Раздел 5. Основные понятия дискретной математики. Теория вероятности
Тема 5.3. Элементы теории вероятности

План

1. Основы теории вероятности
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей
3. Формула полной вероятности
4. Повторение испытаний. Формула Бернулли

Основы теории вероятностей

- **Теория вероятностей** – это раздел математики изучающий закономерности массовых случайных событий.
- Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связанно с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется **событием**.
- **Опр.** Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется **случайным**.

- **Опр.** В том случае, когда событие непременно должно произойти, то оно называется **достоверным**, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти – **невозможным**.
- **Опр.** События называются **несовместными**, если каждый раз возможно появление только одного из них.

- **Опр.** Cобытия называются **совместными**, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появления другого при том же испытании.
- **Опр.** Cобытия называются **противоположными**, если в условиях испытания они, являясь единственным его исходами, несовместны.
- Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности

- Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т. е.
- $\mathbf{P(A) = \frac{m}{n}}$

- Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше 1, т. е. $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Невозможному событию соответствует вероятность $P(A) = 0$, а достоверному – вероятность $P(A) = 1$.

Пример 1

- В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?
- Общее число различных исходов есть n = 1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m = 200. Согласно формуле $P(A) = \frac{m}{n}$, получим: $P(A) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ (20%)
- **Ответ:** вероятность выигрыша 0,2 или 20%

- **Теорема сложения вероятностей несовместных событий:** Вероятность одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$
- **Теорема сложения вероятностей совместных событий:**

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \times B)$

- Событие, противоположное событию А (т.е. ненаступление

- **Опр.** Вероятность наступления события А, вычисленная в предположении, что событие В уже произошло, называется условной вероятностью события А при условии В и обозначается $P_B(A)$(читается: вероятность от А при условии В). Если А и В – независимые события, то:
- $P(B) - P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$

- **Опр.** События А, В, С – называются независимыми в совокупности, если вероятность каждого из них не меряется в связи с наступлением или ненаступлением других событий по отдельности или в любой их комбинации.

Пример 2

- Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, 12, 13, …., 98, 99. Из них 30 являются кратным 3, 18 – кратным 5 и 6 – кратным одновременно 3 и 5. Найти вероятность того, что наугад выбрано число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.
  - Пусть событие А – выбранное число кратно 3, событие В – выбранное число кратно 5, событие АВ – выбранное число кратно 3 и 5.
  - $P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$, $P(AB) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$, т.к. события А и В совместные, то
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{3+5-1}{15} = \frac{7}{15} \approx$ 0,47 (47%)
  - Ответ: Вероятность равна 0,47 или 47%.

- **Теорема умножения вероятностей независимых событий:**

Вероятность совместного появления (или произведения) двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

- $P(A \text{ и } B) = P(A \times B) = P(A) \cdot P(B)$

- **Теорема умножения вероятностей зависимых событий:**

Вероятность совместного появления (или произведения) двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие осуществилось.

- $P(A \text{ и } B) = P(A \times B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Пример 3

- В группе из 20 студентов 5 студентов не подготовили задание. Какова вероятность того, что два первых студента, вызванные наугад, будут не готовы к ответу.
  - Вероятность того, что 1 студент не готов к ответу, $P(A) = \frac{5}{20}$; вероятность того, что и 2 студент также не готов, как и первый, $P_A(B) = \frac{4}{19}$.
  - $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19} = \frac{20}{380} = 0{,}05.$

Ответ: вероятность того, что два первых студента, вызванные наугад, будут не готовы к ответу – 5%.

Формула полной вероятности

- ***Формула Байеса.*** Пусть события $B_1, B_2, \ldots . B_n$ образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них, например B_1, событие A может наступить с некоторой условной вероятностью $P_{B_1}(A)$. Тогда вероятность наступления события A равна сумме произведений вероятностей каждого из событий B_1 на соответствующую условную вероятность события A:
- $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots . . + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A),$
- где $P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n) = 1.$

- Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие А уже произошло, то вероятности событий B_1 могут быть переоценены по *формуле Байеса*.

- $P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$

- где P_A (B_1) - вероятность каждого события B_1, после испытания, в результате которого наступило событие А, $P_{B_1}(A)$ – условная вероятность события А после наступления события B_1, $P(A)$ – находится по формуле полной вероятности.

Повторение испытаний. Формула Бернулли

- **Опр.** Если производятся испытания, при которых вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно испытания А.**

- Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события А равна p(где $0 < p < 1$), событие А наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), находится по формуле Бернулли:
- $P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot g^{n-k}$, где $g = 1 - p$