Луганский государственный медицинский университет имени Святителя Луки

Кафедра медицинской, биологической физики и информатики

Лекция 1

по дисциплине

МАТЕМАТИКА

Луганск 2021

Использование математики в медицине

- создание растворов требуемой концентрации
- расчет дозы и графика приема лекарства
- статистическая обработка медицинских данных
- доказательная медицина
- прогнозирование и планирование в медицине
- расчет протезов и имплантов
- разработка медицинских приборов
- моделирование биологических процессов
- изучение структуры макромолекул и т.д.

История создания математического анализа (17 век)

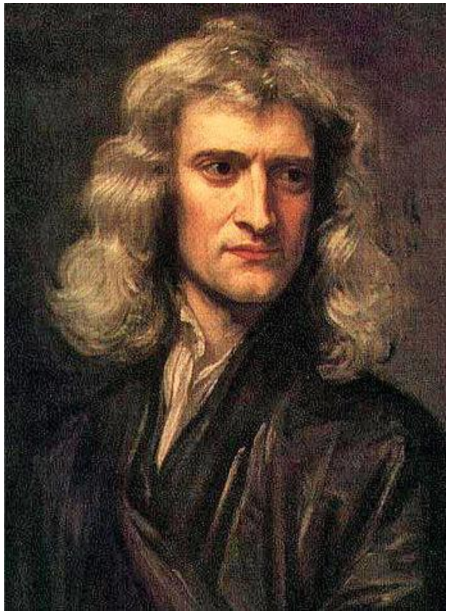
Математический анализ – раздел математики, объединяющий в себе дифференциальное и интегральное исчисление.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Основу математического анализа в конце XVII века заложили Лейбниц и его ученики (Бернулли, Лопиталь).

Они изучают свойства функций и бесконечно малых величин, вводят понятие производной, интеграла и дифференциала.

История создания математического анализа (18 век)



Исаак Ньютон

В 1708 году вспыхнул печально известный спор Лейбница с Ньютоном о научном приоритете открытия дифференциального исчисления, который независимо от него разработал основы математического анализа и использовал производную функции и дифференциальные уравнения для описания движения планет и решения ряда других задач механики и гидравлики.

История создания математического анализа (18 век)

Последующее развитие математического анализа связано с именем Эйлера. К его основным достижениям можно отнести использование бесконечно больших величин, нахождение способа разложения функций в бесконечные ряды, он ввел число $e \approx 2.718$, мнимую единицу i в теории комплексных чисел, разработал многочисленные приемы интегрирования, основы теории графов.

Леонард Эйлер

Дальнейшее развитие математического анализа (18-19 века)

Жозеф Луи Лагранж

Огюстен Луи Коши

Карл Вейерштрасс

Софья Ковалевская

Вариационное исчисление, поиск экстремума, интерполяция функций; определение предела; дифференциальные уравнения в частных производных; преобразование Фурье; теория чисел …

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

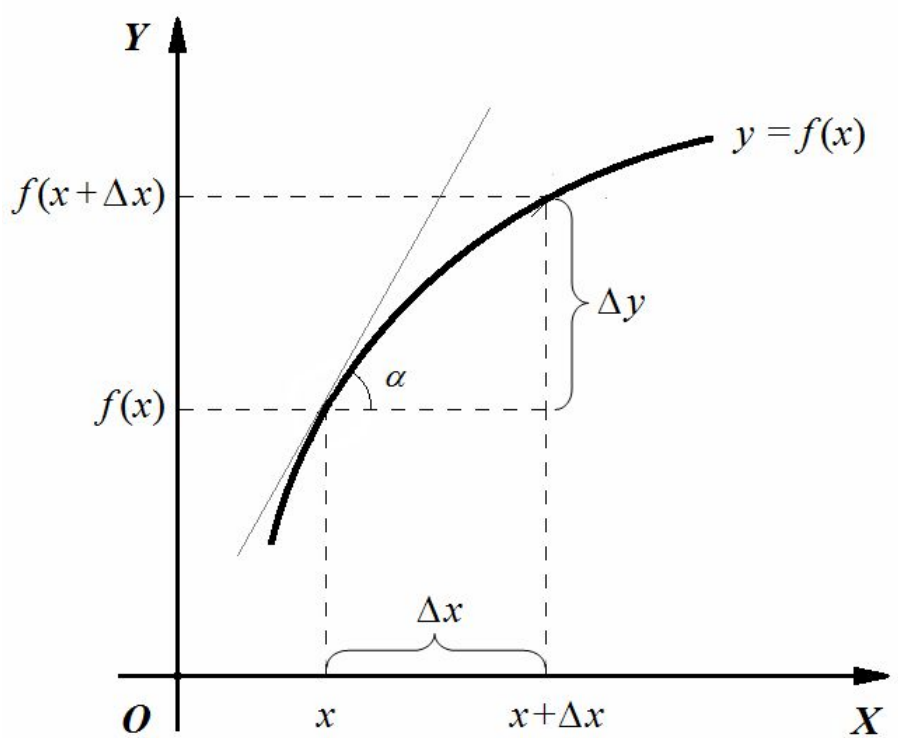
Def Дифференциальное исчисление - раздел математического анализа, в котором изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций.

Def Производная функции - это предел отношения приращения функции к соответствующему бесконечно малому приращению ее аргумента.

$$\boxed{y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Геометрический смысл производной



Производная функции численно равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к ее графику в данной точке:

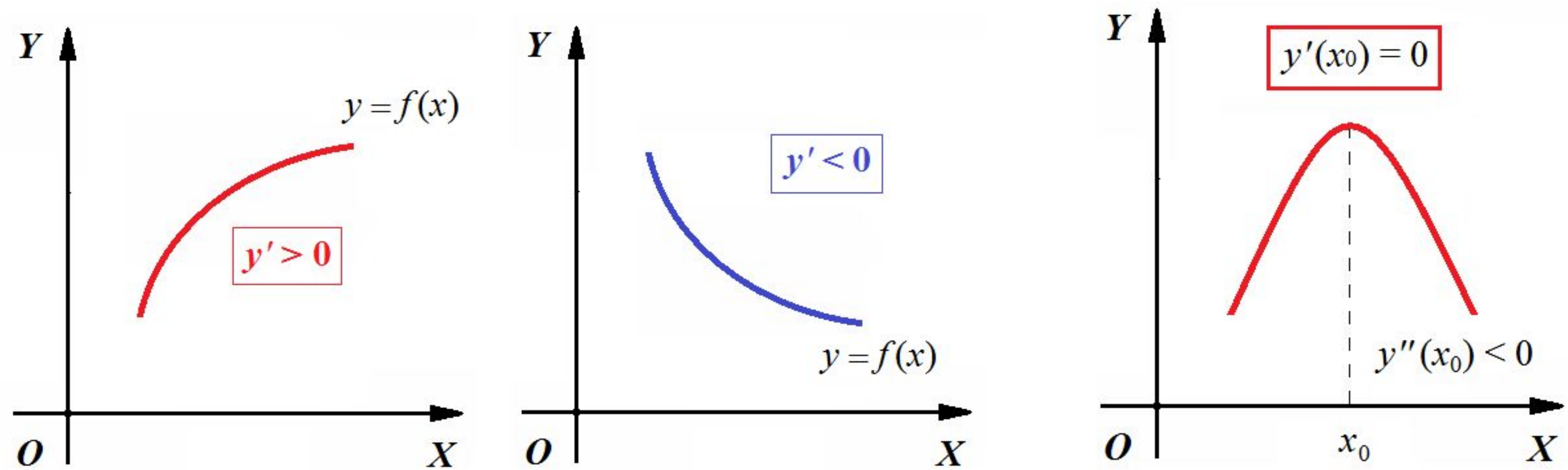
$$\boxed{y'(x) = \operatorname{tg}\alpha}$$

Физический смысл производной функции

Производная функции показывает скорость ее изменения относительно аргумента.

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Физический смысл и использование производной



Если функция возрастает, то ее производная положительная; в области убывания производная отрицательна, а производная неизменяемой функции равна нулю.

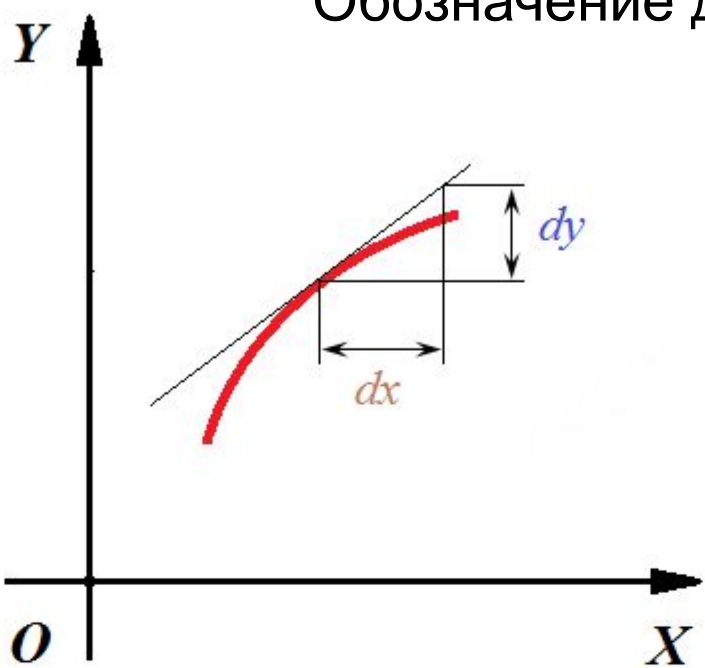
Производная функции $y' = 0$ в ее экстремальных и критических точках.

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def Дифференциалом функции называют линейную часть ее приращения при бесконечно малом приращении аргумента.

Обозначение дифференциала функции $y = f(x)$:

$$dy \text{ или } df$$



Дифференциал функции находится как ее производная, умноженная на дифференциал аргумента функции:

$$\boxed{dy = y'dx}$$

где dx – дифференциал аргумента функции $(dx = \Delta x, \text{ при } \Delta x \to 0)$

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Таблица производных простейших функций

Производные степенных функций	Производные тригонометрических функций	Производные обратных тригонометрических функций
$(c)'=0$	$(\sin x)'=\cos x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(\mathrm{tg}\, x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arctg}\, x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\mathrm{ctg}\, x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arcctg}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Важные частные случаи:

$$(0)' = 0, \quad (1)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$(c)' = 0$ для любого числа c

$$(x)' = (x^1)' = \{(x^n)' = nx^{n-1},\ n = 1\} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$$

$$(e^x)' = \{(a^x)' = a^x \ln a,\ a = e\} = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$$

$$(\ln x)' = \{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ a = e\} = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x \cdot 1} = \frac{1}{x}$$

Некоторые полезные формулы:

$$\frac{1}{x^p} = x^{-p} \qquad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \qquad x^m \cdot x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad \left(x^m\right)^n = x^{m \cdot n}$$

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Правила дифференцирования

$$(Cu)' = Cu'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции:

$$[f(g(x))]' = f'(g) \cdot g'(x)$$

где C – число, а u, v, f, g – некоторые функции

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Пример нахождения производной сложной функции:

1) $y = \arcsin(x^3 + 2x)$

$y' = [\arcsin(x^3 + 2x)]' =$

$= \left\{ \left[f(g(x)) \right]' = f'(g) \cdot g'(x), \text{ где } f(g) = \arcsin g, \text{ а } g = x^3 + 2x \right\} =$

$= (\arcsin g)' \cdot g' = \dfrac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^3+2x)^2}} \cdot (x^3 + 2x)' =$

$= \dfrac{3x^2 + 2}{\sqrt{1-(x^3+2x)^2}}.$

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Пример нахождения производной сложной функции:

2) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x^5}$

$$y'=\left(\sqrt{\operatorname{tg} x^5}\right)'=\left[\left(\operatorname{tg} x^5\right)^{\frac{1}{2}}\right]'=\left\{f(g)=g^{\frac{1}{2}},\ \text{где}\ g=\operatorname{tg} x^5\right\}=$$

$$=\left(g^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot g'=\frac{1}{2}g^{\frac{1}{2}-1}\cdot g'=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg} x^5\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\operatorname{tg} x^5\right)'=$$

$$=\frac{1}{2\left(\operatorname{tg} x^5\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\operatorname{tg} x^5\right)'=\{f(g)=\operatorname{tg} g,\ \text{где}\ g=x^5\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^5}}\cdot\frac{1}{\cos^2 g}\cdot g'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^5}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{tg} x^5\right)}\cdot(x^5)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x^5}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{tg} x^5\right)}\cdot 5x^4=\frac{5x^4}{2\cos^2\left(\operatorname{tg} x^5\right)\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x^5}}.$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def Первообразной функции $f(x)$ называется некоторая функция $F(x)$, производная от которой равна исходной функции $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x)$$

Например, функция $F(x) = x - \sin x$, является первообразной для функции $f(x) = 1 - \cos x$.

Действительно, $F'(x) = (x - \sin x)' = 1 - \cos x = f(x)$.

Но функция $F(x) = x - \sin x + 5$ также есть первообразная исходной функции: $F'(x) = (x - \sin x + 5)' = 1 - \cos x + 0 = f(x)$.

Таким образом, любая функция имеет бесконечное множество первообразных, отличающихся друг от друга на некоторую постоянную величину.

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def Неопределенным интегралом функции называется множество всех ее первообразных.

Обозначение: $$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, dx – дифференциал ее аргумента, $F(x)$ – ее первообразная, C = const.

Операция нахождения интеграла некоторой функции называется ее интегрированием. Интегрирование обратно дифференцированию (нахождению дифференциала), т.к.

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Основные правила интегрирования

$$\int A \cdot f(x)\,dx = A \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$$

где A – число, а f и g – некоторые функции.

Обратите внимание на то, что число *A* должно быть снаружи подынтегральной функции, а не в ее аргументе!

Кроме того, формул для вычисления интегралов, аналогичным формулам «производная от произведения или частного» не существует!

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Таблица интегралов простейших функций

$$\int dx = x + C$$

$$\int A\,dx = Ax + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def Определенным интегралом функции на отрезке называется число, численно равное разности ее первообразных на концах этого отрезка.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$ – формула Ньютона-Лейбница

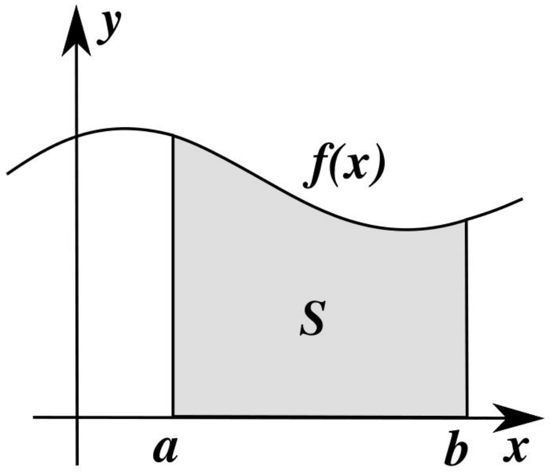
где $f(x)$ – подынтегральная функция, dx – дифференциал ее аргумента, $F(x)$ – ее первообразная; a, b – соответственно верхний и нижний пределы интегрирования.

Обратите внимание, что в формуле Ньютона-Лейбница сначала находится первообразная от верхнего предела интегрирования, а затем от нижнего!

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл функции на отрезке численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью абсцисс, а также вертикальными прямыми, соответствующими пределам интегрирования.



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Также определенные интегралы можно использовать для нахождения длин кривых, объемов тел; пути, пройденного телом; работы переменной силы, центра тяжести тела, моментов инерции и т.д.

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Метод замены переменной (метод подстановки)

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \left\{\begin{aligned} & t = g(x) \\ & dt = g'(x)\,dx \\ & dx = \frac{dt}{g'(x)} \end{aligned}\right\} = \int f(t)\,dt = F(t)+C = \{t = g(x)\} = F\big(g(x)\big)+C$$

Примеры:

$$\int \frac{\ln x\,dx}{x} = \left\{\begin{aligned} & t = \ln x \\ & dt = \frac{dx}{x} \end{aligned}\right\} = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+C = \{t = \ln x\} = \frac{(\ln x)^2}{2}+C = \frac{\ln^2 x}{2}+C.$$

$$\int x\sin(x^2+1)\,dx = \left\{\begin{aligned} & t = x^2+1 \\ & dt = 2x\,dx \\ & x\,dx = \frac{dt}{2} \end{aligned}\right\} = \int \sin t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{\cos t}{2}+C = -\frac{\cos(x^2+1)}{2}+C.$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Метод замены переменной (метод подстановки)

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = g(x),\;\; t_1 = g(a),\; t_2 = g(b) \\ dt = g'(x)\,dx \\ dx = \dfrac{dt}{g'(x)} \end{array}\right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = F(t_2) - F(t_1)$$

Примеры:

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x+1} = \left\{\begin{array}{ll} t = 2x+1, & t_2 = 2\cdot 3+1 = 7 \\ dt = 2dx, & t_1 = 2\cdot 1+1 = 3 \\ dx = \dfrac{dt}{2} & \end{array}\right\} = \int_3^7 \frac{dt}{2t} = \left(\frac{1}{2}\ln|t|\right)\Bigg|_3^7 = \frac{\ln 7 - \ln 3}{2} = 0.5\ln\frac{7}{3} \approx 0.42.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} t = \arcsin x, & t_2 = \arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6} \\ dt = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & t_1 = \arcsin 0 = 0 \end{array}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,dt = \left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72}.$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Метод интегрирование по частям

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

Примеры:

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x-1) + C.$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, & v = \int dx = x \end{matrix} \right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \\ x\,dx = \dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|t| + C = \{\, t = 1+x^2 \,\} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

<u>Def</u> Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производные, т.е. уравнение вида

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

Наивысшая степень (тип) производной называется порядком дифф. ур-я. Решить ДУ значит найти неизвестную функцию $y(x)$.

Дифференциальные уравнения возникают при решении различных задач физики, биологии, химии, экономики, медицины.

Для решения таких ур-й применяется операция интегрирования.

В общем случае ДУ имеет множество решений, отличающихся на некоторую постоянную величину (общее решение). Если же заданы <u>начальные условия</u>, то можно найти частное решение.

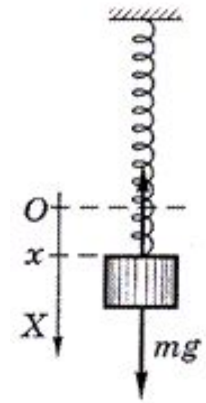
II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры задач, приводящих к ДУ

1) Свободные колебания грузика на пружине:

$$mx'' + kx = 0,$$

$$x(t) = ?$$



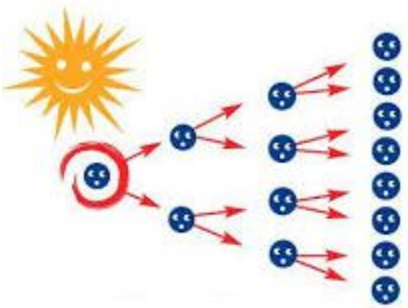
2) Изменение концентрации вещества в химической реакции:

$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C}$

$$\frac{dc(A)}{dt} = -kc(A) \Leftrightarrow c' + kc = 0, \qquad c(t) = ?$$

3) Размножение бактерий (распространение слухов):

$$N' - rN = 0, \qquad N(t) = ?$$



II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Метод решения ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\boxed{y'(x)\cdot f(x)\cdot g(y)+\varphi(x)\cdot \xi(y)=0,}$$

1) Переносим слагаемые, не содержащие производную вправо:

$$y'(x)\cdot f(x)\cdot g(y)=-\varphi(x)\cdot \xi(y),$$

2) Заменяем производную через отношение дифференциалов:

$$y'(x)\to\frac{dy}{dx}:$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot f(x)\cdot g(y)=-\varphi(x)\cdot \xi(y),$$

3) Разделяем переменные (множители с y – налево, множители с x – направо):

$$\frac{g(y)\,dy}{\xi(y)}=-\frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)},$$

4) Интегрируем обе части полученного уравнения, находим общее решение:

$$\int\frac{g(y)\,dy}{\xi(y)}=-\int\frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)},\quad y(x)=\ldots$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры решения ДУ с разделяющимися переменными

1) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$3xy' - 2 = 0,$$
$$3xy' = 2,$$
$$3x\frac{dy}{dx} = 2, \quad |\cdot dx$$
$$3x\,dy = 2\,dx \ , \ |:x$$
$$3\,dy = \frac{2dx}{x},$$
$$\int 3\,dy = \int \frac{2dx}{x},$$
$$3y = 2\ln x + C,$$
$$y = \frac{2}{3}\ln x + C$$ – общее решение в явном виде

Проверка:

$$3xy' - 2 = 0$$
$$3x\left(\frac{2}{3}\ln x + C\right)' - 2 = 0,$$
$$3x\left(\frac{2}{3x} + 0\right) - 2 = 0,$$
$$2 - 2 = 0,$$
$$0 = 0.$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры решения ДУ с разделяющимися переменными

2) Найти частное решение дифференциального уравнения

$$x^2 y' \sin y = 2, \quad \text{при } y(1) = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} \sin y = 2, \quad | \cdot dx$$

$$x^2 \sin y \, dy = 2\,dx, \quad | : x^2$$

$$\sin y \, dy = \frac{2\,dx}{x^2},$$

$$\int \sin y \, dy = 2\int x^{-2} dx,$$

$$-\cos y = -\frac{2}{x} + C \;\Rightarrow\; y = \arccos\left(\frac{2}{x} - C\right)$$ – общее решение

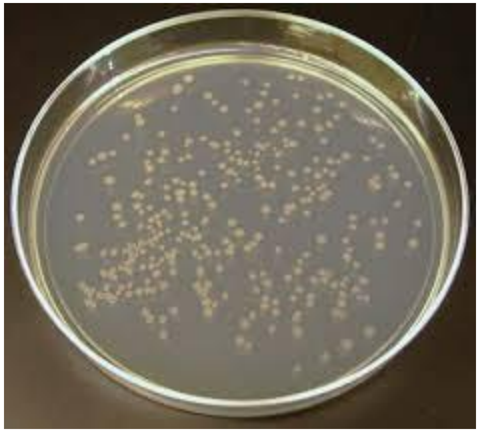
$$\text{При } y(1) = 0, \text{ т.е. } \cos 0 = \frac{2}{1} - C \;\Rightarrow\; C = 2 - 1 = 1$$

$$y = \arccos\left(\frac{2}{x} - 1\right) = \arccos\left(\frac{2 - x}{x}\right)$$ – частное решение

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры решения ДУ с разделяющимися переменными

3) В начальный момент времени в чашке Петри было 10 бактерий. Сколько их станет при поддержании благоприятных условий через 1 час, если деления происходят в среднем через каждые 20 минут.



Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. За небольшой промежуток времени Δt их количество возрастет на величину

$$\Delta N = rN\Delta t \Rightarrow dN = rN\,dt \Rightarrow \frac{dN}{dt} = rN$$

Данный процесс описывает ДУ $N' - rN = 0, \quad N(0) = 10$

Постоянная деления $r = \frac{1}{20} = 0.05\ (\text{мин}^{-1})$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры решения ДУ с разделяющимися переменными

$$N' - \frac{N}{20} = 0, \quad N(0) = 10$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N}{20},$$

$$20\frac{dN}{N} = dt,$$

$$20\int \frac{dN}{N} = \int dt,$$

$$20 \ln N = t + C,$$

$$\ln N = \frac{t}{20} + \ln C,$$

$$\ln\frac{N}{C} = \frac{t}{20},$$

$N = Ce^{\frac{t}{20}}$ – общее решение

При $t = 0,\ N = 10$, поэтому

$$10 = Ce^{\frac{0}{20}} = Ce^0 = C$$

$N = 10e^{\frac{t}{20}}$ – частное решение

Через 1 час (60 мин) в чашке Петри будет около

$N(60) = 10e^{\frac{60}{20}} = 10e^3 \approx 200$ бактерий.

Ответ: 200 бактерий.

ВЫВОДЫ:

- рассмотрены основы дифференциального и интегрального исчисления
- показаны его некоторые возможности для решения теоретических и практических задач.

Литература

1. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики.
2. Тимонюк В.А. Биофизика.
3. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика.
4. Чалий О.В. Медична і біологічна фізика.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!