

Луганский государственный медицинский
университет имени Святителя Луки

Кафедра медицинской, биологической
физики и информатики

Лекция 1

по дисциплине

МАТЕМАТИКА

Луганск 2021

Использование математики в медицине

- создание растворов требуемой концентрации
- расчет дозы и графика приема лекарства
- статистическая обработка медицинских данных
- доказательная медицина
- прогнозирование и планирование в медицине
- расчет протезов и имплантов
- разработка медицинских приборов
- моделирование биологических процессов
- изучение структуры макромолекул и т.д.

История создания математического анализа (17 век)

Математический анализ – раздел математики, объединяющий в себе дифференциальное и интегральное исчисление.

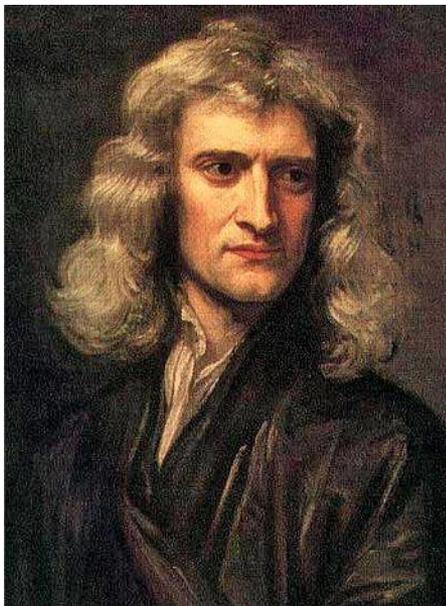


Готфрид Вильгельм
Лейбниц

Основу математического анализа в конце XVII века заложили **Лейбниц** и его ученики (Бернулли, Лопиталь).

Они изучают свойства **функций** и **бесконечно малых** величин, вводят понятие **производной**, **интеграла** и **дифференциала**.

История создания математического анализа (18 век)



Исаак Ньютон

В 1708 году вспыхнул печально известный спор Лейбница с **Ньютоном** о научном приоритете открытия **дифференциального исчисления**, который независимо от него разработал основы математического анализа и использовал **производную функции** и **дифференциальные уравнения**

для описания движения планет и решения ряда других задач механики и гидравлики.

История создания математического анализа (18 век)

Последующее развитие математического анализа связано с именем **Эйлера**. К его основным достижениям можно отнести использование **бесконечно больших величин**, нахождение способа разложения функций в **бесконечные ряды**, он ввел число $e \approx 2.718$, мнимую единицу i в теории комплексных чисел, разработал многочисленные **приемы интегрирования**, основы **теории графов**.



Леонард Эйлер

Дальнейшее развитие математического анализа (18-19 века)



Жозеф Луи
Лагранж



Огюстен Луи
Коши



Карл
Вейерштрасс



Софья
Ковалевская

Вариационное исчисление, поиск экстремума, интерполяция функций; определение предела; дифференциальные уравнения в частных производных; преобразование Фурье; теория чисел ...

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def Дифференциальное исчисление - раздел математического анализа, в котором изучаются понятия производной и дифференциала и способы их применения к исследованию функций.



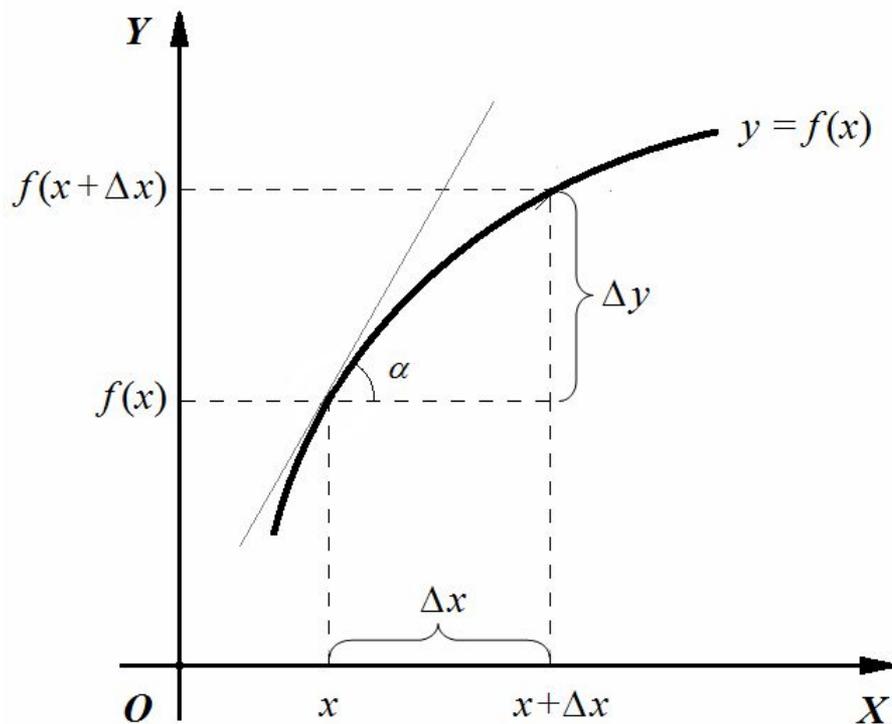
Def Производная функции - это предел отношения приращения функции к соответствующему бесконечно малому приращению ее аргумента.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Геометрический смысл производной



Производная функции численно равна **тангенсу угла наклона касательной**, проведенной к ее графику в данной точке:

$$y'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$



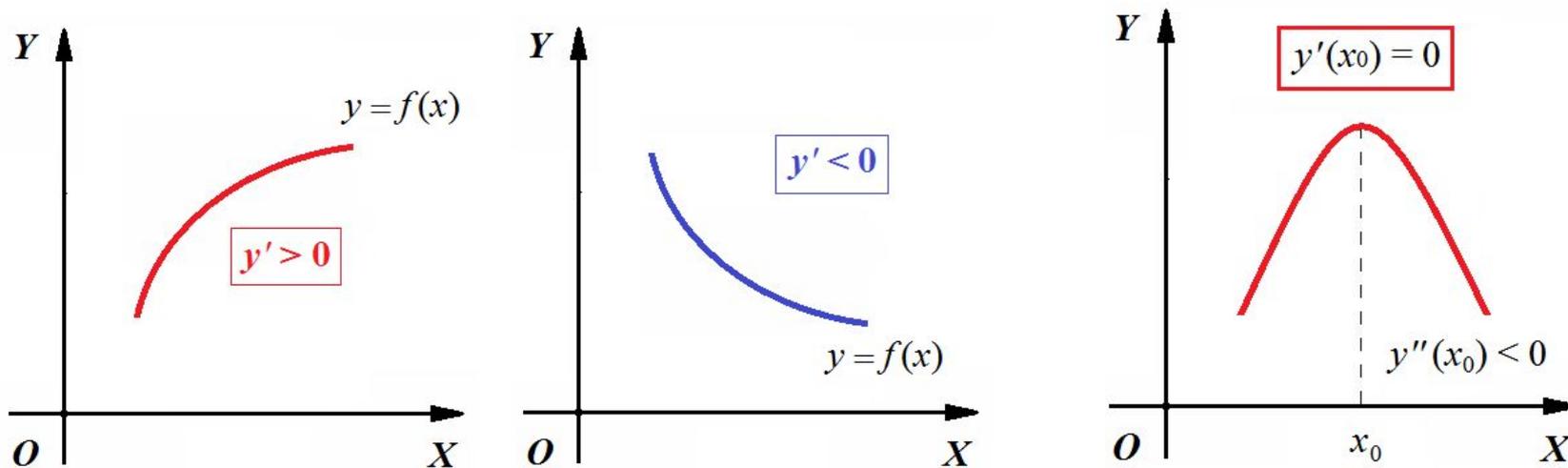
Физический смысл производной функции

Производная функции показывает **скорость ее изменения** относительно аргумента.



I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Физический смысл и использование производной



Если функция **возрастает**, то ее **производная положительная**; в области **убывания** производная **отрицательна**, а **производная неизменяемой** функции **равна нулю**.



Производная функции $y' = 0$ в ее **экстремальных** и **критических** точках.

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def Дифференциалом функции называют линейную часть ее приращения при бесконечно малом приращении аргумента.

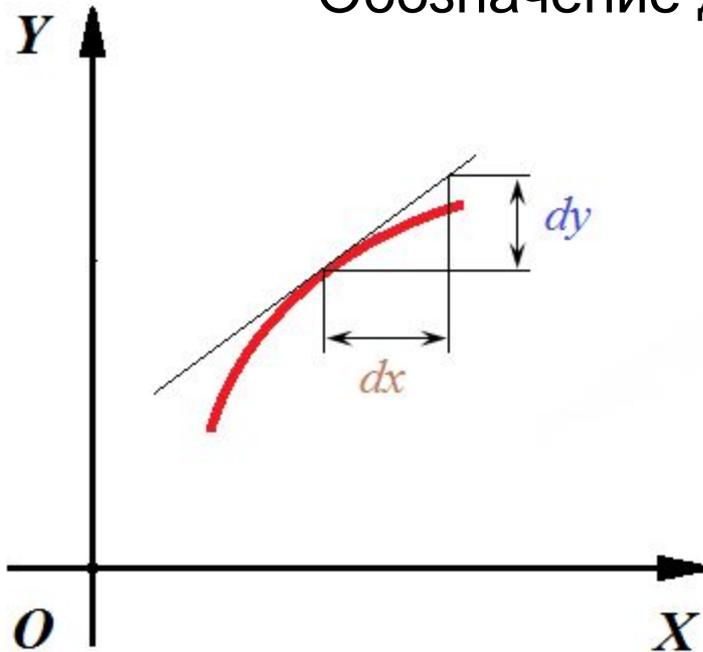


Обозначение дифференциала функции $y = f(x)$:

dy или df

Дифференциал функции находится как ее производная, умноженная на дифференциал аргумента функции:

$$dy = y' dx$$



где dx – дифференциал аргумента функции ($dx = \Delta x$, при $\Delta x \rightarrow 0$)

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Таблица производных простейших функций



Производные степенных функций	Производные тригонометрических функций	Производные обратных тригонометрических функций
$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Важные частные случаи:



$$(0)' = 0, (1)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(c)' = 0 \text{ для любого числа } c$$

$$(x)' = (x^1)' = \{(x^n)' = nx^{n-1}, n=1\} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$$

$$(e^x)' = \{(a^x)' = a^x \ln a, a=e\} = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$$

$$(\ln x)' = \{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a=e\} = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x \cdot 1} = \frac{1}{x}$$

Некоторые полезные формулы:

$$\frac{1}{x^p} = x^{-p}$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Правила дифференцирования



$$(Cu)' = Cu'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции:

$$[f(g(x))]' = f'(g) \cdot g'(x)$$

где C – число, а u, v, f, g – некоторые функции

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Пример нахождения производной сложной функции:

$$1) y = \arcsin(x^3 + 2x)$$

$$y' = [\arcsin(x^3 + 2x)]' =$$

$$= \{ [f(g(x))] \}' = f'(g) \cdot g'(x), \text{ где } f(g) = \arcsin g, \text{ а } g = x^3 + 2x \} =$$

$$= (\arcsin g)' \cdot g' = \frac{1}{\sqrt{1-g^2}} \cdot g' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3+2x)^2}} \cdot (x^3+2x)' =$$

$$= \frac{3x^2+2}{\sqrt{1-(x^3+2x)^2}}.$$

I. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Пример нахождения производной сложной функции:

$$2) y = \sqrt{\operatorname{tg} x^5}$$

$$y' = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x^5} \right)' = \left[\left(\operatorname{tg} x^5 \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \left\{ f(g) = g^{\frac{1}{2}}, \text{ где } g = \operatorname{tg} x^5 \right\} =$$

$$= \left(g^{\frac{1}{2}} \right)' \cdot g' = \frac{1}{2} g^{\frac{1}{2}-1} \cdot g' = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} x^5 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\operatorname{tg} x^5 \right)' =$$

$$= \frac{1}{2 \left(\operatorname{tg} x^5 \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\operatorname{tg} x^5 \right)' = \left\{ f(g) = \operatorname{tg} g, \text{ где } g = x^5 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{tg} x^5}} \cdot \frac{1}{\cos^2 g} \cdot g' = \frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{tg} x^5}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\operatorname{tg} x^5 \right)} \cdot \left(x^5 \right)' =$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{tg} x^5}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\operatorname{tg} x^5 \right)} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{2 \cos^2 \left(\operatorname{tg} x^5 \right) \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x^5}}.$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def Первообразной функции $f(x)$ называется некоторая функция $F(x)$, производная от которой равна исходной функции $f(x)$, т.е.



$$F'(x) = f(x)$$

Например, функция $F(x) = x - \sin x$, является первообразной для функции $f(x) = 1 - \cos x$.

Действительно, $F'(x) = (x - \sin x)' = 1 - \cos x = f(x)$.

Но функция $F(x) = x - \sin x + 5$ также есть первообразная исходной функции: $F'(x) = (x - \sin x + 5)' = 1 - \cos x + 0 = f(x)$.

Таким образом, любая функция имеет бесконечное множество первообразных, отличающихся друг от друга на некоторую постоянную величину.

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def Неопределенным интегралом функции называется множество всех ее первообразных.



Обозначение: $\int f(x) dx = F(x) + C$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, dx – дифференциал ее аргумента, $F(x)$ – ее первообразная, $C = \text{const}$.

Операция нахождения интеграла некоторой функции называется ее **интегрированием**. Интегрирование **обратно** дифференцированию (нахождению дифференциала), т.к.

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x)$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Основные правила интегрирования



$$\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

где A – число, а f и g – некоторые функции.

Обратите внимание на то, что число A должно быть **снаружи** подынтегральной функции, а **не в ее аргументе!**

Кроме того, формул для вычисления интегралов, аналогичным формулам «производная от **произведения** или **частного**» **не существует!**

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Таблица интегралов простейших функций



$$\int dx = x + C$$

$$\int A dx = Ax + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Def **Определенным интегралом** функции на отрезке называется число, численно равное **разности ее первообразных** на концах этого отрезка.



$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{– формула Ньютона-Лейбница}$$

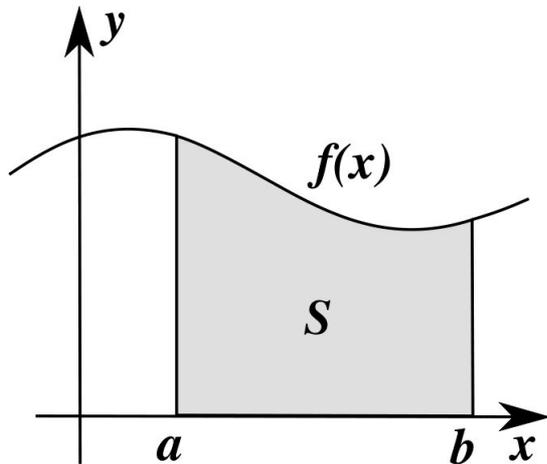
где $f(x)$ – подынтегральная функция, dx – дифференциал ее аргумента, $F(x)$ – ее первообразная; a, b – соответственно верхний и нижний пределы интегрирования.

Обратите внимание, что в формуле Ньютона-Лейбница сначала находится первообразная от **верхнего** предела интегрирования, а затем от **нижнего!**

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл функции на отрезке численно равен **площади** криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции и осью абсцисс, а также вертикальными прямыми, соответствующими пределам интегрирования.



$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Также определенные интегралы можно использовать для нахождения длин кривых, объемов тел; пути, пройденного телом; работы переменной силы, центра тяжести тела, моментов инерции и т.д.

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Метод замены переменной (метод подстановки)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = g(x) \\ dt = g'(x) dx \\ dx = \frac{dt}{g'(x)} \end{array} \right\} = \int f(t) dt = F(t) + C = \{t = g(x)\} = F(g(x)) + C$$

Примеры:

$$\int \frac{\ln x dx}{x} = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \{t = \ln x\} = \frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

$$\int x \sin(x^2 + 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{\cos t}{2} + C = -\frac{\cos(x^2 + 1)}{2} + C.$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Метод замены переменной (метод подстановки)

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = g(x), \quad t_1 = g(a), \quad t_2 = g(b) \\ dt = g'(x) dx \\ dx = \frac{dt}{g'(x)} \end{array} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = F(t_2) - F(t_1)$$

Примеры:

$$\int_1^3 \frac{dx}{2x+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x+1, \quad t_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ dt = 2dx, \quad t_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} = \int_3^7 \frac{dt}{2t} = \left(\frac{1}{2} \ln |t| \right) \Big|_3^7 = \frac{\ln 7 - \ln 3}{2} = 0.5 \ln \frac{7}{3} \approx 0.42.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \arcsin x, \quad t_2 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad t_1 = \arcsin 0 = 0 \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt = \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72}.$$

II. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Метод интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Примеры:

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |t| + C = \{ t = 1+x^2 \} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Def Дифференциальным уравнением (ДУ)

называется уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производные, т.е. уравнение вида

$$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$



Наивысшая степень (тип) производной называется **порядком** дифф. ур-я. Решить ДУ значит найти неизвестную функцию $y(x)$.

Дифференциальные уравнения возникают при решении различных задач физики, биологии, химии, экономики, медицины.

Для решения таких ур-й применяется операция интегрирования.

В общем случае ДУ имеет множество решений, отличающихся на некоторую постоянную величину (**общее решение**). Если же заданы начальные условия, то можно найти **частное решение**.

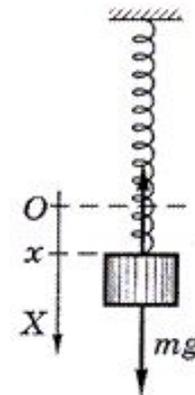
II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры задач, приводящих к ДУ

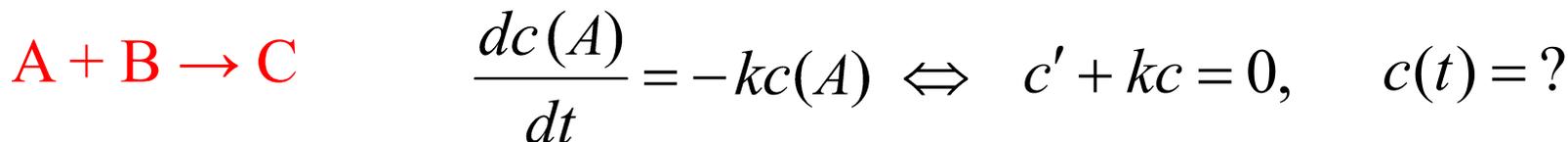
- 1) Свободные колебания грузика на пружине:

$$mx'' + kx = 0,$$

$$x(t) = ?$$



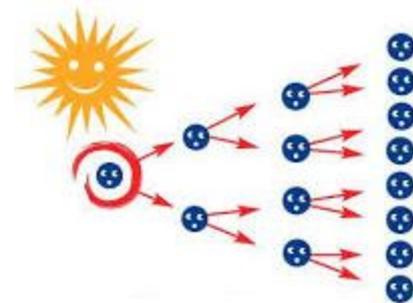
- 2) Изменение концентрации вещества в химической реакции:



- 3) Размножение бактерий (распространение слухов):



$$N' - rN = 0, \quad N(t) = ?$$



II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Метод решения ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными



$$y'(x) \cdot f(x) \cdot g(y) + \varphi(x) \cdot \xi(y) = 0,$$

- 1) Переносим слагаемые, не содержащие производную вправо:
- 2) Заменяем производную через отношение дифференциалов:
- 3) Разделяем переменные (множители с y – налево, множители с x – направо):
- 4) Интегрируем обе части полученного уравнения, находим общее решение:

$$y'(x) \cdot f(x) \cdot g(y) = -\varphi(x) \cdot \xi(y),$$

$$y'(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} :$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot f(x) \cdot g(y) = -\varphi(x) \cdot \xi(y),$$

$$\frac{g(y) dy}{\xi(y)} = -\frac{\varphi(x) dx}{f(x)},$$

$$\int \frac{g(y) dy}{\xi(y)} = -\int \frac{\varphi(x) dx}{f(x)}, \quad y(x) = \dots$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры решения ДУ с разделяющимися переменными

1) Найти **общее** решение дифференциального уравнения

$$3xy' - 2 = 0,$$

$$3xy' = 2,$$

$$3x \frac{dy}{dx} = 2, \quad | \cdot dx$$

$$3x dy = 2 dx, \quad | : x$$

$$3 dy = \frac{2 dx}{x},$$

$$\int 3 dy = \int \frac{2 dx}{x},$$

$$3y = 2 \ln x + C,$$

$$y = \frac{2}{3} \ln x + C \text{ – общее решение в явном виде}$$

Проверка:

$$3xy' - 2 = 0$$

$$3x \left(\frac{2}{3} \ln x + C \right)' - 2 = 0,$$

$$3x \left(\frac{2}{3x} + 0 \right) - 2 = 0,$$

$$2 - 2 = 0,$$

$$0 = 0.$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры решения ДУ с разделяющимися переменными

2) Найти **частное** решение дифференциального уравнения

$$x^2 y' \sin y = 2, \quad \text{при } y(1) = 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} \sin y = 2, \quad | \cdot dx$$

$$x^2 \sin y dy = 2 dx, \quad | : x^2$$

$$\sin y dy = \frac{2 dx}{x^2},$$

$$\int \sin y dy = 2 \int x^{-2} dx,$$

$$-\cos y = -\frac{2}{x} + C \Rightarrow y = \arccos \left(\frac{2}{x} - C \right) \quad \text{-- общее решение}$$

$$\text{При } y(1) = 0, \text{ т.е. } \cos 0 = \frac{2}{1} - C \Rightarrow C = 2 - 1 = 1$$

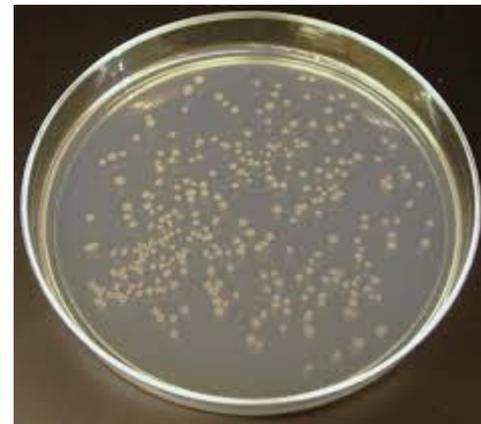
$$y = \arccos \left(\frac{2}{x} - 1 \right) = \arccos \left(\frac{2-x}{x} \right) \quad \text{-- частное решение}$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры решения ДУ с разделяющимися переменными

- 3) В начальный момент времени в чашке Петри было 10 бактерий. Сколько их станет при поддержании благоприятных условий через 1 час, если деления происходят в среднем через каждые 20 минут.

Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. За небольшой промежуток времени Δt их количество возрастет на величину



$$\Delta N = rN \Delta t \Rightarrow dN = rN dt \Rightarrow \frac{dN}{dt} = rN$$

Данный процесс описывает ДУ $N' - rN = 0$, $N(0) = 10$

Постоянная деления $r = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ (мин}^{-1}\text{)}$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Примеры решения ДУ с разделяющимися переменными

$$N' - \frac{N}{20} = 0, \quad N(0) = 10$$

$$N = C e^{\frac{t}{20}} - \text{общее решение}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N}{20},$$

При $t = 0, N = 10$, поэтому

$$20 \frac{dN}{N} = dt,$$

$$10 = C e^{\frac{0}{20}} = C e^0 = C$$

$$20 \int \frac{dN}{N} = \int dt,$$

$$N = 10 e^{\frac{t}{20}} - \text{частное решение}$$

$$20 \ln N = t + C,$$

Через 1 час (60 мин) в чашке Петри будет около

$$\ln N = \frac{t}{20} + \ln C,$$

$$N(60) = 10 e^{\frac{60}{20}} = 10 e^3 \approx 200 \text{ бактерий.}$$

$$\ln \frac{N}{C} = \frac{t}{20},$$

Ответ: 200 бактерий.

ВЫВОДЫ:

- рассмотрены основы дифференциального и интегрального исчисления
- показаны его некоторые возможности для решения теоретических и практических задач.

Литература

1. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики.
2. Тимонюк В.А. Биофизика.
3. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика.
4. Чалий О.В. Медична і біологічна фізика.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!