Напряженность и потенциал

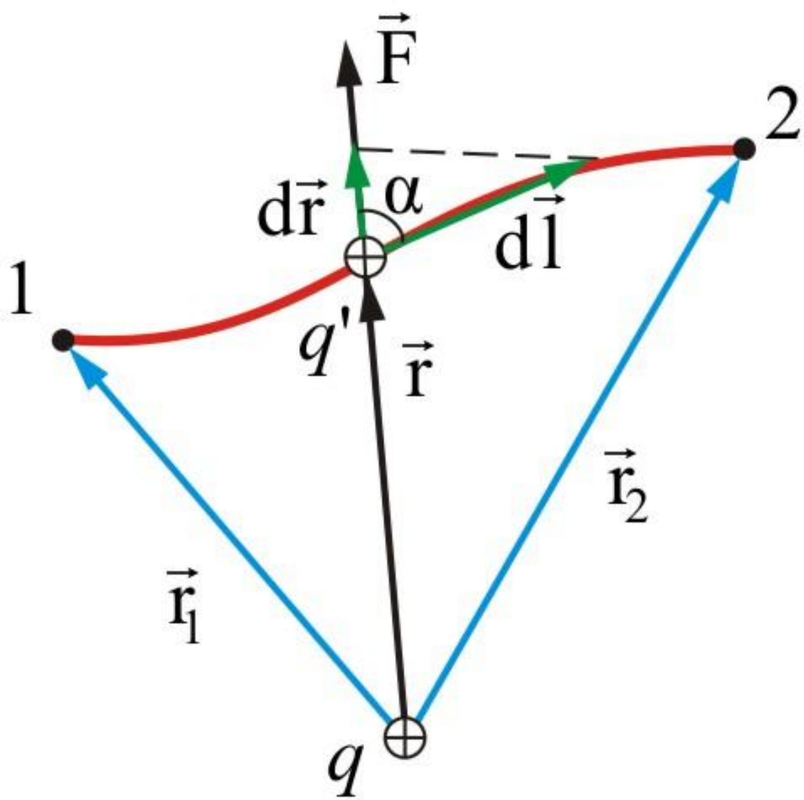
- В предыдущей теме было показано, что взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через ***электростатическое поле***. Описание электростатического поля мы рассматривали с помощью ***вектора напряженности*** $\vec{E}$, равного силе, действующей в данной точке на помещенный в неё пробный единичный положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

- *Существует и другой способ описания поля – с помощью* ***потенциала**.*
- Однако для этого необходимо сначала *доказать*, что ***силы*** электростатического поля ***консервативны***, а само *поле* ***потенциально***.

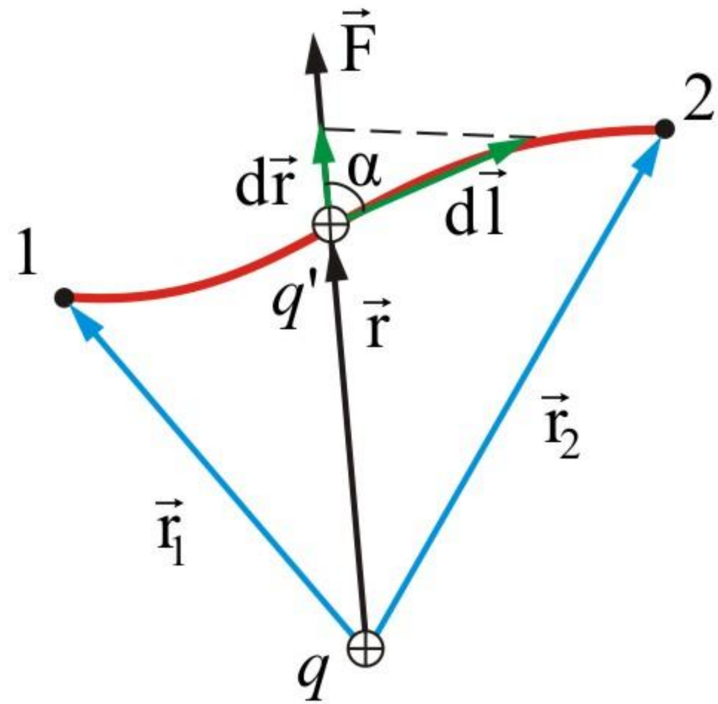
Работа сил электростатического поля.

- Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q.
- В любой точке этого поля на пробный точечный заряд q' действует сила F



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

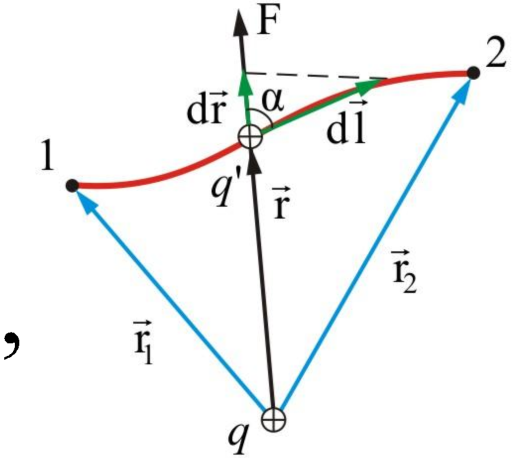
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$



- где $F(r)$ – модуль вектора силы , $\frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, определяющий положение заряда q относительно q', ε_0 – электрическая постоянная.

- Для того, чтобы доказать, что *электростатическое поле потенциально*, нужно доказать, что *силы электростатического поля консервативны.*
- Из раздела «Физические основы механики» известно, что *любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек.*

- Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом *q* по перемещению заряда *q'* из точки 1 в точку 2.



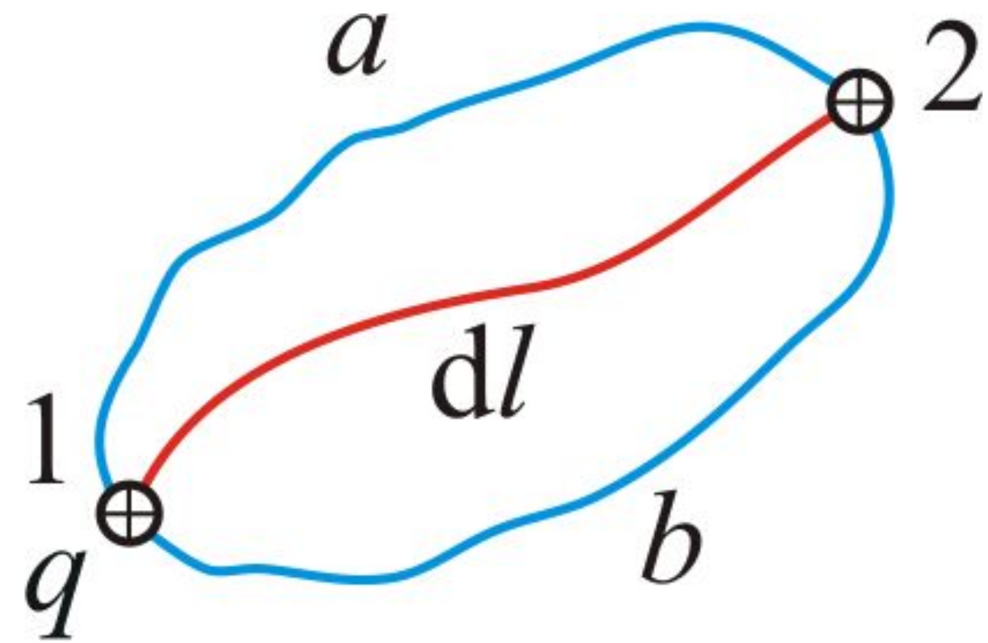
- Работа на отрезке пути d*l* равна:
-
$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\mathrm{d}l\cos\alpha,$$
-
- где d*r* – приращение радиус-вектора при перемещении на d*l*; $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\alpha,$
-
$$\mathrm{d}A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r.$$

- Полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна интегралу:
-

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

- ***Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения.*** *Следовательно, силы поля* ***консервативны****, а само поле –* ***потенциально.***

- Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 заданного поля в точку 2, взять положительный единичный заряд *q*, то элементарная работа сил поля будет равна:
- $$\mathrm{d}A = q\vec{\mathrm{E}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{l}}.$$



- Тогда вся работа равна: $A = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$
- Такой интеграл по замкнутому контуру называется ***циркуляцией вектора*** $\vec{E}$
- Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по *произвольному замкнутому пути*:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

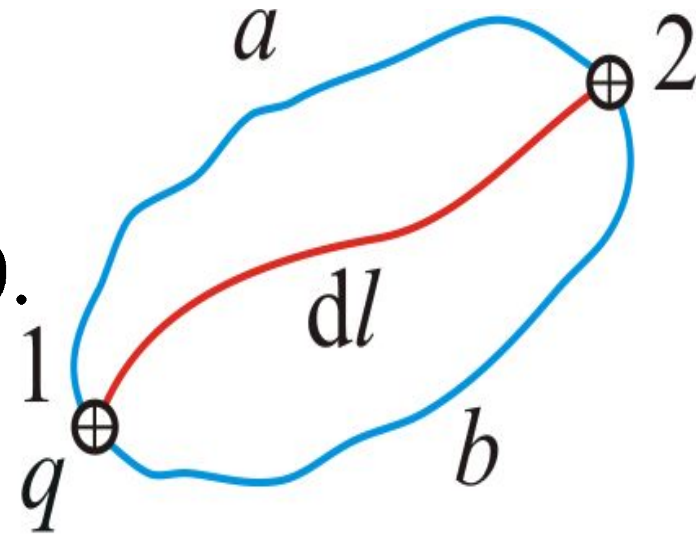
- ***теорема о циркуляции*** *вектора* $\vec{E}$ *.*

- Для доказательства теоремы разобьем произвольно замкнутый путь на две части: 1*a*2 и 2*b*1. Из сказанного выше следует, что

$$\int_1^2 E\mathrm{d}l = -\int_2^1 E\mathrm{d}l.$$

- (Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны). Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} - q\int_2^1 \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = 0.$$



- Теорема о циркуляции позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам.
- Рассмотрим простой пример, подтверждающий это заключение.
- *1)Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми*. В самом деле, если это не так, и какая-то линия $\vec{E}$ – замкнута, то, взяв циркуляцию вдоль этой линии, мы сразу же придем к противоречию с *теоремой о циркуляции вектора* $\vec{E}$: $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$.
- А в данном случае направление интегрирования в одну сторону, поэтому циркуляция вектора $\vec{E}$ не равна нулю.

Работа и потенциальная энергия

- ***электростатическое поле потенциально.***
- Следовательно, можно ввести функцию состояния, зависящую от координат – ***потенциальную энергию***.

- Исходя из принципа суперпозиции сил ,

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$$

- можно показать, что общая работа *A* будет равна сумме работ каждой силы:

$$A = \sum_k A_k .$$

- *Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма*.

- ***Работу***

  через убыль потенциальной энергии – разность двух функций состояний:

$$A_{12}=W_1-W_2.$$

Это выражение для работы можно переписать в виде:

- $$A_{12}=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1}-\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

- Сопоставляя формулу получаем ***выражение для потенциальной энергии*** заряда *q'* в поле заряда *q*:

- $$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}$$

Потенциал. Разность потенциалов

- Разные пробные заряды $q', q'', \ldots$ будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями W', W'' и так далее. Однако отношение $W/q'_{\text{пр.}}$ будет для всех зарядов одним и тем же.
- *Поэтому можно вести* ***скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой поля – потенциал**:*
- $$\varphi = \frac{W}{q'}.$$

- Подставив в выражение для потенциала значение потенциальной энергии , получим выражение для ***потенциала точечного заряда***:
- $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$
- Потенциал, как и потенциальная энергия, определяют с точностью до постоянной интегрирования.

- физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что ***потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю***.
- Когда говорят «потенциал такой-то точки» – имеют в виду *разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность.*

- Другое определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} \quad \text{или} \quad A_\infty = q\varphi$$

- *т.е. потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность*
- (*или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля*).
- При этом $\varphi > 0$, если $q > 0$.

- Если поле создается системой зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получаем:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k q'}{r_k}.$$

- Тогда и для потенциала $\varphi = \sum_k \varphi_k$ или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k}{r_k}$$

- *т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.*
- *А вот напряженности складываются при наложении полей – векторно.*

- Выразим работу сил электростатического поля через разность потенциалов между начальной и конечной точками:
- $$A_{12} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$
- Таким образом, работа над зарядом *q* равна произведению заряда на убыль потенциала:
- $$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU,$$
- где *U – напряжение*.

$$A = qU$$

- Формулу $A_\infty = q\varphi$ можно использовать для установления единиц потенциала:

за единицу потенциала *принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу равную единице.*

$$1\,\text{В} = 1\,\text{Дж}/1\,\text{Кл}$$

- В СИ единица потенциала

Электрон - вольт (эВ) – *это ,*
совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона ***при***

1 В, то есть:

$$1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot \text{В} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Производными единицами эВ являются МэВ, ГэВ и ТэВ:

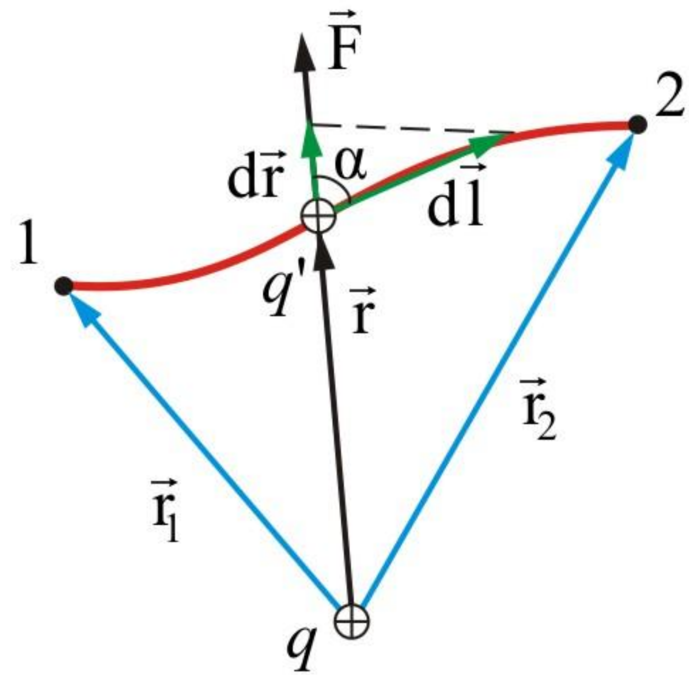
$$1\ \text{МэВ} = 10^{6}\ \text{эВ} = 1{,}60 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж},$$

$$1\ \text{ГэВ} = 10^{9}\ \text{эВ} = 1{,}60 \cdot 10^{-10}\ \text{Дж},$$

$$1\ \text{ТэВ} = 10^{12}\ \text{эВ} = 1{,}60 \cdot 10^{-7}\ \text{Дж}.$$

Связь между напряженностью и потенциалом

- Изобразим перемещение заряда *q*` по произвольному пути *l* в электростатическом поле .



- Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке $d\vec{l}$ можно найти так:
- $$dA = F_l \mathrm{d}l = E_l q \mathrm{d}l,$$

$$\mathrm{d}A = F_l \mathrm{d}l = E_l q \mathrm{d}l,$$

- С другой стороны, эта работа, равна убыли потенциальной энергии заряда, перемещенного на расстоянии d*l*:
-
- $$\mathrm{d}A = -q\mathrm{d}\varphi; \quad \text{\textit{тогда}}$$

$$E_l q \mathrm{d}l = -q\mathrm{d}\varphi$$

- отсюда

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}.$$

- Для ориентации d/ (направление перемещения) в пространстве, надо знать проекции на оси координат:
-
- $$\boxed{\vec{\mathrm{E}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},}$$
- Определение градиента: ***сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть градиент этой функции***
-
-
- $$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

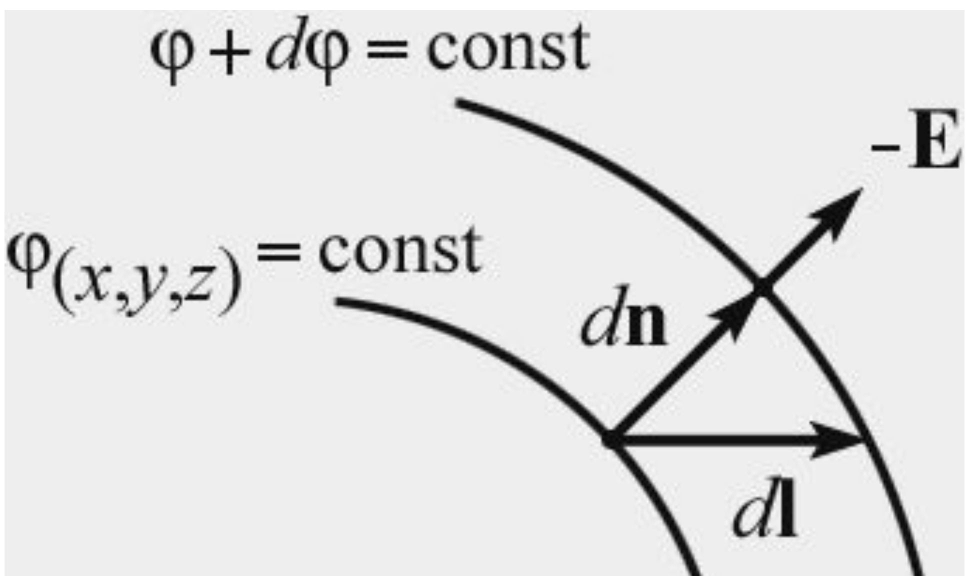
$\operatorname{grad}\varphi$ ***– вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции.***

- Коротко связь между $\vec{E}$ и φ записывается так:
- $$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$
- или так:
- $$\vec{E} = -\nabla\varphi$$
- где ∇ (набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона
- Знак минус говорит о том, что вектор направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

Вектор напряженности электрического поля E направлен против направления наискорейшего роста потенциала:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dn}\vec{n}$$

n – единичный вектор нормали к эквипотенциальной поверхности ϕ = const



Безвихревой характер электростатического поля

- Из условия $\vec{E} = -\nabla\varphi$ следует одно важное соотношение, а именно, ***величина, векторного произведения*** $[\nabla, \vec{E}]$ ***для стационарных электрических полей всегда равна нулю***. Действительно, по определению, имеем
- $$[\nabla, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \varphi = 0$$
- поскольку определитель содержит две одинаковые строки.

- *Величина* $[\nabla, \vec{E}]$ *называется* ***ротором*** *или* ***вихрем***

- Мы получаем ***важнейшее уравнение электростатики***:

- $$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

электростатическое поле – безвихревое.

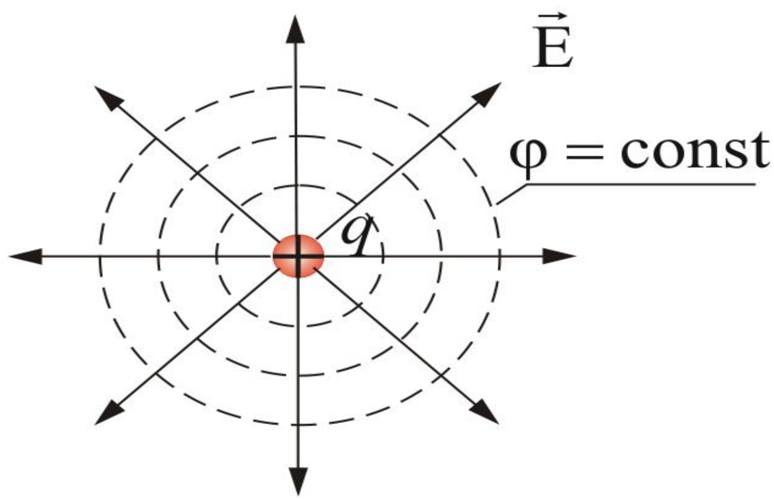
- Согласно теореме Стокса, присутствует следующая связь между контурным и поверхностным интегралами:
- $$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_S \operatorname{rot}\vec{E} d\vec{S} = 0$$
- где контур *L* ограничивающий поверхность *S* ориентация которой определяется $\vec{n}$ направлением вектора положительной нормали : $d\vec{S} = \vec{n} dS$
- Поэтому ***работа при перемещении заряда по любому замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю.***

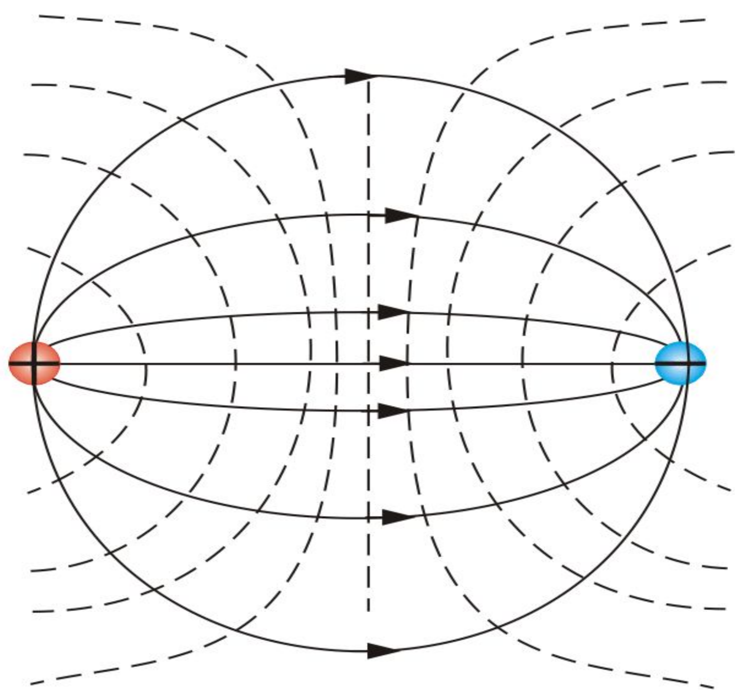
Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

- Направление *силовой линии* (линии напряженности) в каждой точке совпадает с направлением $\vec{E}$.
- *Отсюда следует, что* ***напряженность равна разности потенциалов U на единицу длины силовой линии*****.**
- Именно вдоль силовой линии происходит максимальное изменение потенциала. Поэтому всегда можно определить φ между двумя точками, измеряя *U* между ними, причем тем точнее, чем ближе точки.
- ***В однородном электрическом поле*** силовые линии – прямые. Поэтому здесь определить $\vec{E}$ наиболее просто:
-

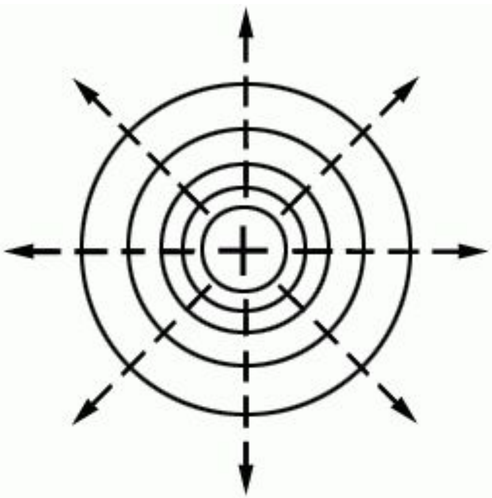
$$E = \frac{U}{l}$$

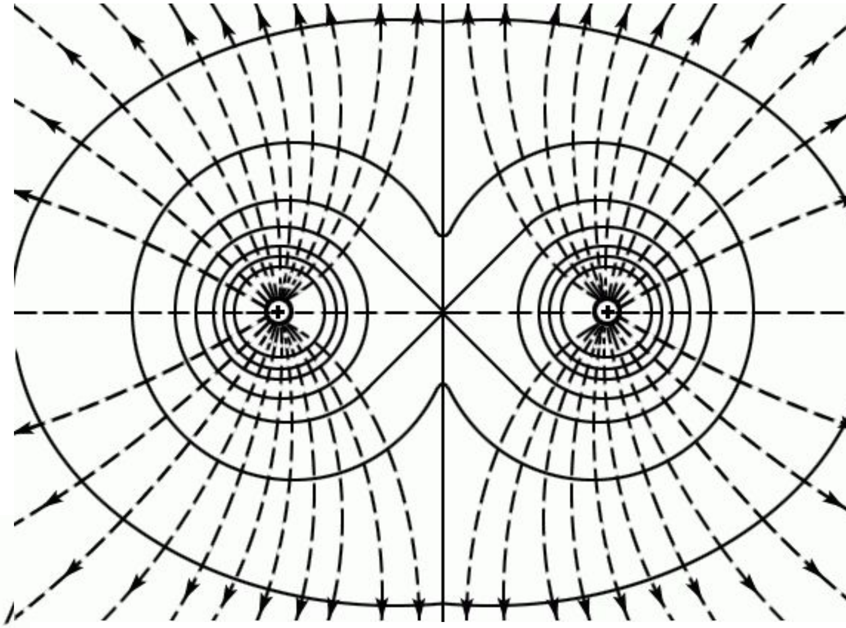
- *Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется* ***эквипотенциальной поверхностью.***
- Уравнение этой поверхности
- $$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

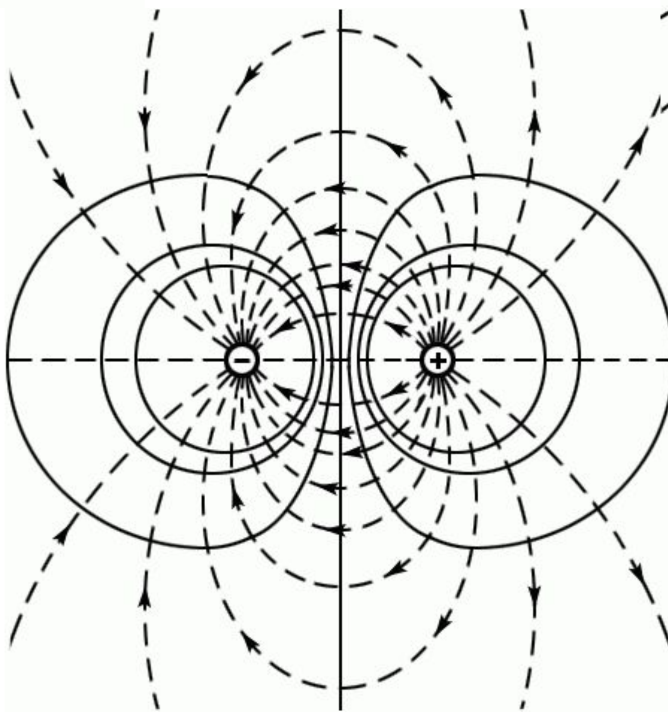




Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны







- Формула $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке.

- Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям $\vec{E}$ в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

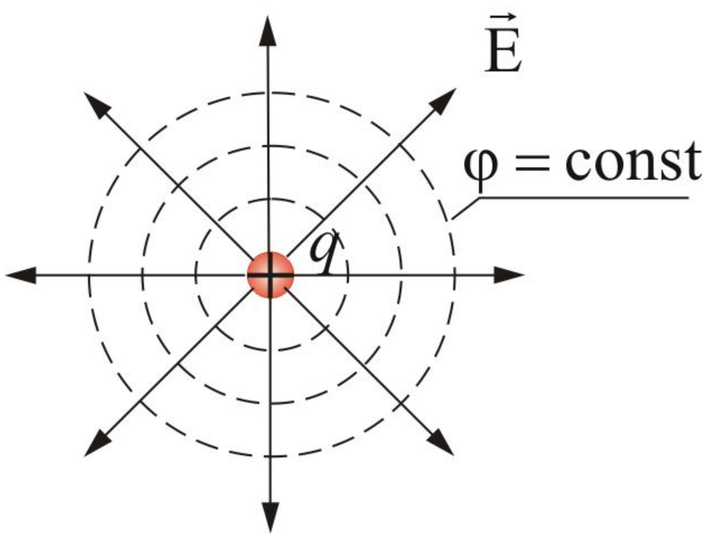
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

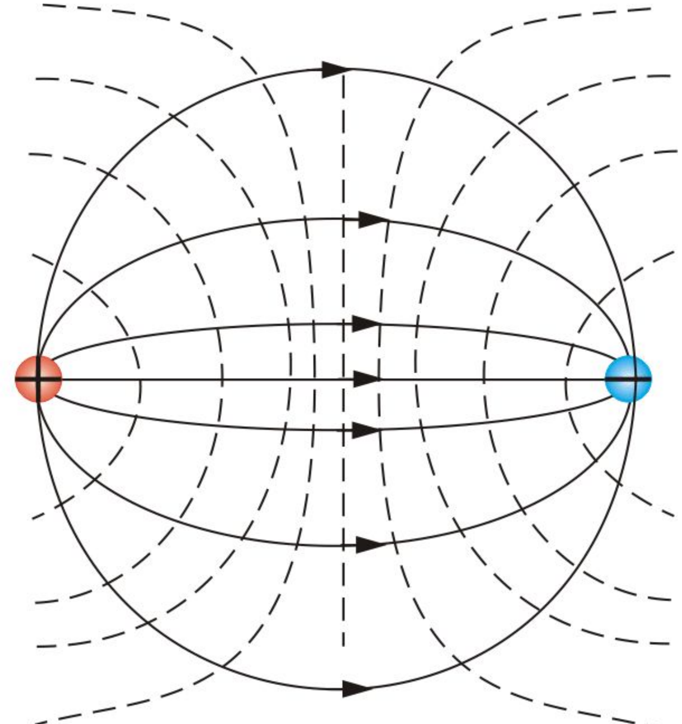
- Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути.
- Для обхода по замкнутому контуру получим: $\varphi_1 = \varphi_2$
- т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности: *циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0,$$

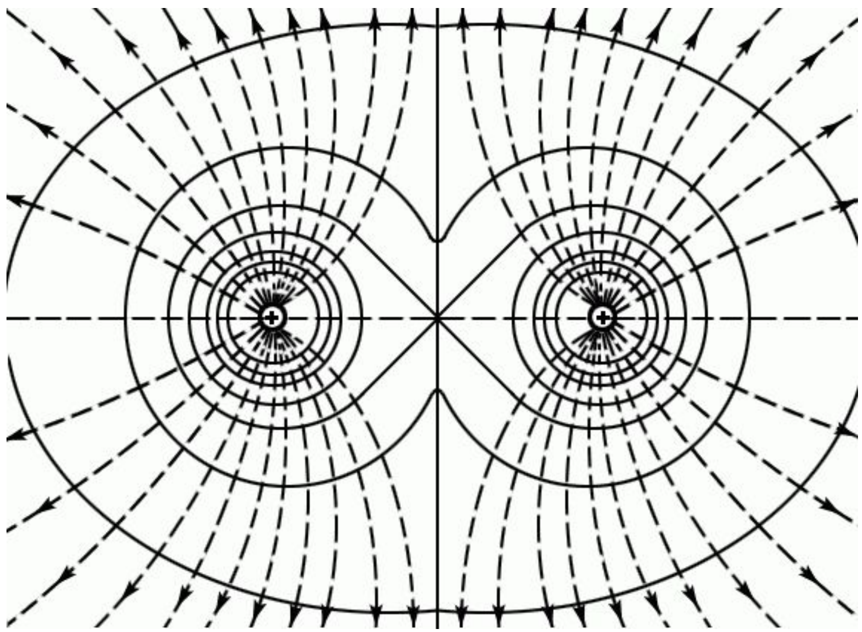
Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.

- *Из обращения в нуль циркуляции вектора следует, что линии электростатического поля* ***не могут быть замкнутыми****: они начинаются на положительных зарядах (****истоки****) и на отрицательных зарядах заканчиваются (****стоки****) или уходят в бесконечность*





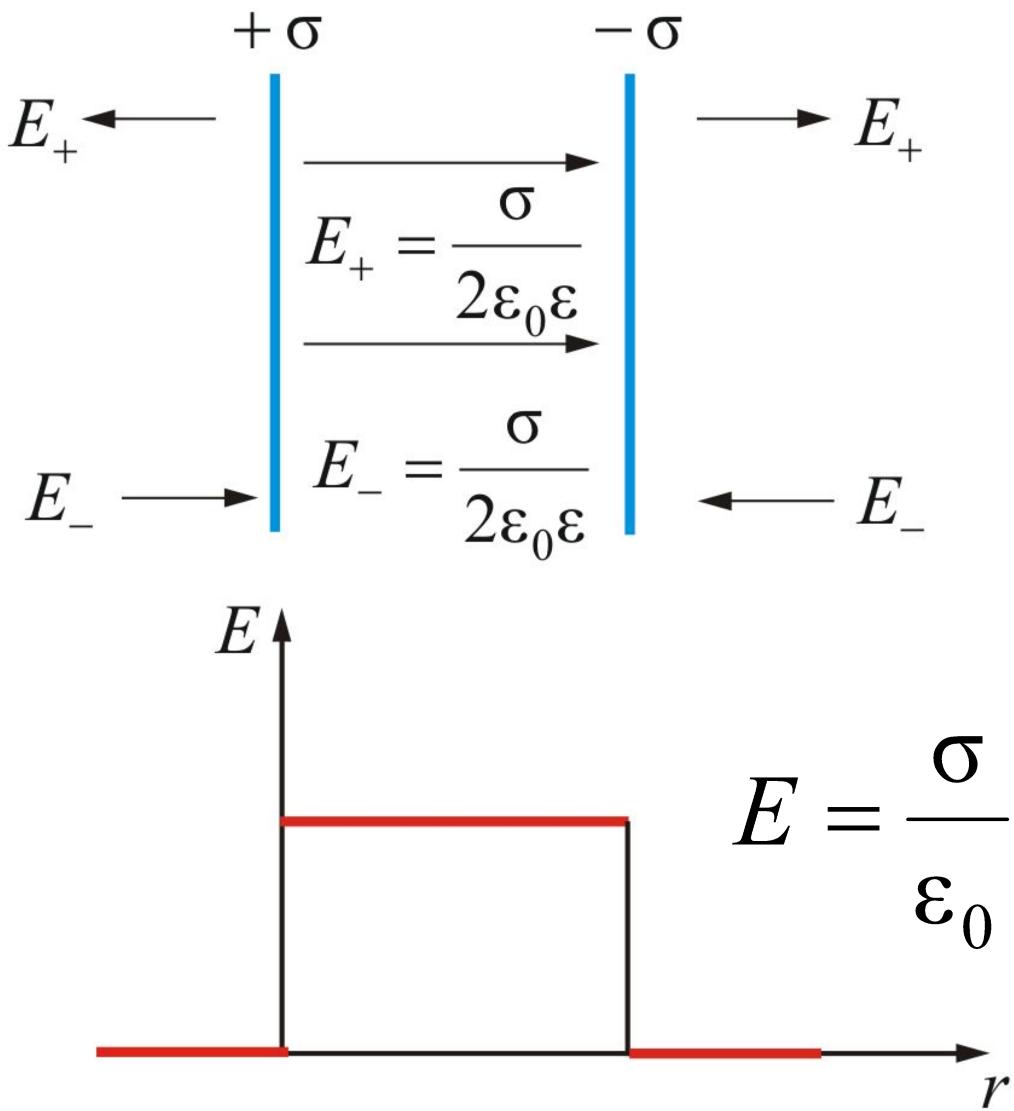
Там, где расстояние между эквипотенциальными поверхностями мало, напряженность поля наибольшая. Наибольшее электрическое поле в воздухе при атмосферном давлении достигает около 10^6 В/м.



Расчет потенциалов простейших электростатических полей

- Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами

Разность потенциалов между двумя бесконечными заряженными плоскостями



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- Мы показали, что напряженность связана с потенциалом
- $$E = -\frac{d\varphi}{dl},$$ отсюда $$d\varphi = -E\,dl$$
-

- где $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ – напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями
- σ = *q*/*S* – поверхностная плотность заряда.

- Чтобы получить выражение для потенциала между плоскостями, проинтегрируем выражение $\mathrm{d}\varphi = -E\mathrm{d}l$
- $$\int_1^2 \mathrm{d}\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x;$$
-
-
- $$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(x_2 - x_1\right)$$
-

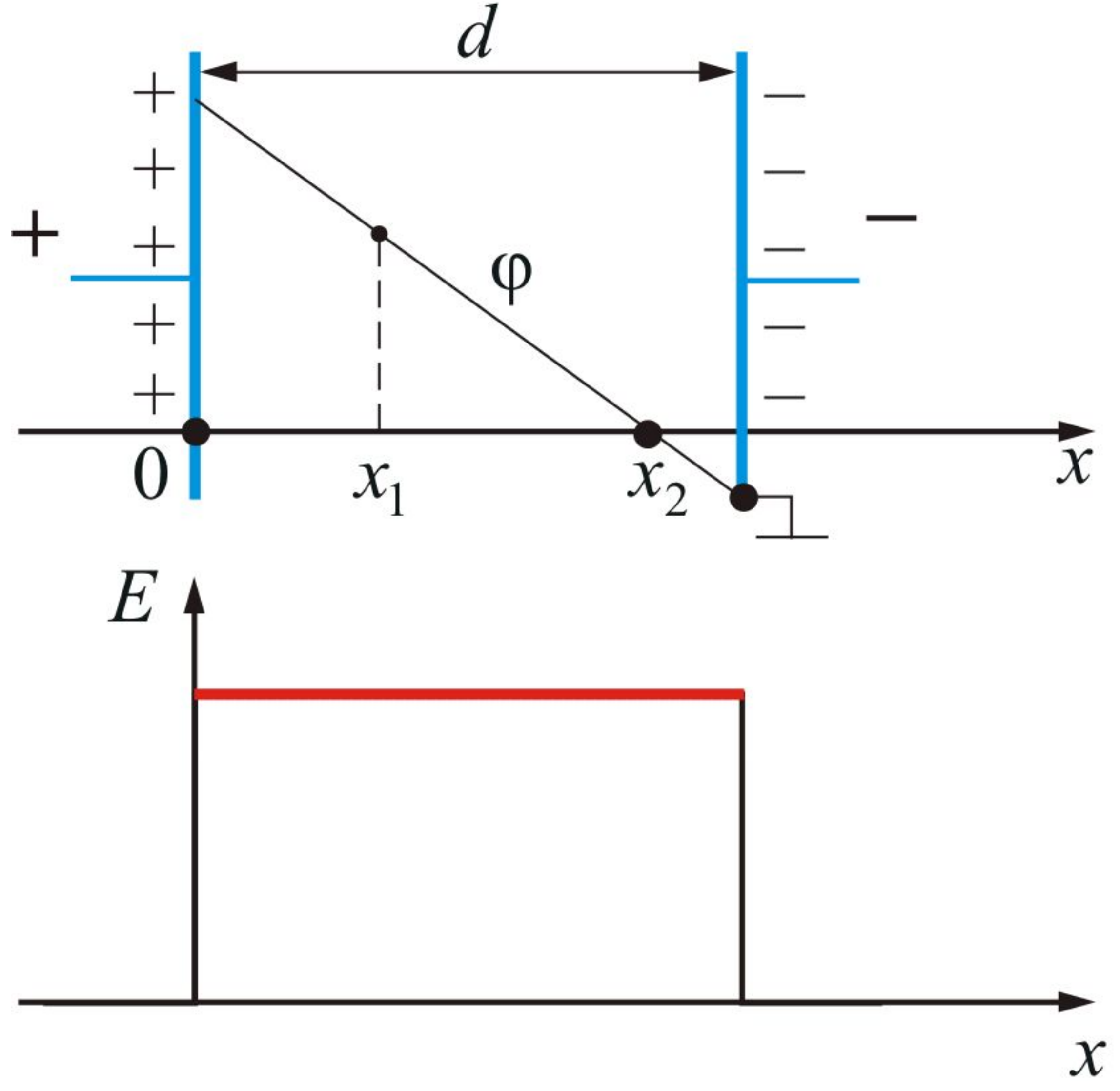
При $x_1 = 0$ и $x_2 = d$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

- На рисунке изображена зависимость напряженности *E* и потенциала φ от расстояния между плоскостями.

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Разность потенциалов между точками поля, образованного бесконечно длинной цилиндрической поверхностью

- С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра.} \end{cases}$$

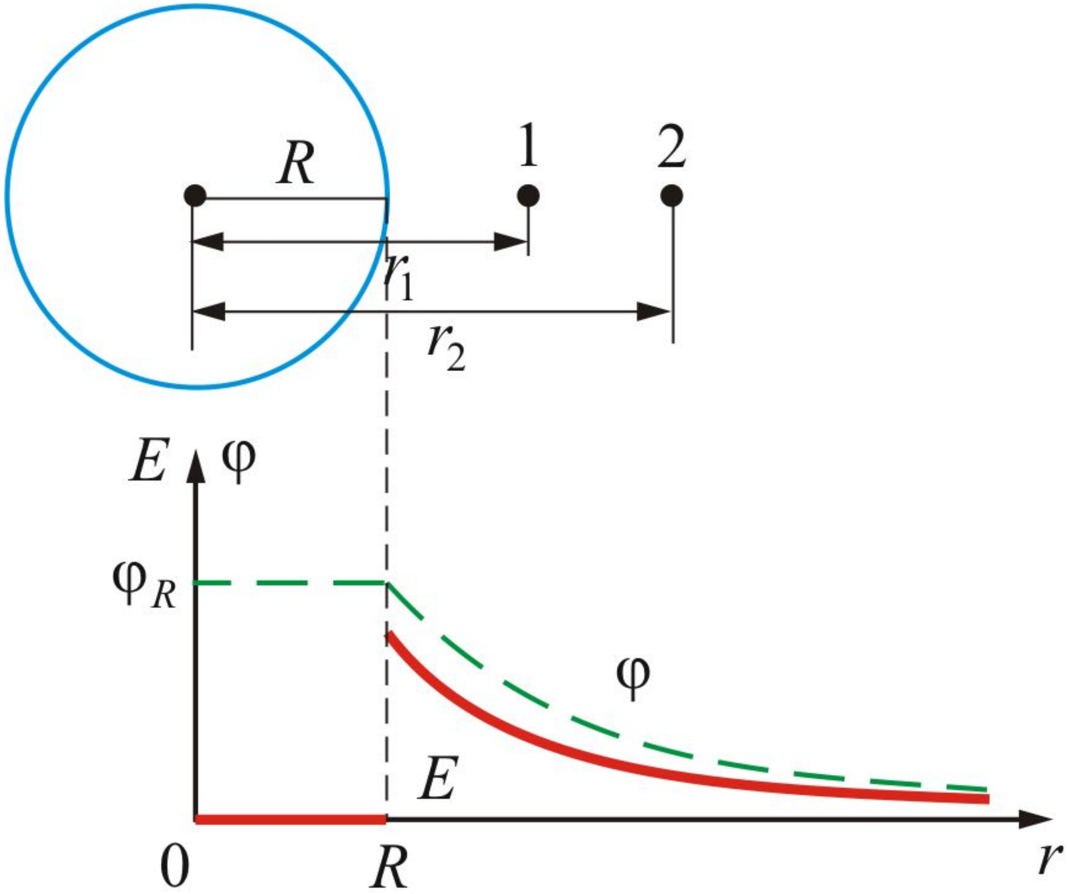
- Тогда,т.к. $d\varphi = -E dr;\quad \int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$

- отсюда следует, что разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

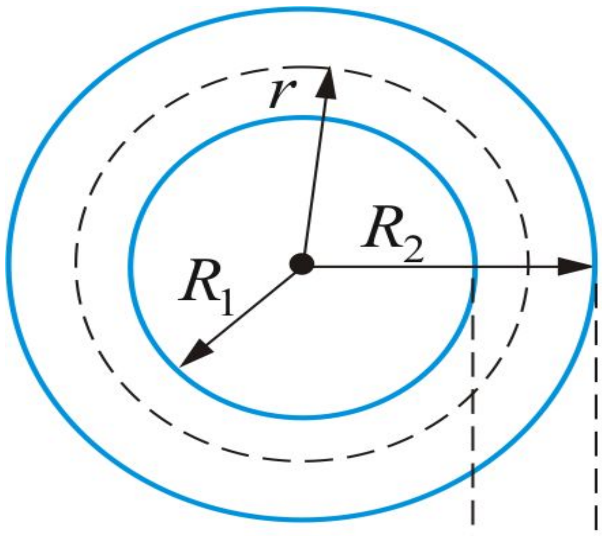
- $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}$

- $\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{R} = \text{const} - \text{внутри и на поверхност}\\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R} \ - \text{вне цилиндра.} \end{cases}$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R} = \text{const} - \text{внутри и на поверхн} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} \quad - \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$



Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора

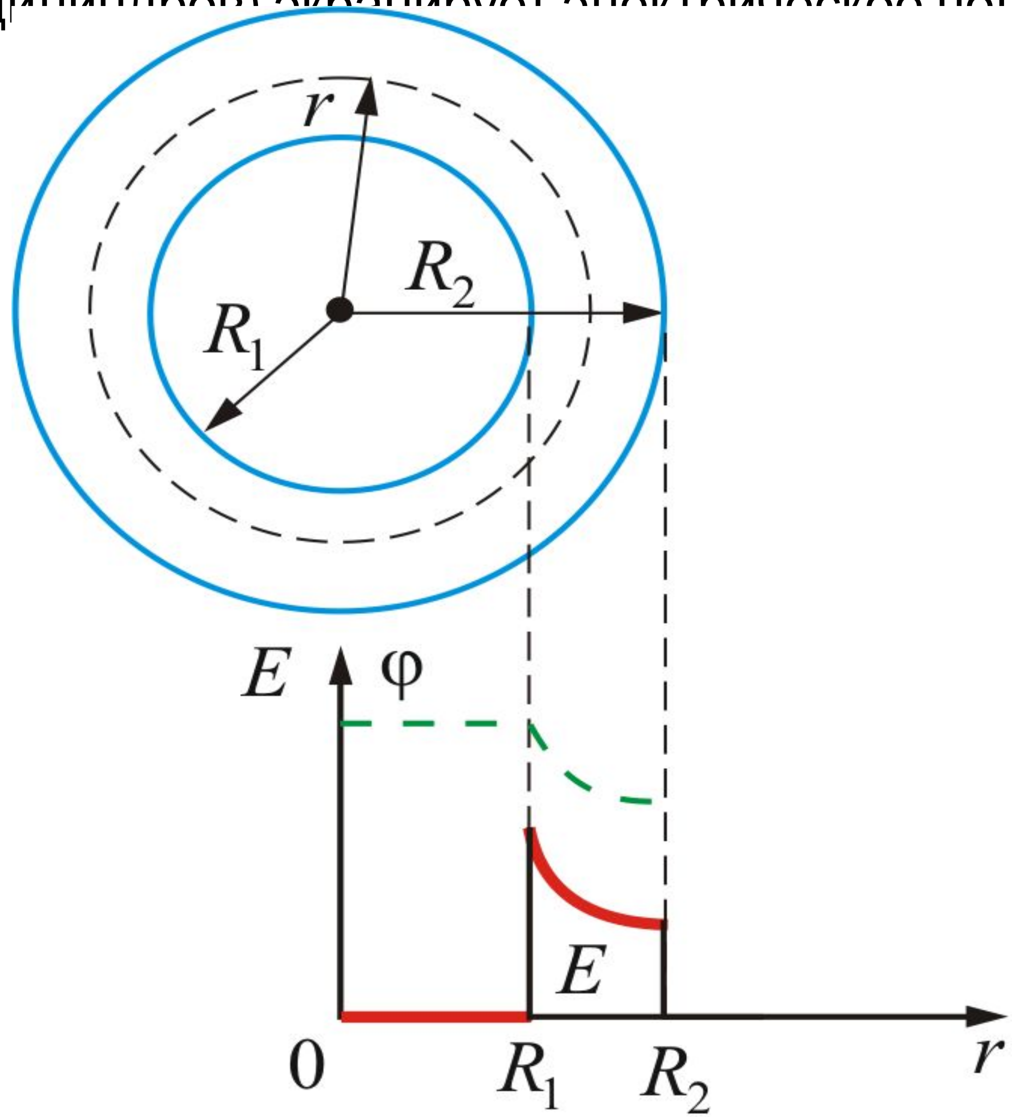


$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2. \end{cases}$$

- Т.к. $\mathrm{d}\varphi = -E\,\mathrm{d}r$, то
- $$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$
-

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра } (r < R_1) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2) \\ 0 \;-\; \text{вне цилиндров.} \end{cases}$$

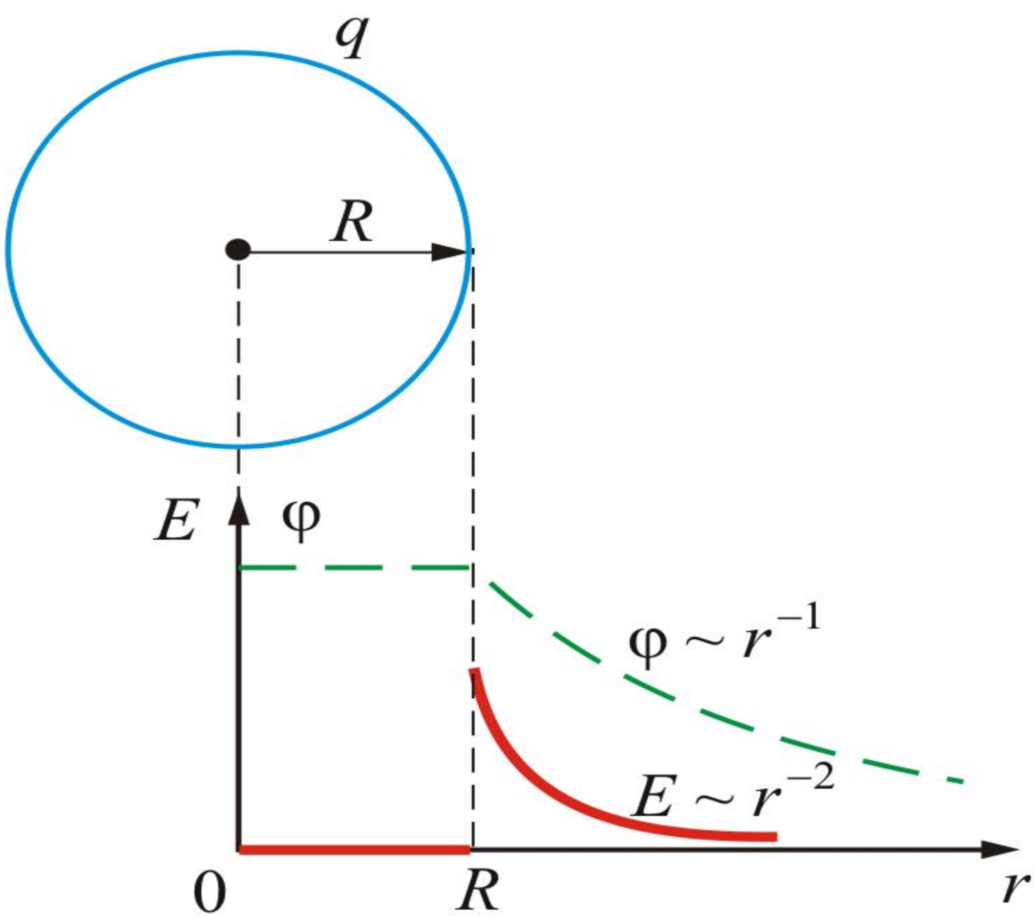
- Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем , $E = 0$, $\varphi = \text{const}$;
- между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону,
- вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и E равны нулю.



Разность потенциалов заряженной сферы (пустотелой)

- Напряженность поля сферы определяется формулой

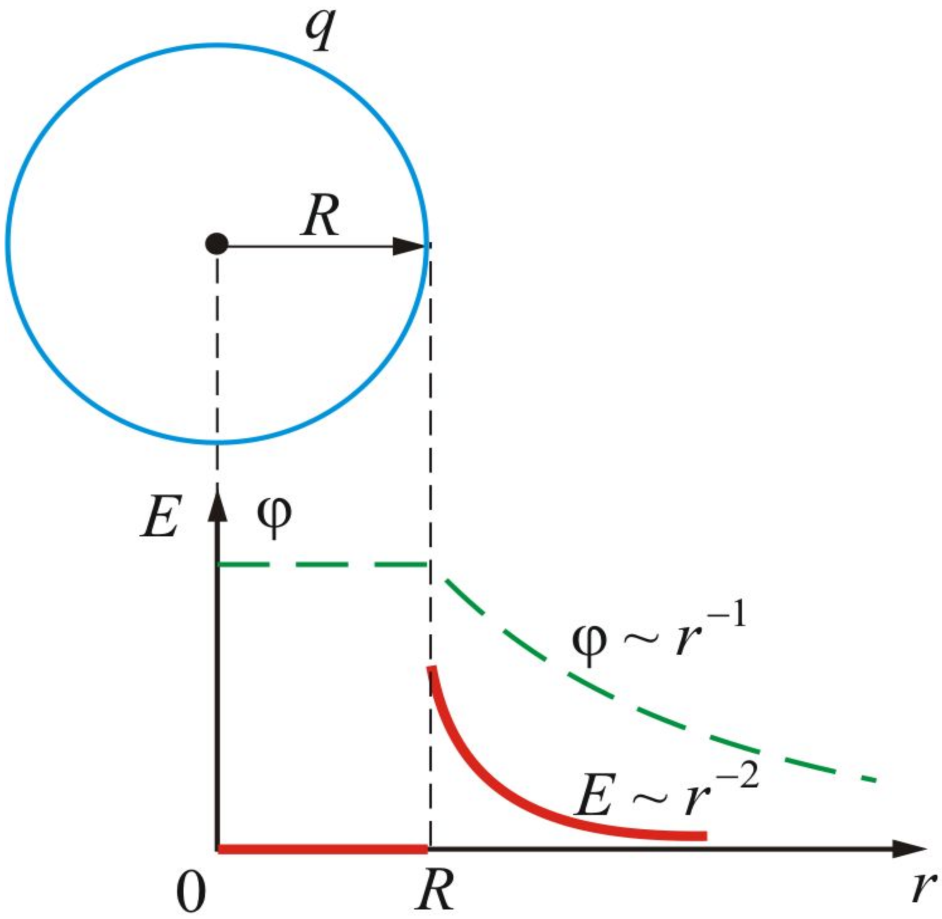
$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



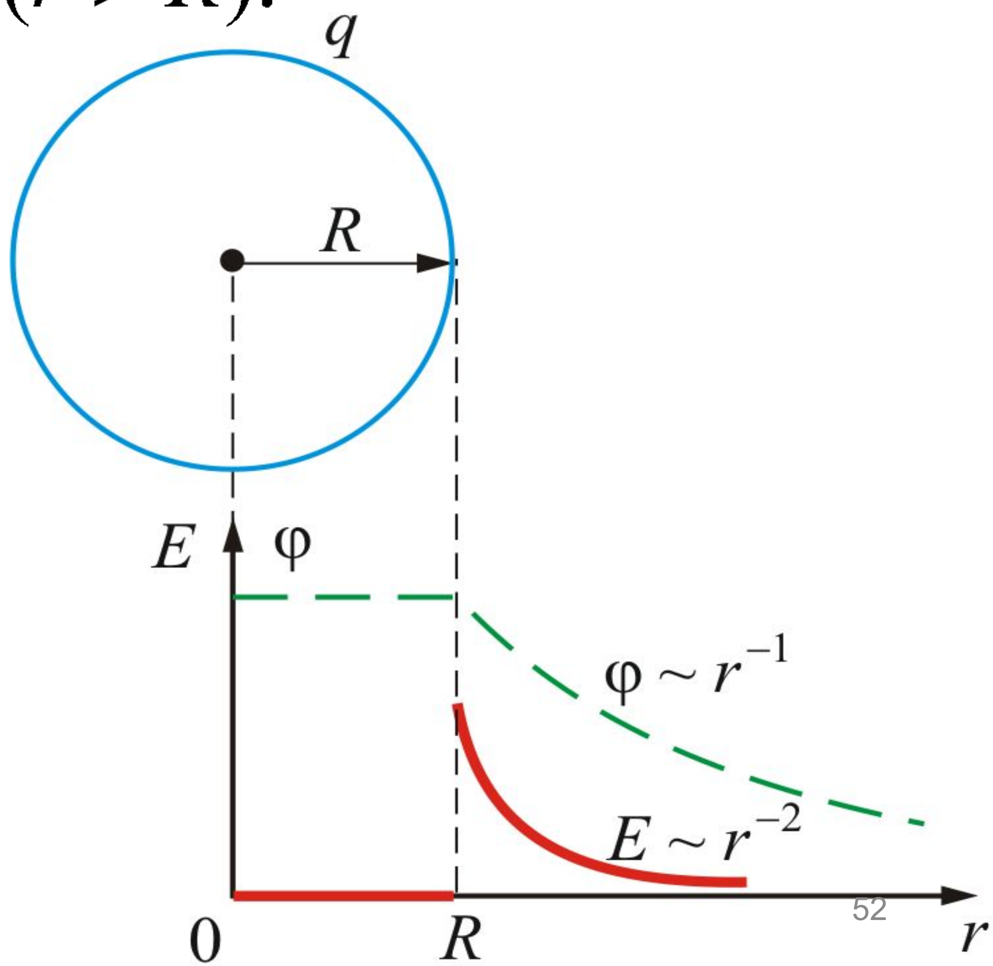
- А т.к. $\mathrm{d}\varphi = -E\mathrm{d}r$, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

т.е. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.



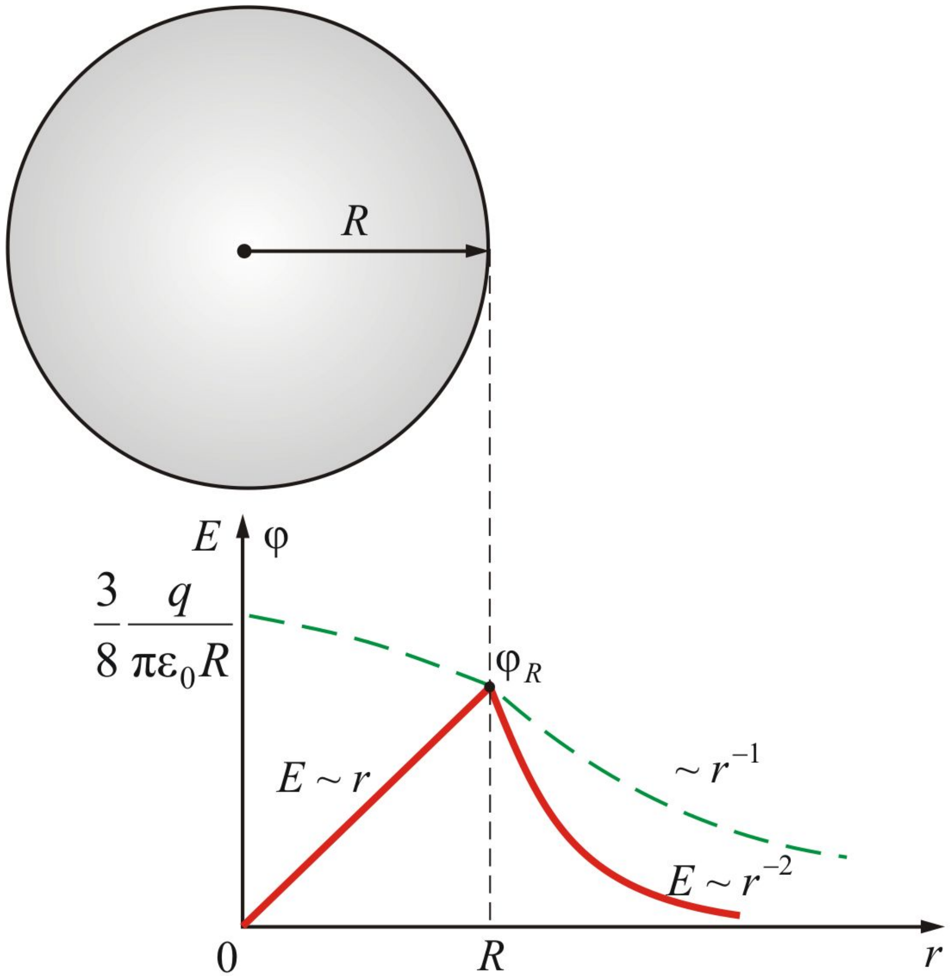
$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхн.} \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$



Разность потенциалов внутри диэлектрического заряженного шара

- Имеем диэлектрический шар заряженный с объемной плотностью

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$



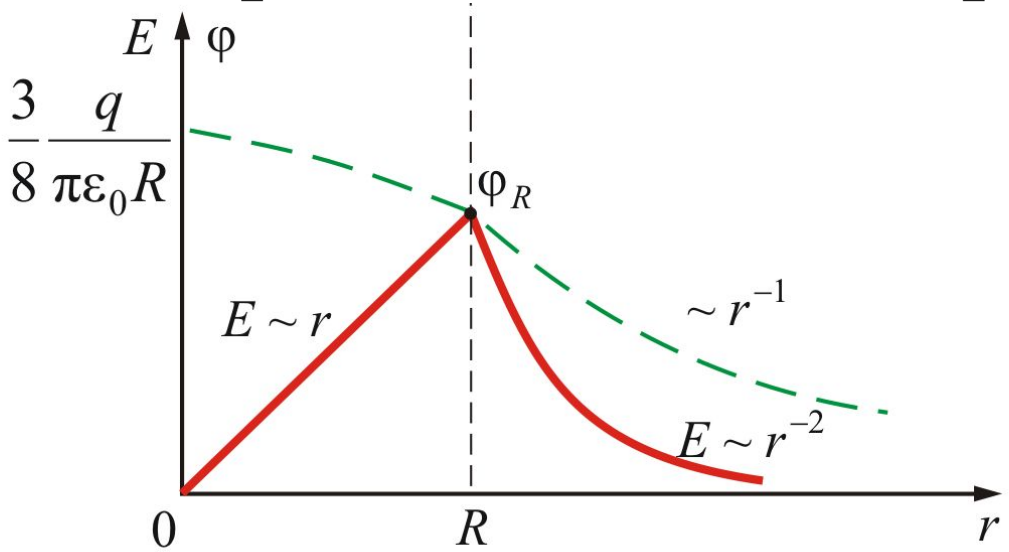
- Напряженность поля шара, вычисленная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:

$$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара} (r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара} (r = R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара} \ (r > R). \end{cases}$$

- Отсюда найдем разность потенциалов шара:
- $$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_1^2 r\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$
- или
- $$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\varepsilon_0 2R^3}.$$

- Потенциал шара:

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r = 0) \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) - \text{внутри шара } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{на поверхности и вне шара} (r \ge R \end{cases}$$



- Из полученных соотношений можно сделать следующие ***выводы:***

- *С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать Е и φ от различных заряженных поверхностей.*

- *Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*

- *Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.*