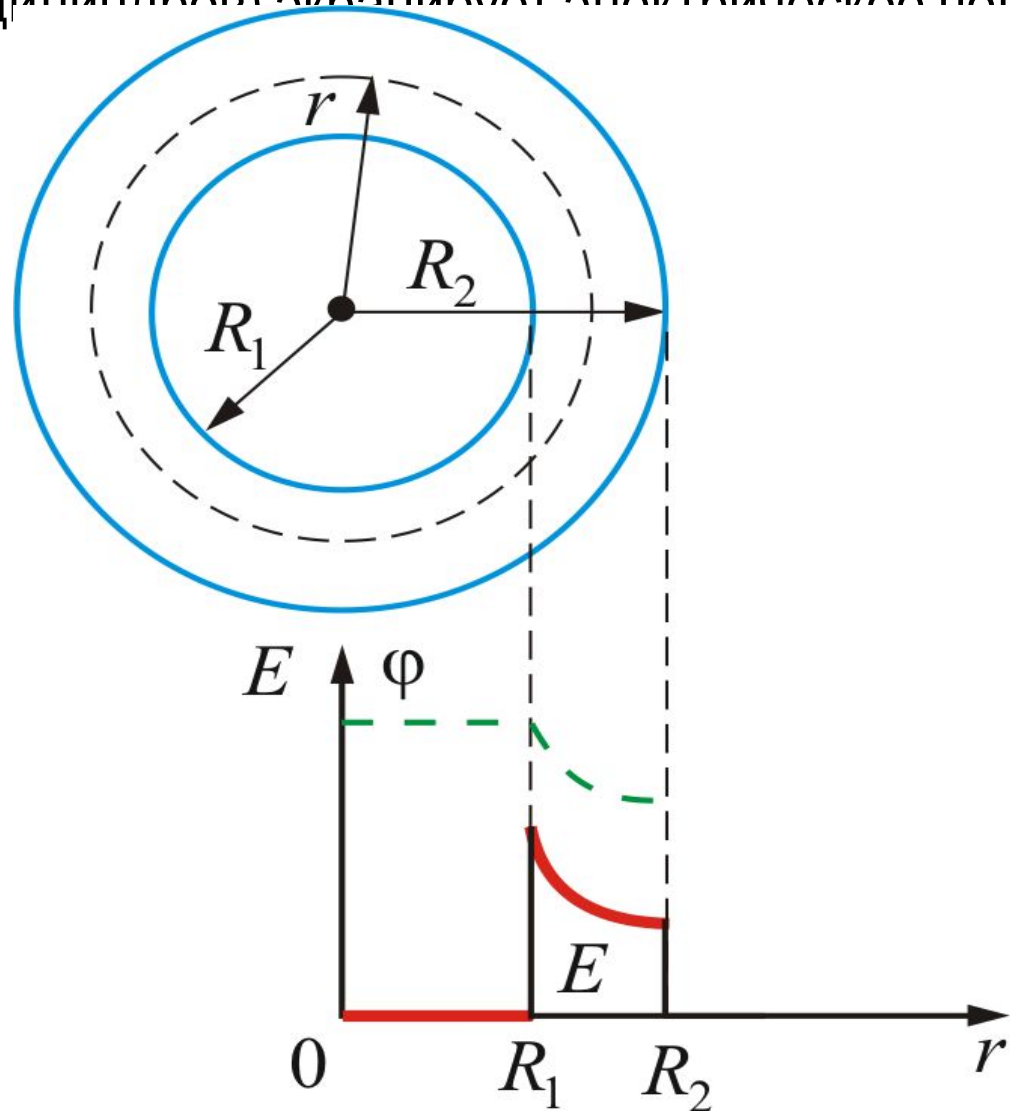
$$E = \begin{cases} 0 & \text{– внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} & \text{– между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2. \end{cases}$$

- Т.к. $d\varphi = -\vec{E}^{\circ}dr$

- $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$
-

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра } (r < R_1) \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2) \\ 0 - \text{вне цилиндров.} \end{cases}$$

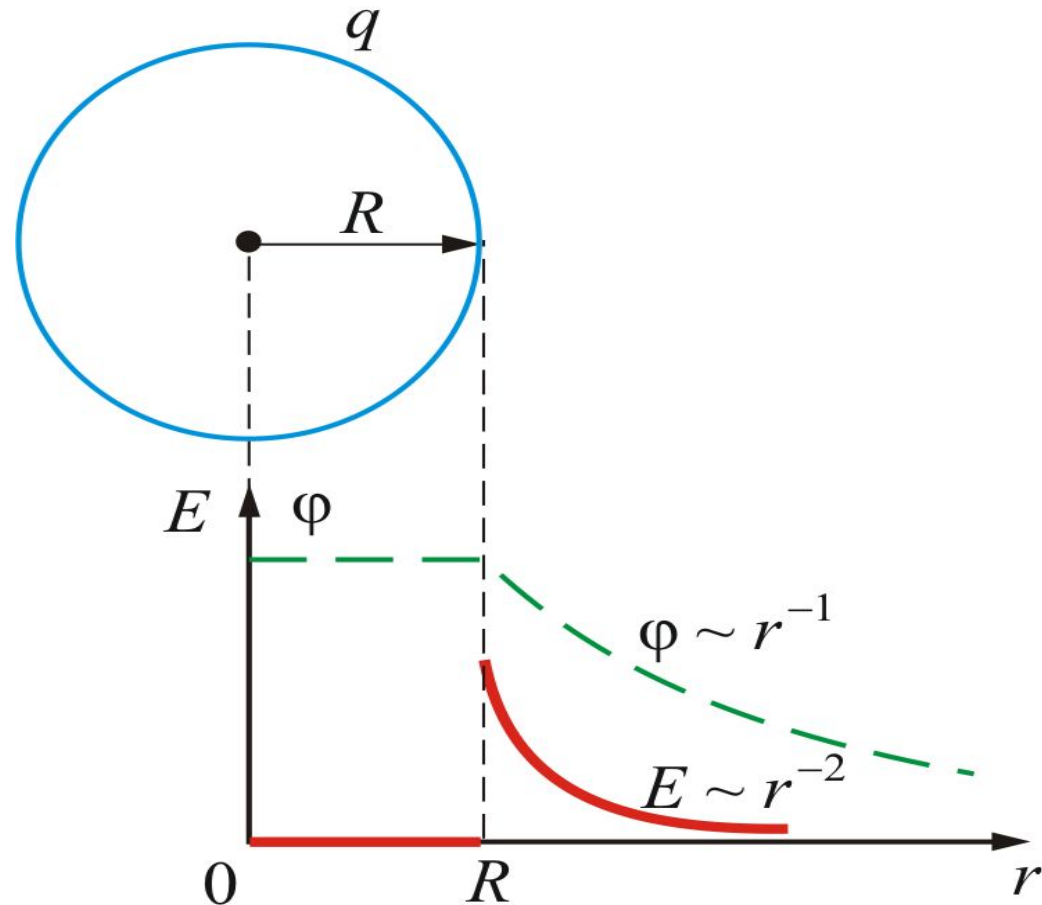
- Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем , $E = 0$, $\varphi = \text{const}$;
- между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону,
- вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и E равны нулю.



Разность потенциалов заряженной сферы (пустотелой)

- Напряженность поля сферы определяется формулой

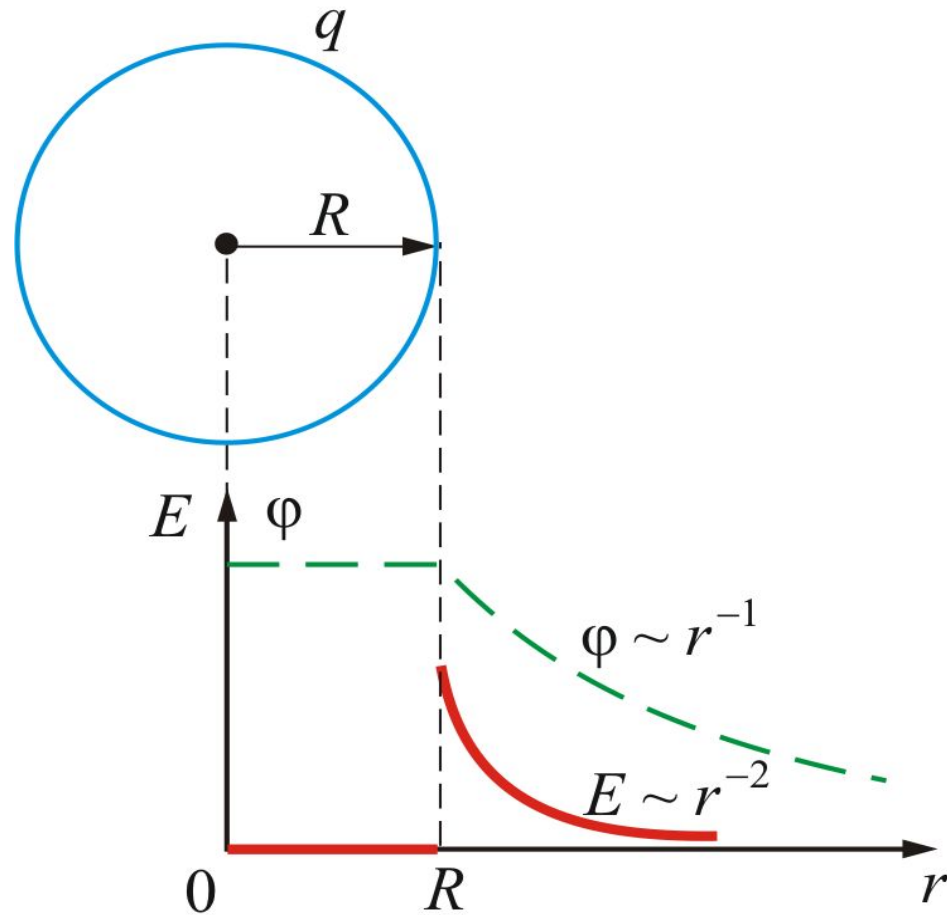
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



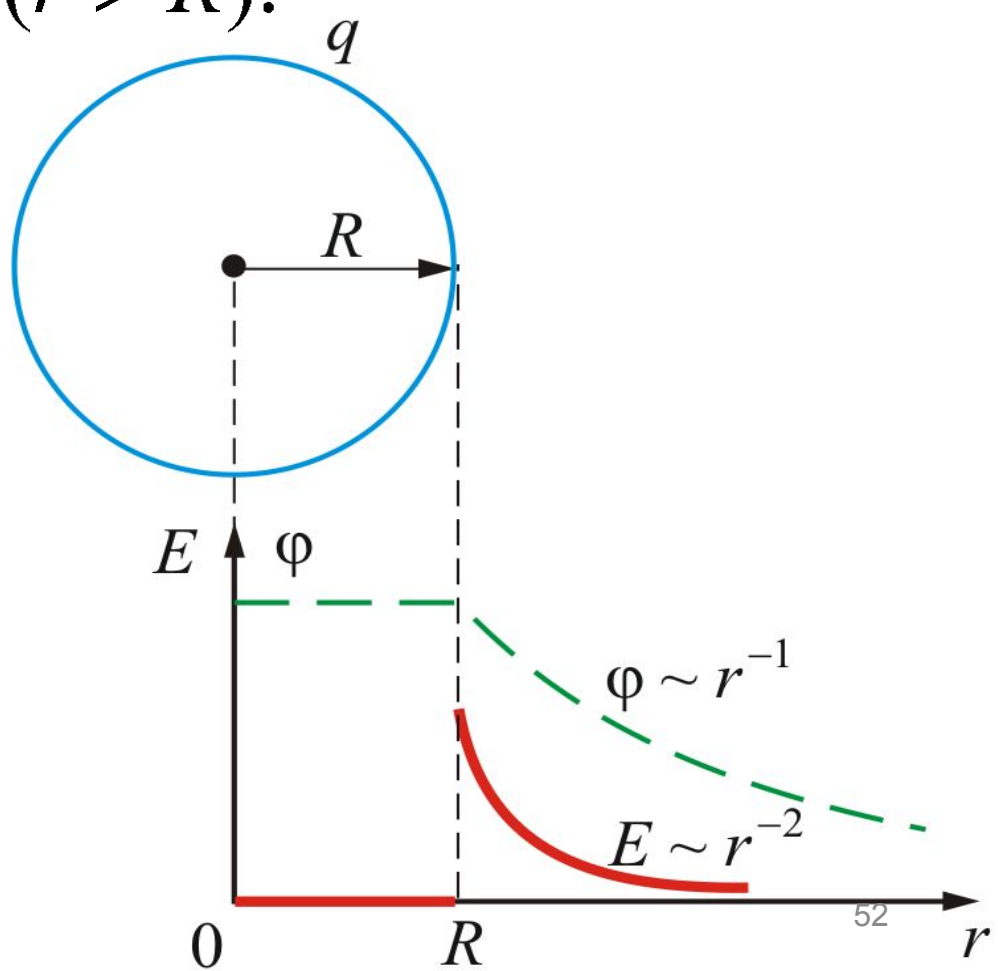
• Α τ.κ. $d\phi = -E dr$, το

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

T.e. $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$.



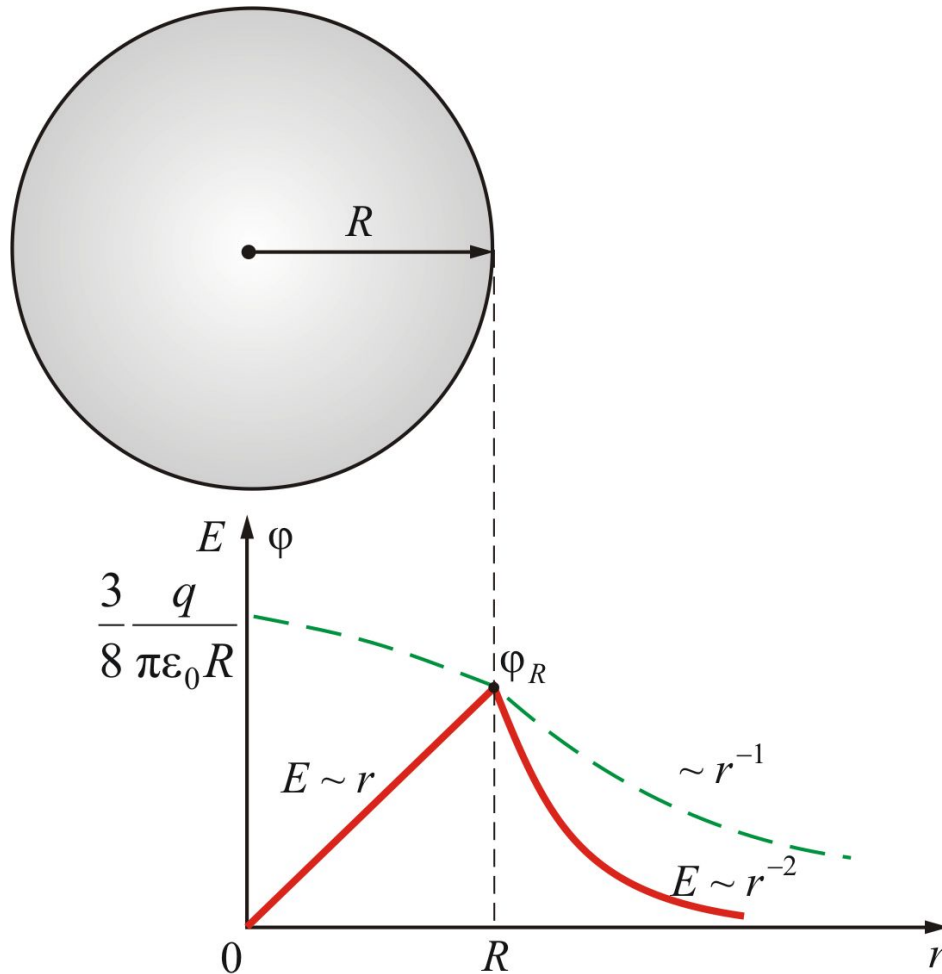
$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности.} \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$



Разность потенциалов внутри диэлектрического заряженного шара

- Имеем диэлектрический шар заряженный с объемной плотностью

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$



- **Напряженность поля шара**, вычисленная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:

- $$\vec{E} = \begin{cases} \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} & \text{— внутри шара } (r < R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & \text{— на поверхности шара } (r = R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{— вне шара } (r > R). \end{cases}$$

- Отсюда найдем разность потенциалов шара:

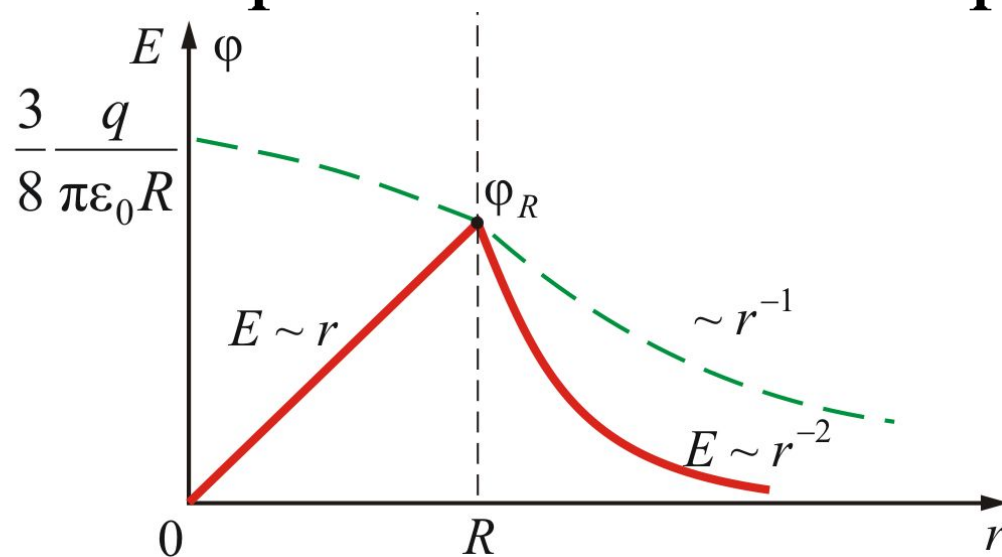
- $$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_1^2 r dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} (r_2^2 - r_1^2)$$

- или

- $$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\varepsilon_0 2R^3}.$$

• Потенциал шара:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} & \text{— в центре шара } (r = 0) \\ \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & \text{— внутри шара } (r \leq R) \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{— на поверхности и вне шара } (r \geq R) \end{cases}$$



- Из полученных соотношений можно сделать следующие **выводы**:
- *С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать E и φ от различных заряженных поверхностей.*
- *Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*
- *Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.*