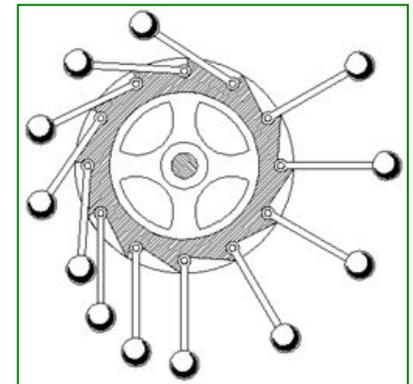


MECHANICS

Лекция #9
Гироскопы

21 Октября 2019 г.



Кафедра общей и экспериментальной физики

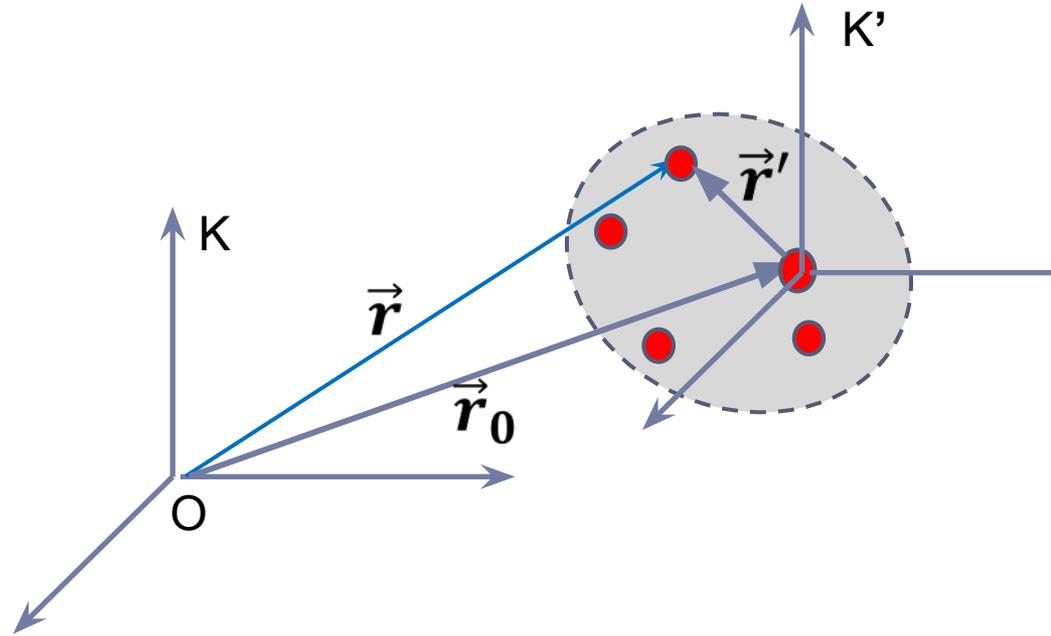
§. Уравнение Эйлера

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$\vec{L}(t, \vec{r})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + [\vec{\omega} \times \vec{L}]$$

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + [\vec{\omega} \times \vec{L}] = \vec{M} - \text{уравнение моментов в системе } K'$$



$$L_x = I_x \omega_x \quad L_y = I_y \omega_y \quad L_z = I_z \omega_z$$

Кафедра общей и экспериментальной физики

§. Уравнение Эйлера

$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + [\vec{\omega} \times \vec{L}] = \vec{M}$ – уравнение моментов в системе K'

$$[\vec{\omega} \times \vec{L}] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix}$$

$$I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + (\omega_y L_z - \omega_z L_y) = M_x$$

$$I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + (\omega_z L_x - \omega_x L_z) = M_y$$

$$I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (\omega_x L_y - \omega_y L_x) = M_z$$

Кафедра общей и экспериментальной физики

§. Уравнение Эйлера

$$L_x = I_x \omega_x \quad L_y = I_y \omega_y \quad L_z = I_z \omega_z$$

$$I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + (\omega_y L_z - \omega_z L_y) = M_x$$

$$I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + (\omega_z L_x - \omega_x L_z) = M_y$$

$$I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (\omega_x L_y - \omega_y L_x) = M_z$$

$$I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_z \omega_y (I_z - I_y) = M_x$$

$$I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) = M_y$$

$$I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = M_z$$

Кафедра общей и экспериментальной физики

4. Уравнение Эйлера

Теорема: невозможно такое свободное движение твердого тела ($M = 0$), при котором угловая ось сохраняет свое абсолютное значение и ориентацию относительно тела, но не совпадает по направлению ни с одной из центральных главных осей с разными моментами инерции.

$$I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_z \omega_y (I_z - I_y) = M_x$$

$$I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) = M_y$$

$$I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = M_z$$

Пусть все $M=0$,
 ω - const

$$\omega_z \omega_y (I_z - I_y) = 0 \quad \omega_x \omega_z (I_x - I_z) = 0 \quad \omega_y \omega_x (I_y - I_x) = 0$$

Вывод: Одновременно две проекции ω должны быть =0!

Таким образом, ω совпадает по направлению с одной из главных осей.

Кафедра общей и экспериментальной физики

4. Нутация

Нута́ция (от лат. nutatio «колебание; качание, кивание») — слабое нерегулярное движение вращающегося твёрдого тела, совершающего прецессию. Напоминает «подрагивание» оси вращения и заключается в слабом изменении так называемого угла **нутации** между осями собственного и прецессионного вращения тела.

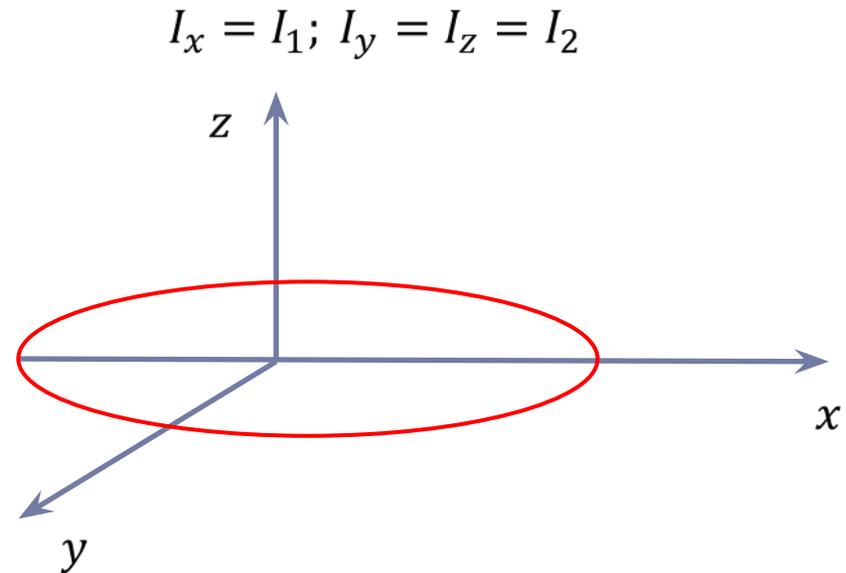
$$I_1 \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = 0$$

$$I_2 \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_x \omega_z (I_1 - I_2) = 0$$

$$I_2 \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (I_2 - I_1) = 0$$

Решение 1:

$$\omega_x = \omega_1; \omega_y = \omega_z = 0$$



Кафедра общей и экспериментальной физики

4. Нутация

$$I_1 \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = 0$$

$$I_2 \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_x \omega_z (I_1 - I_2) = 0$$

$$I_2 \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (I_2 - I_1) = 0$$

$$I_x = I_1; I_y = I_z = I_2$$

$$\alpha = \left(\frac{I_1}{I_2} - 1 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \alpha \omega_x \omega_z = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial t} - \alpha \omega_x \omega_y = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

Умножим (2) на $(\pm i)$ и сложим с (1)

$$\frac{\partial (\omega_y \pm i \omega_z)}{\partial t} \mp \alpha \omega_1 (\omega_y \pm i \omega_z) = 0 \quad (\omega_y + i \omega_z) = \omega_{\pm}$$

Кафедра общей и экспериментальной физики

4. Нутация

$$I_x = I_1; I_y = I_z = I_2$$

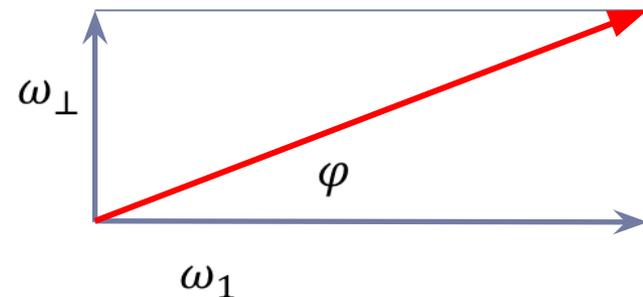
$$\alpha = \left(\frac{I_1}{I_2} - 1 \right)$$

$$I_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial t} \mp \beta \omega_{\pm} = 0 \quad (3) \quad \omega_{\pm} = (\omega_y + i\omega_z); \beta = \alpha \omega_1$$

$$\omega_{\pm} = C e^{\pm i\gamma t} = C(\cos \gamma t \pm i \sin \gamma t) \quad (4), \quad \gamma = \frac{1}{\beta}$$

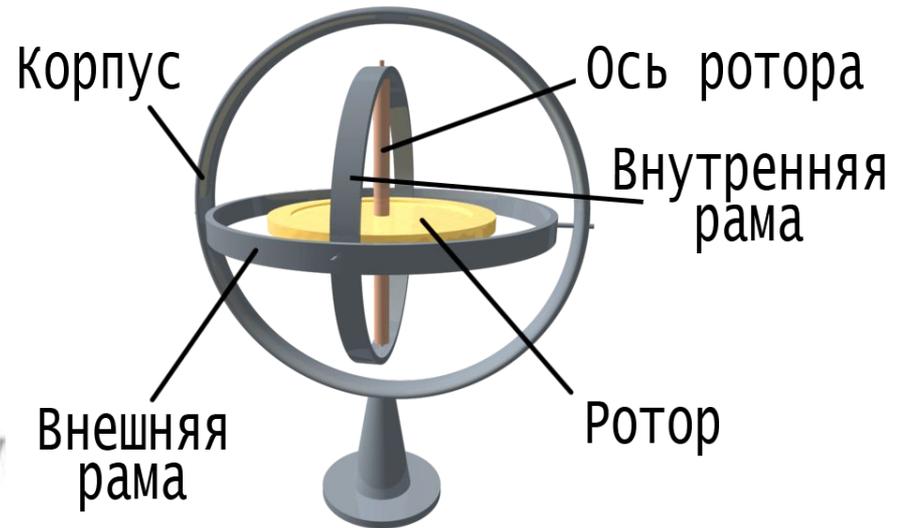
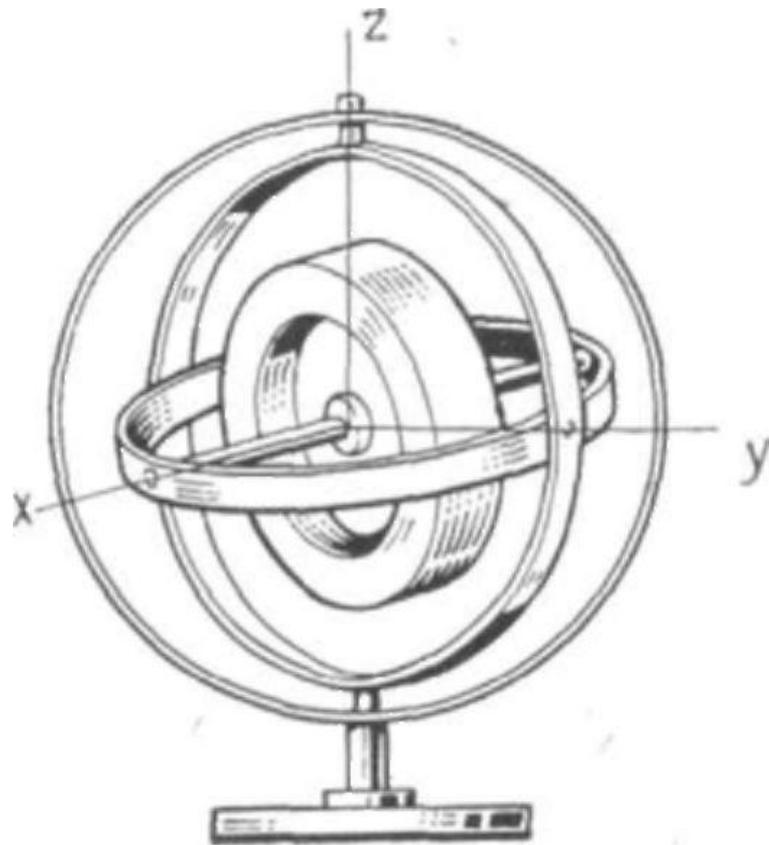
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_{\pm}}{\omega_1}$$



Кафедра общей и экспериментальной физики

§. Гироскопы

Твердое тело аксиальной симметрии, приведенное в быстрое вращение



Кафедра общей и экспериментальной физики

§. Свободный Гироскоп

Все три оси гироскопа свободные

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

$\vec{M} = 0$, уравновешенный гироскоп

\vec{L} - const.



Кафедра общей и экспериментальной физики

§. Свободный Гироскоп

$\vec{M} \neq 0$, неуравновешенный гироскоп

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

$$M = Fa$$

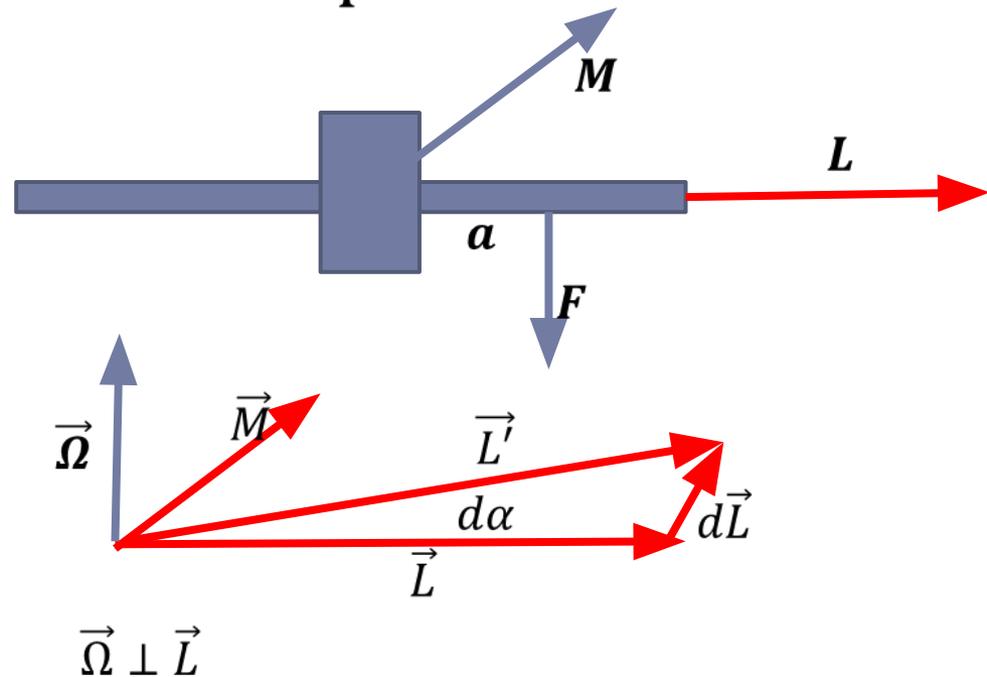
$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

$$d\vec{L} = \vec{L} d\alpha$$

$$L d\alpha = M dt \quad \Omega = \frac{M}{I\omega}$$

$$\vec{M} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}]$$

$$\vec{M}' = [\vec{L} \times \vec{\Omega}] \quad \text{Момент гироскопических сил}$$



Кафедра общей и экспериментальной физики

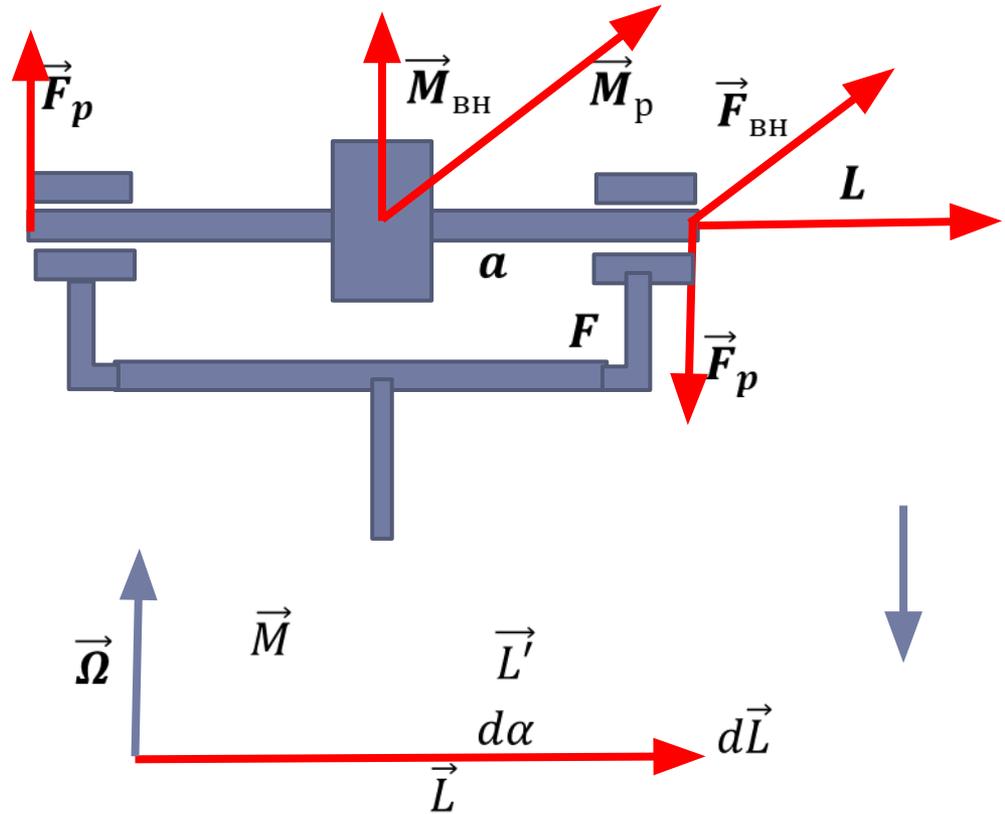
§. Несвободный Гироскоп

\vec{F}_p - гироскопические силы

Под действием \vec{F}_{BH}
ось гироскопа
стремится
повернуться вверх
стремясь стать по
направлению \vec{M}_{BH}
гироскопические силы
препятствуют этому,
создавая момент

$$\vec{M}_p$$

$$d\vec{L} \parallel \vec{M}_p \parallel \vec{F}_{BH}$$



Кафедра общей и экспериментальной физики

§. Применение Гироскопов



Кафедра общей и экспериментальной физики

§. Гироскопы



Кафедра общей и экспериментальной физики

§. Гироскопы







