Непрерывность функции
в точке и на множестве.
Асимптоты графика функции.

Проиллюстрируем непрерывность функции $y = f(x)$ на примерах с помощью ее графика.

ПРИМЕР

1. На рисунке 38.1 изображен график непрерывной функции

$$y = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ если } x > 4, \\ (0{,}25x)^2, \text{ если } x \leq 4. \end{cases}$$

Функции, изображенные на рисунках 38.2, 38.4 не являются непрерывными на множестве R.

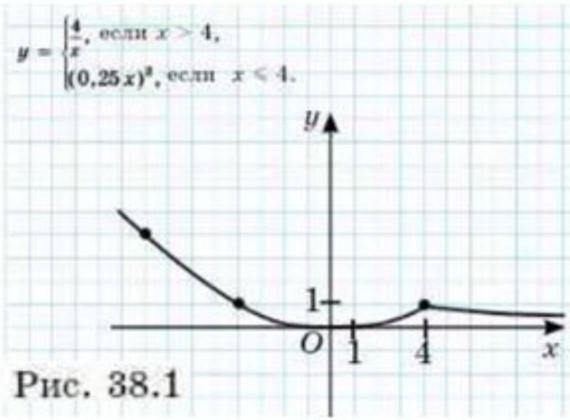


Рис. 38.1

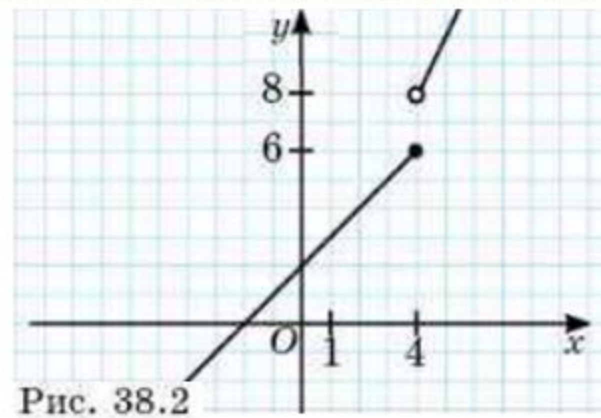


Рис. 38.2

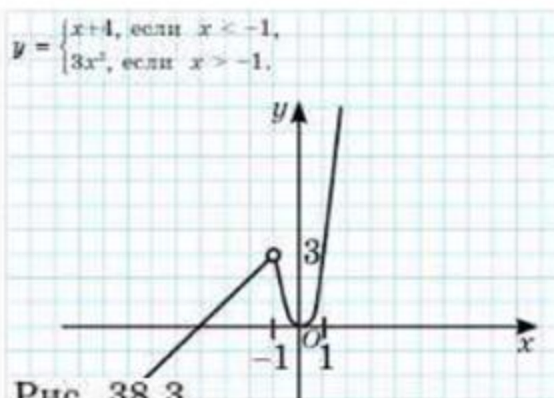


Рис. 38.3

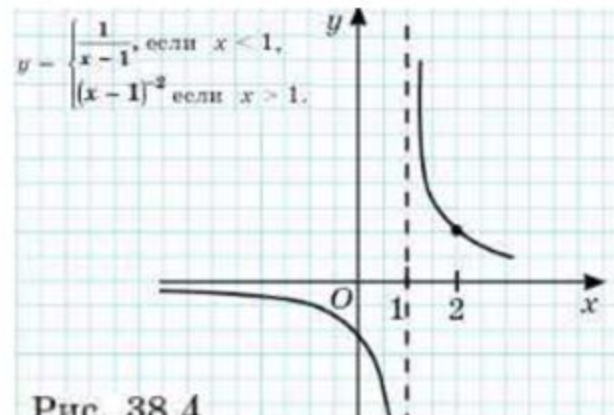


Рис. 38.4

…

Установите по графикам, какие из функций: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{3x}{x-2}$ непрерывны: 1) на множестве всех действительных чисел; 2) на области определения.

Определение. *Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

В противном случае говорят, что функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке $x = x_0$.

ПРИМЕР

2. Функция, изображенная на рисунке 38.3, имеет разрыв в точке с абсциссой $x = -1$. Действительно, для этой функции $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$, но $y = f(-1)$ не существует, так как -1 не принадлежит области определения этой функции. Значит, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$, т. е. функция разрывна в точке, абсцисса которой равна -1.

Рассмотрим функцию, график которой изображен на рисунке 38.4. Для этой функции $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ бесконечен, значит, в точке, абсцисса которой равна 1, имеет место разрыв.

Может показаться, что точка разрыва не должна принадлежать области определения функции, но это не так. Примером этому является функция, изображенная на рисунке 38.2. Здесь точка с абсциссой 4, которая принадлежит области определения функции, является точкой разрыва. Найдем $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Для вычисления этого предела надо понять, как именно x приближается к числу 4. Если слева, то $y = f(x) \to 6$, если справа, то $y = f(x) \to 8$, т. е. $\lim\limits_{x \to 4-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4+0} f(x)$.

Значит, чтобы функция была непрерывна в точке x_0, важно чтобы левый и правый пределы функции $y = f(x)$ в точке x_0 были равны и равны значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a,\ f(x_0) = a.$$

Определения. Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв в точке с абсциссой x_0. Тогда:

если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *или* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ *бесконечен, то говорят, что* x_0 *есть* ***точка разрыва*** **II рода;**

если оба эти предела конечны и различны, то x_0 *называется* ***точкой разрыва*** **I** ***рода*** **(скачок);**

если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ *и либо* $f(x_0) \neq b$, *либо* $f(x_0)$ *не существует, то* x_0 *называется* ***точкой устранимого разрыва.***

Определение. *Если функция непрерывна во всех точках промежутка, то она называется* ***непрерывной на этом промежутке.***

ВЫ ЗНАЕТЕ: Графики степенной функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 39.1.1), $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 39.1.2), $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (рис. 39.1.3) неограниченно приближаются к осям Ox и Oy при $x \to +\infty$ и при $x \to 0$, соответственно, но не пересекают их. Другими словами, при движении точки M по графикам этих функций в бесконечность, расстояние от точки M до осей координат стремится к нулю.

В данных случаях оси координат являются асимптотами кривых линий — графиков этих функций.

Определение. *Прямая а называется* ***асимптотой кривой*** *(графика функции), если точка М, смещаясь вдоль этой линии, удаляется в бесконечность, а расстояние от нее до прямой а стремится к нулю.*

Асимптоты бывают: *вертикальные, горизонтальные и наклонные.*

На рисунке 39.1 изображены кривые линии, которые имеют по две асимптоты — горизонтальную и вертикальную.

На рисунках 39.2.1 и 39.2.2 изображены кривые линии, которые имеют по одной вертикальной асимптоте, а на рисунках 39.2.3 и 39.2.4 изображены кривые линии, которые имеют по одной горизонтальной асимптоте.

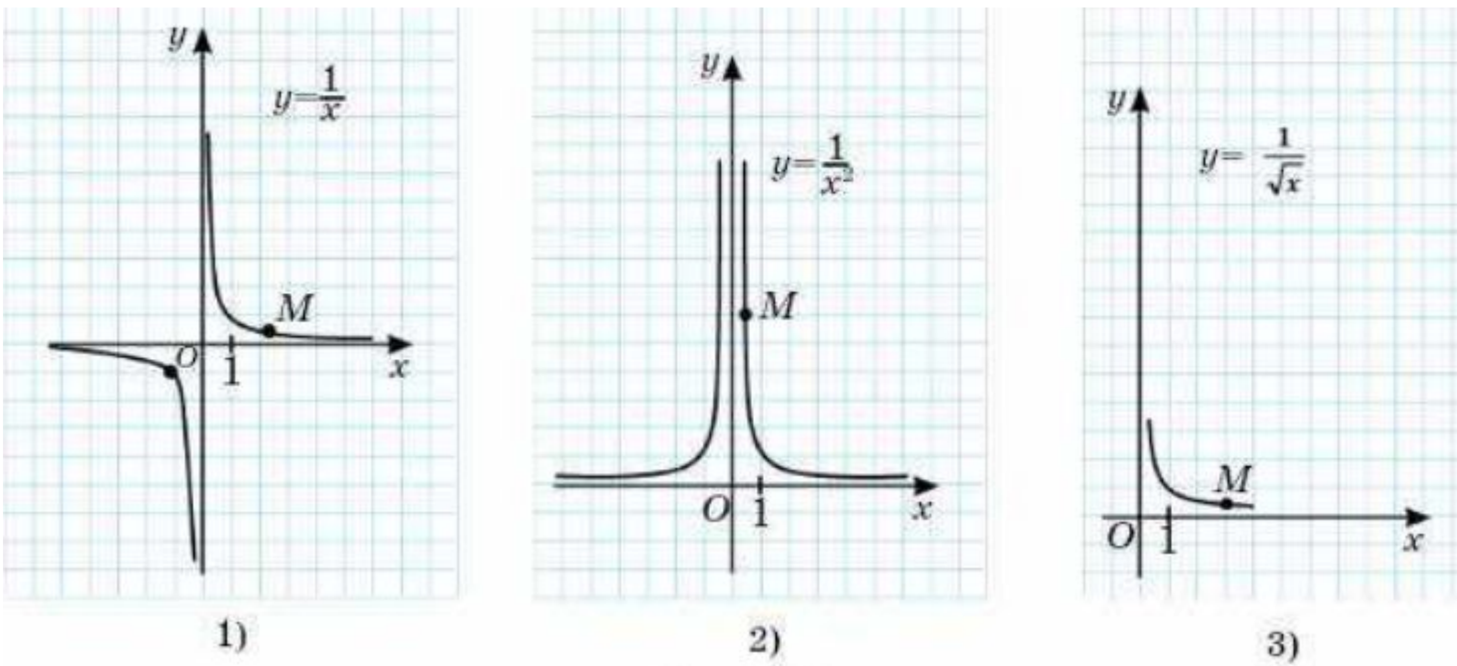
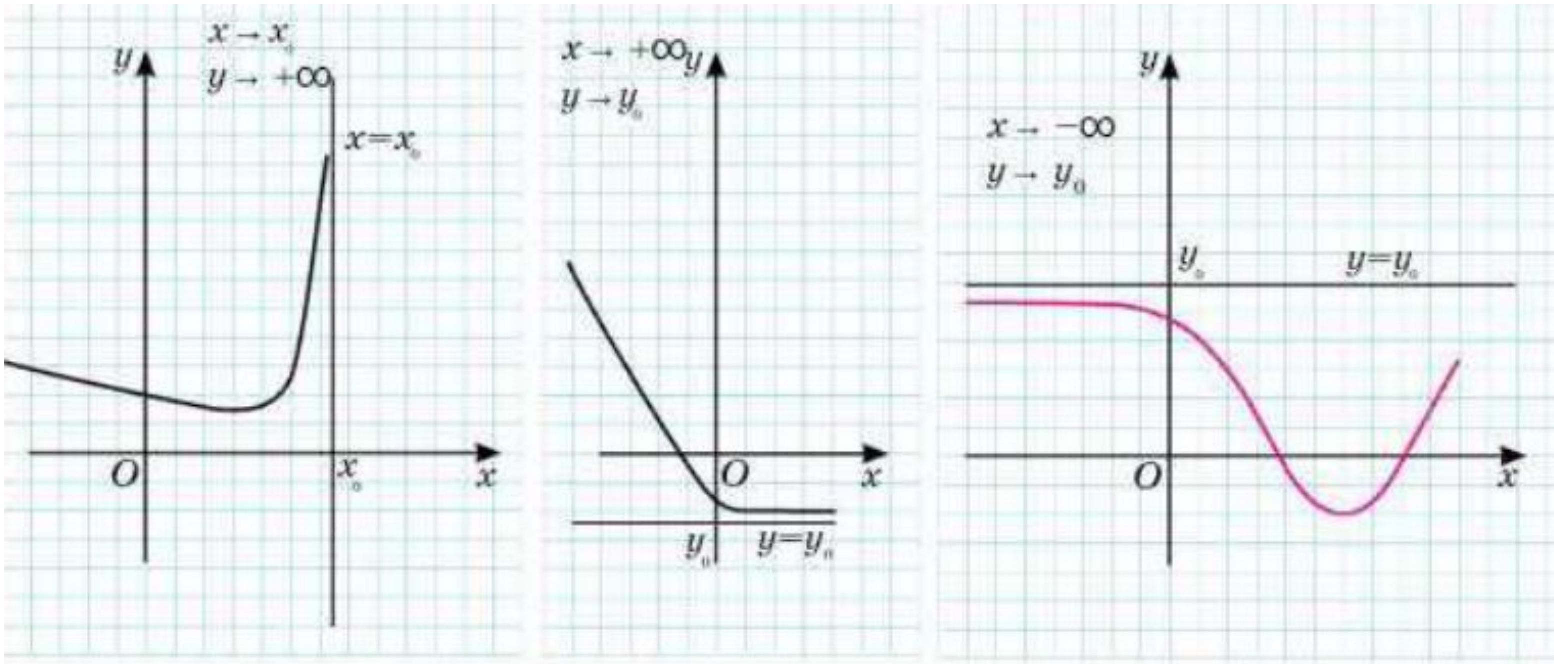


Рис. 39.1



2) 3) 4)

Рис. 39.2

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ и (или) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, то прямая линия $x = x_0$ является вертикальной асимптотой. (Здесь ∞ это либо $+\infty$, либо $-\infty$).

Рассмотрим, как найти уравнение наклонных асимптот. Если график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, то она как прямая линия задана уравнением $y = kx + b$.

Пусть кривая линия $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ (рис. 39.3).

Проведем два перпендикуляра из точки M: один к асимптоте (MP), другой через точку M к оси Ox и введем следующие обозначения.

Обозначим точку пересечения перпендикуляра к асимптоте:

— и кривой линии $y = f(x)$ буквой M;

— с асимптотой буквой P.

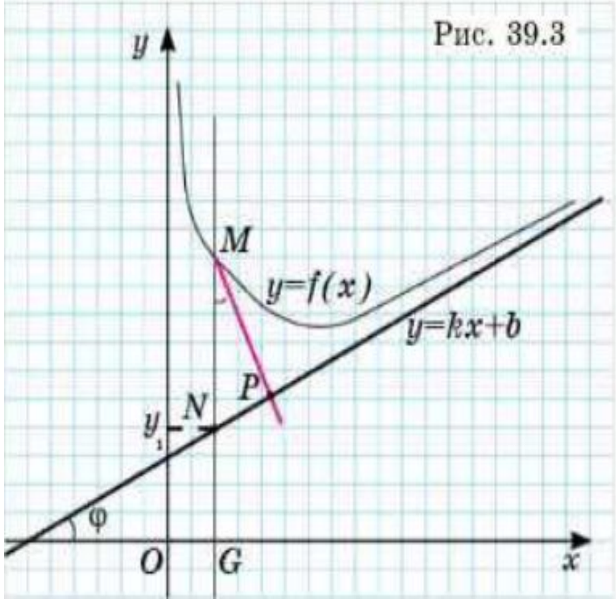


Рис. 39.3

Угол между асимптотой и положительным направлением оси Ox обозначим φ.

Точку пересечения перпендикуляра MG к оси Ox и асимптоты обозначим N.

Пусть $MG = y$ — ордината точки кривой линии $y = f(x)$, $NG = y_1$ — ордината точки N на асимптоте $y = kx + b$ (рис. 39.3).

Докажем, что $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

Доказательство. При движении точки M по кривой линии при $x \to +\infty$ точка M неограниченно приближается к точке P, поэтому $\lim\limits_{x \to \infty} |MP| = 0$.

Из ΔMNP получим $|NM| = \frac{|MP|}{\cos\varphi}$. Поскольку угол φ — постоянный и не равный 90°, то cosφ можно вынести за знак предела. Тогда получим $\lim\limits_{x\to\infty}|NM| = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}|MP|}{\cos\varphi} = 0$. Используя рисунок 39.3, получим $|NM| = ||MG| - |GN|| = |y - y_1| = |f(x) - (kx + b)|$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$.

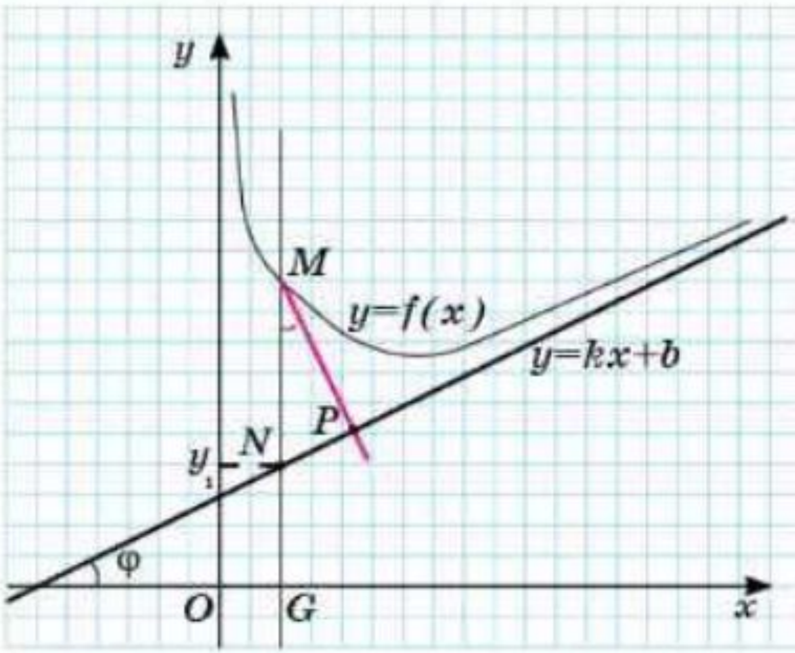


Рис. 39.3

Воспользуемся полученным пределом для вычисления значений k и b асимптоты $y = kx + b$ кривой линии $y = f(x)$.

Для этого в полученном выражении под знаком предела вынесем за скобки x. Получим $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$.

Поскольку $x \to \infty$, то $x \neq 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$ и так как b и k — const, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$.

Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0$. Из последнего равенства выразим k, получим

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

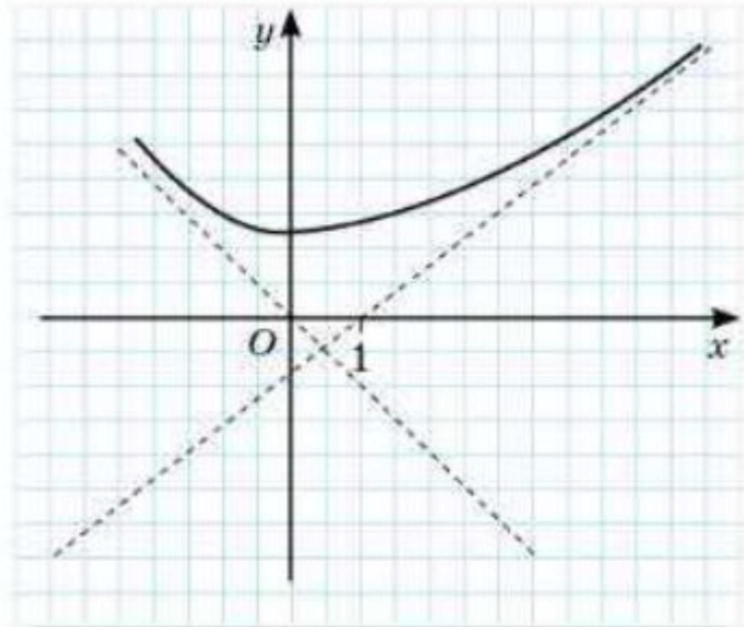


Рис. 39.4

Еще раз применим доказанное равенство $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$. Преобразуем его следующим образом: $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$. Из последнего равенства выразим b, получим $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$.

Отметим, что горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при $k = 0$.

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$ — формулы для нахождения уравнения $y = kx + b$ наклонной или горизонтальной асимптоты.

Если хотя бы один из пределов для нахождения b и k при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$) не существует, это означает, что наклонной асимптоты нет.

Примечание:

1) Наклонных асимптот у графика функции может быть две: одна при $x \to +\infty$ и одна при $x \to -\infty$ (рис. 39.4).

2) Кривая линия, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может и пересекать ее, причем не в одной точке (рис. 39.5).

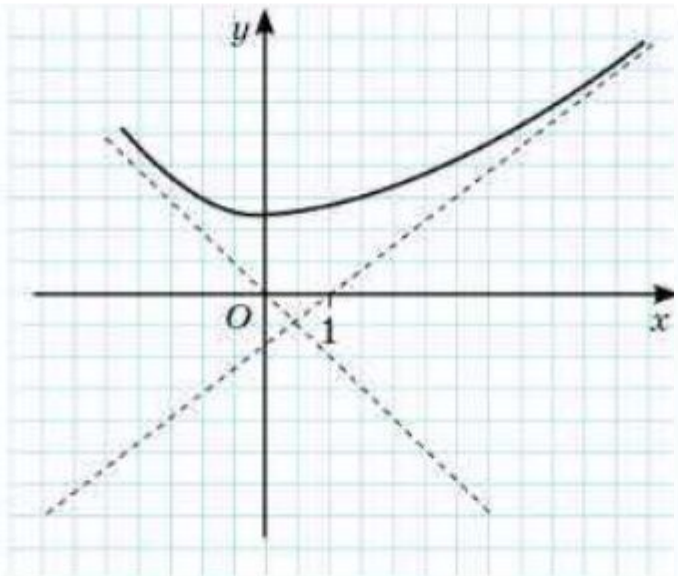


Рис. 39.4

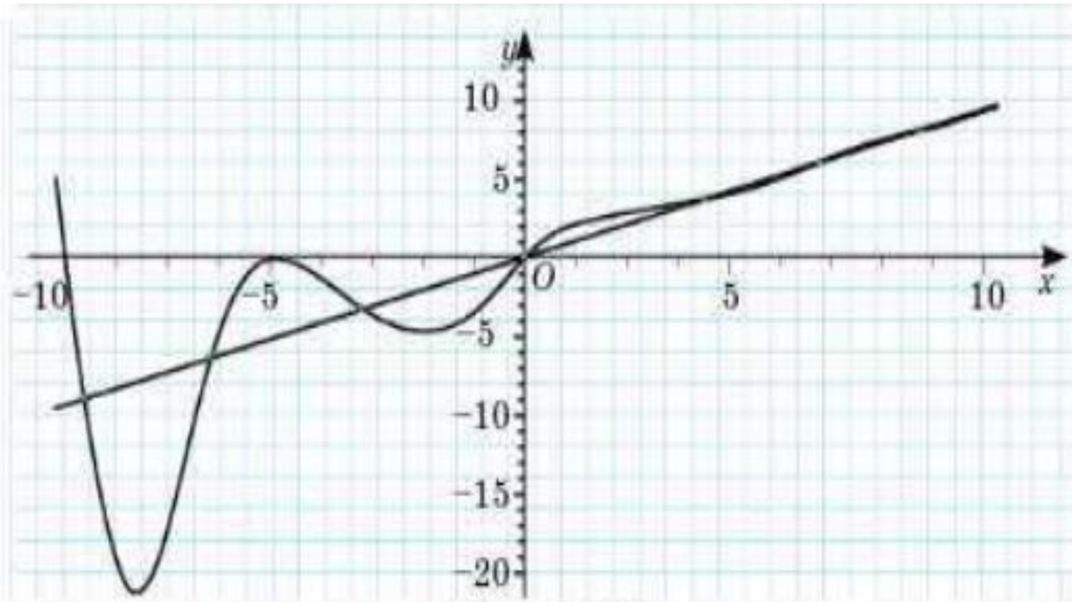


Рис. 39.5

ПРИМЕР

2. Найдем наклонную асимптоту графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Решение. Воспользуемся формулами $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx]$. Получим:

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = 1$ и $k = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x(x-1)} = 1$, т. е. в обоих случаях $k = 1$.

$$b = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right) = -1 \text{ и}$$

$$b = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right) = -1\text{, т. е.}$$

$b = -1$.

Следовательно, график данной функции имеет одну наклонную асимптоту $y = x - 1$ (как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$).

Выше было показано, что график этой функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$. На рисунке 39.6 показан эскиз графика этой функции.

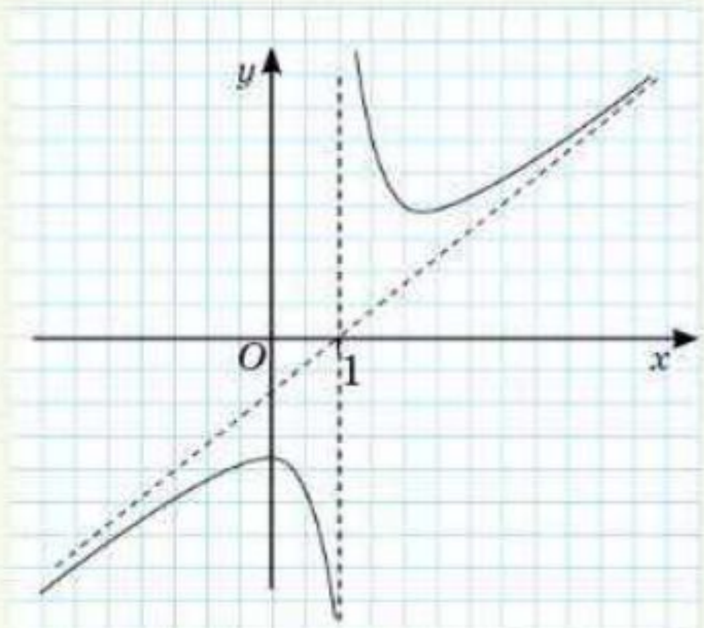
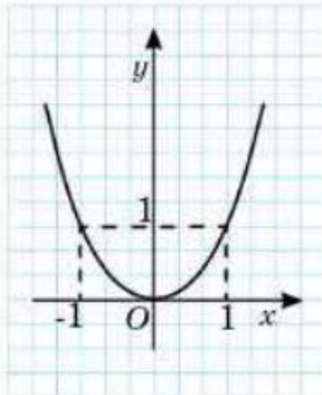
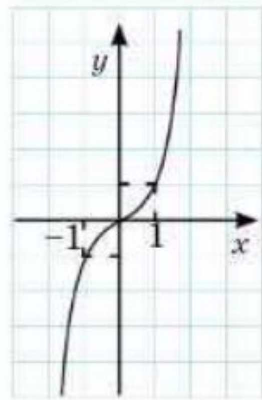


Рис. 39.6

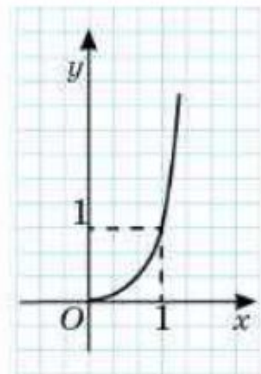
38.1. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 38.5, имеют точки разрыва?



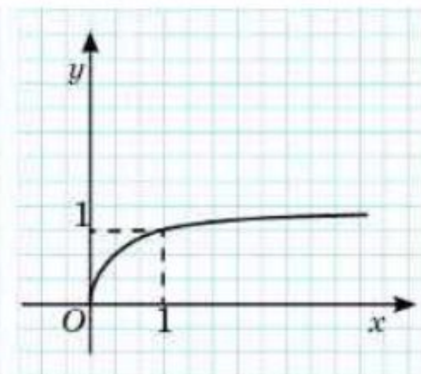
1)



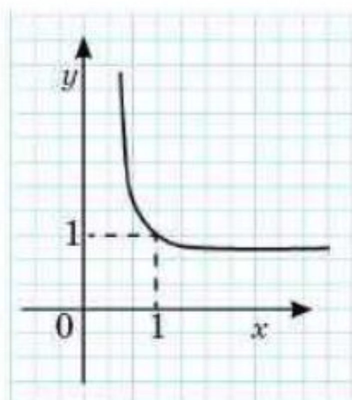
2)



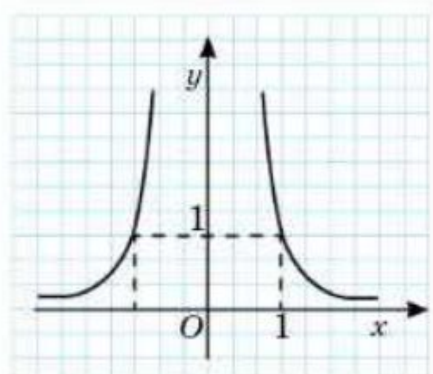
3)



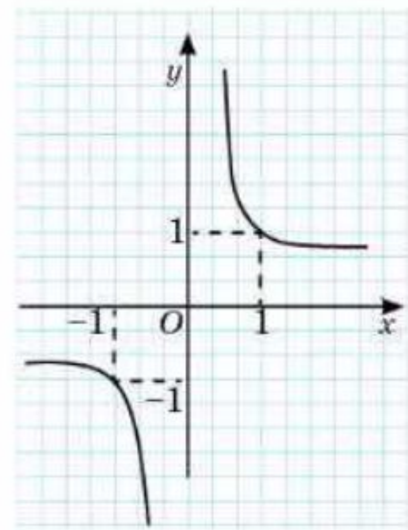
4)



5)



6)



7)

Домашнее задание:
№38.3, №38.4, №39.1

38.3. Постройте график функции $y = f(x)$. Выясните, является ли функция непрерывной в точке $x_0 = 1$:

1) $y = \begin{cases} 1 + 2x \text{ при } x \geqslant 1, \\ 4x - 1 \text{ при } x < 1; \end{cases}$

38.4. Постройте схематически график функции, имеющей разрыв в точке:

1) $x_0 = 3$; 2) $x_0 = -1{,}5$; 3) $x_0 = 4$; 4) $x_0 = -0{,}5$.

39.1. Найдите асимптоты графика функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; 2) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$;