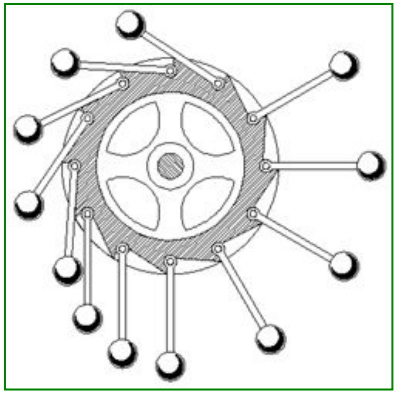
Кафедра общей и экспериментальной физики

MECHANICS

Лекция #9
Гироскопы

21 Октября 2019 г.



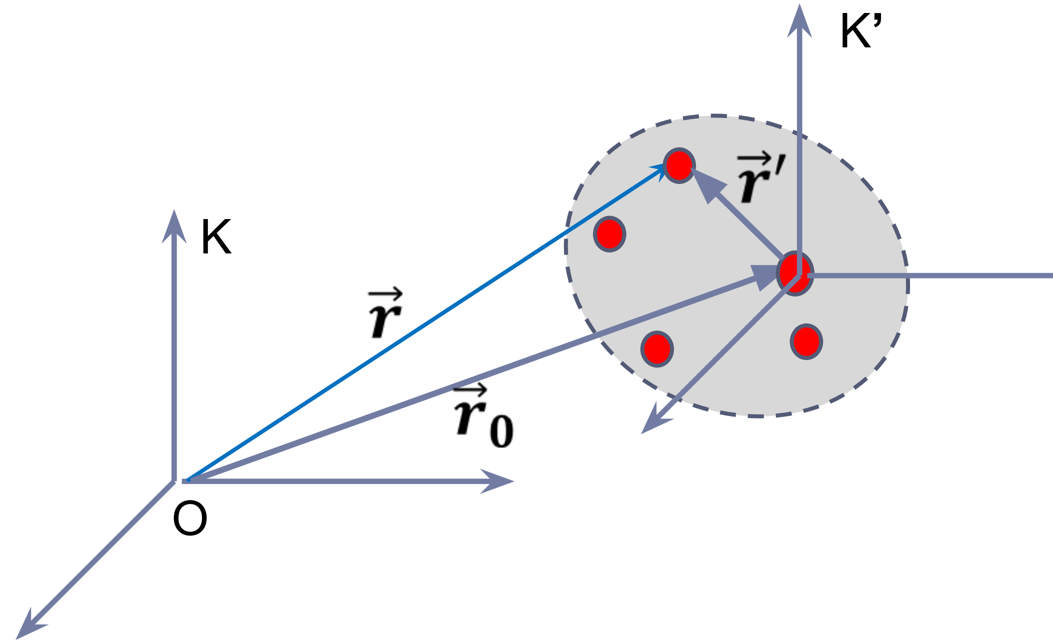
§. Уравнение Эйлера

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}(t, \vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{L}}}{\partial t} + [\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{L}}]$$

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{L}}}{\partial t} + [\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{L}}] = \vec{\boldsymbol{M}} - \text{уравнение моментов в системе К}'$$



$$L_x = I_x \omega_x \qquad L_y = I_y \omega_y \qquad L_z = I_z \omega_z$$

§. Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{L}}}{\partial t} + [\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{L}}] = \vec{\boldsymbol{M}}$$ – уравнение моментов в системе К′

$$[\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{L}}] = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix}$$

$$I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + (\omega_y L_z - \omega_z L_y) = M_x$$

$$I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + (\omega_z L_x - \omega_x L_z) = M_y$$

$$I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (\omega_x L_y - \omega_y L_x) = M_z$$

§. Уравнение Эйлера

$$L_x = I_x \omega_x \qquad L_y = I_y \omega_y \qquad L_z = I_z \omega_z$$

$$I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \left(\omega_y L_z - \omega_z L_y\right) = M_x$$
$$I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + (\omega_z L_x - \omega_x L_z) = M_y$$
$$I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \left(\omega_x L_y - \omega_y L_x\right) = M_z$$

$$I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_z \omega_y \left(I_z - I_y\right) = M_x$$
$$I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) = M_y$$
$$I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y \left(I_y - I_x\right) = M_z$$

4. Уравнение Эйлера

Теорема: невозможно такое свободное движение твердого тела ($M = 0$), при котором угловая ось сохраняет свое абсолютное значение и ориентацию относительно тела, но не совпадает по направлению ни с одной из центральных главных осей с разными моментами инерции.

$$I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \omega_z \omega_y (I_z - I_y) = M_x$$

$$I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_x \omega_z (I_x - I_z) = M_y$$

$$I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = M_z$$

Пусть все M=0,
ω- const

$$\omega_z \omega_y (I_z - I_y) = 0 \quad \omega_x \omega_z (I_x - I_z) = 0 \quad \omega_y \omega_x (I_y - I_x) = 0$$

Вывод: Одновременно две проекции ω должны быть =0!
Таким образом, **ω** совпадает по направлению с одной из главных осей.

4. Нутация

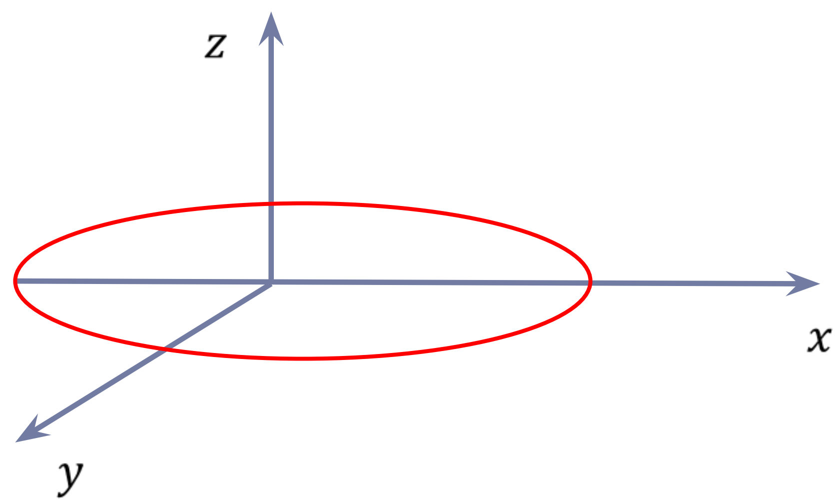
Нута́ция (от лат. nutatio «колебание; качание, кивание») — слабое нерегулярное движение вращающегося твёрдого тела, совершающего прецессию. Напоминает «подрагивание» оси вращения и заключается в слабом изменении так называемого угла **нутации** между осями собственного и прецессионного вращения тела.

$$I_1 \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = 0$$

$$I_2 \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_x \omega_z (I_1 - I_2) = 0$$

$$I_2 \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (I_2 - I_1) = 0$$

$$I_x = I_1;\ I_y = I_z = I_2$$



Решение 1:

$$\omega_x = \omega_1;\ \omega_y = \omega_z = 0$$

4. Нутация

$$I_1 \frac{\partial \omega_x}{\partial t} = 0$$

$$I_2 \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \omega_x \omega_z (I_1 - I_2) = 0$$

$$I_2 \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \omega_x \omega_y (I_2 - I_1) = 0$$

$$I_x = I_1;\ I_y = I_z = I_2$$

$$\alpha = \left(\frac{I_1}{I_2} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega_y}{\partial t} + \alpha \omega_x \omega_z = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial \omega_z}{\partial t} - \alpha \omega_x \omega_y = 0 & (2) \end{cases}$$

Умножим (2)на $(\pm i)$и сложим с (1)

$$\frac{\partial(\omega_y \pm i\omega_z)}{\partial t} \mp \alpha\omega_1(\omega_y \pm i\omega_z) = 0 \qquad (\omega_y + i\omega_z) = \omega_\pm$$

4. Нутация

$$I_x = I_1;\ I_y = I_z = I_2$$

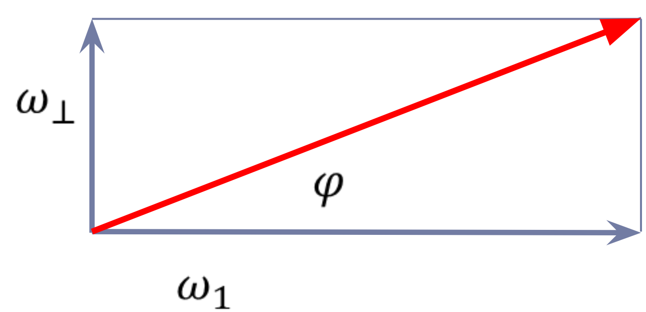
$$I_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} = 0$$

$$\alpha = \left(\frac{I_1}{I_2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial \omega_\pm}{\partial t} \mp \beta\omega_\pm = 0 \qquad (3) \qquad \omega_\pm = (\omega_y + i\omega_z);\ \beta = \alpha\omega_1$$

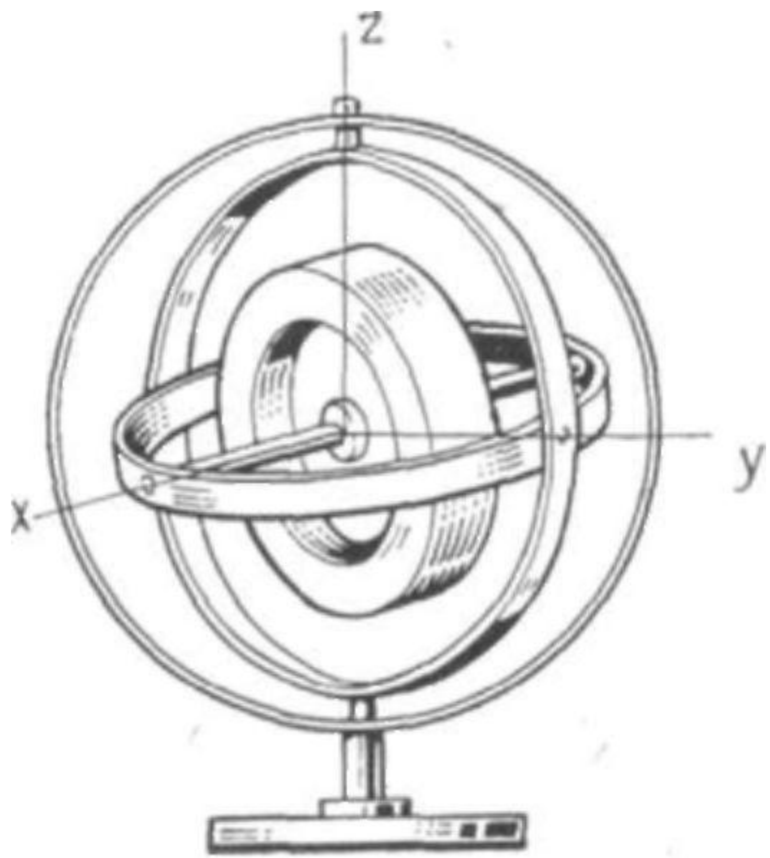
$$\omega_\pm = Ce^{\pm i\gamma t} = C(cos\gamma t \pm isin\gamma t)\ (4), \qquad \gamma = \frac{1}{\beta}$$

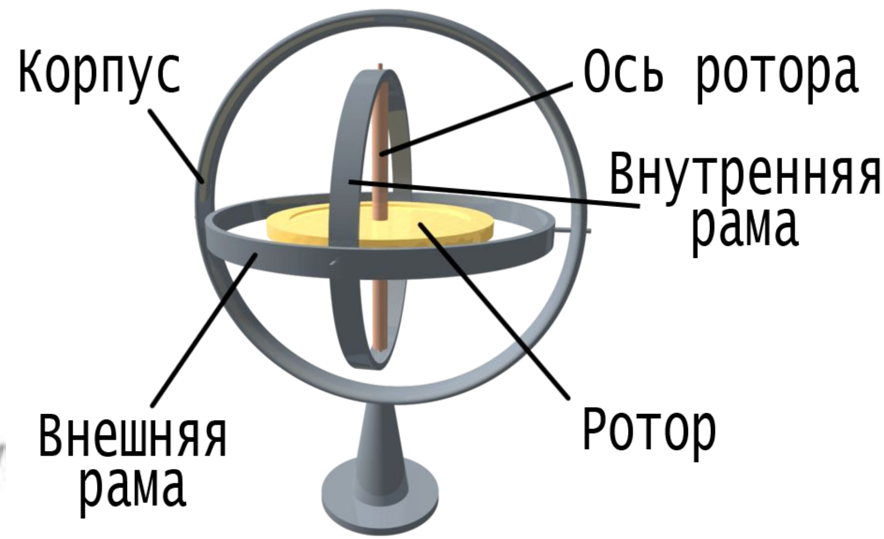
$$tg\varphi = \frac{\omega_\pm}{\omega_1}$$



§. Гироскопы

Твердое тело аксиальной симметрии, приведенное в быстрое вращение





§. Свободный Гироскоп

Все три оси гироскопа свободные

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

$$\vec{M} = 0, \text{уравновешенный гироскоп}$$

$\vec{L}$ - const.

§. Свободный Гироскоп

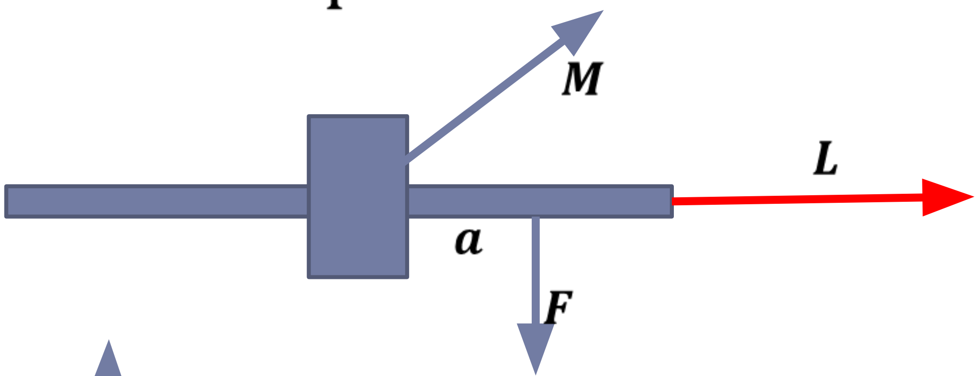
$\vec{M} \neq 0,$ неуравновешенный гироскоп

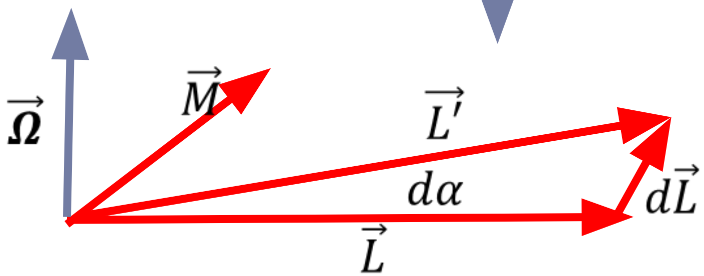
$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

$$M = Fa$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

$$d\vec{L} = \vec{L}d\alpha$$





$Ld\alpha = Mdt$ $\quad \Omega = \dfrac{M}{I\omega}$ $\quad \vec{\Omega} \perp \vec{L}$

$\vec{\boldsymbol{M}} = [\vec{\boldsymbol{\Omega}} \times \vec{\boldsymbol{L}}]$ $\quad \vec{\boldsymbol{M}}' = [\vec{\boldsymbol{L}} \times \vec{\boldsymbol{\Omega}}]$ Момент гироскопических сил

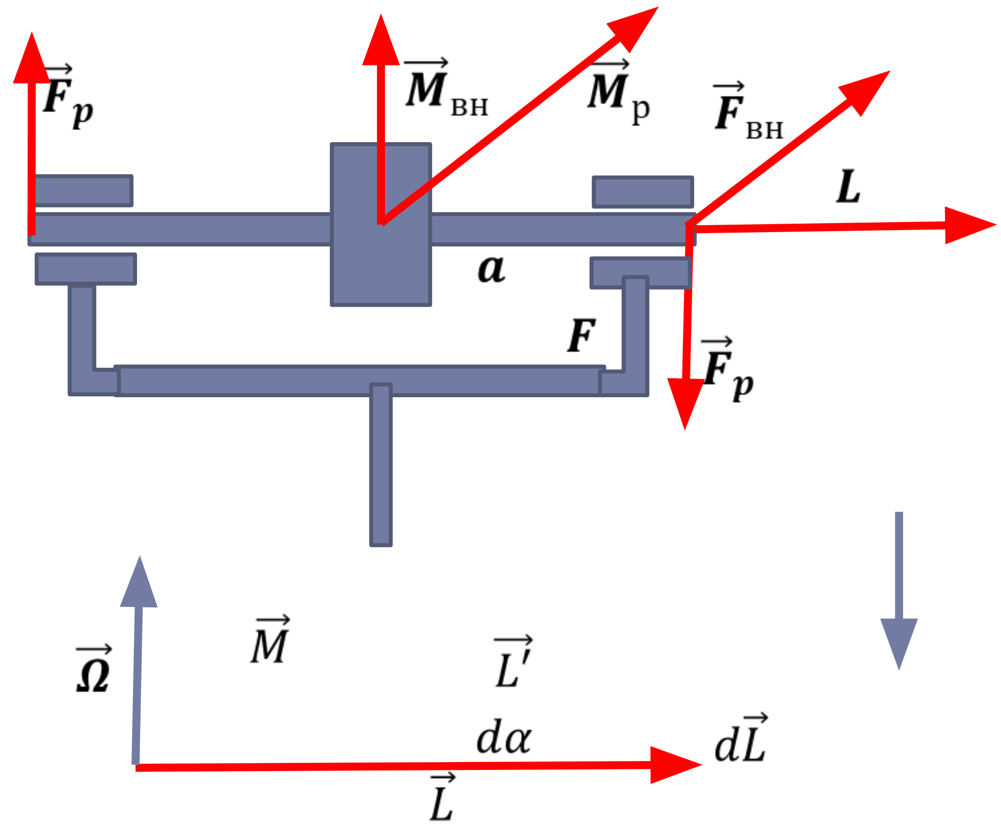
§. Несвободный Гироскоп

$\vec{F}_p$- гироскопические силы

Под действием $\vec{F}_{\text{вн}}$ ось гироскопа стремится повернуться вверх стремясь стать по направлению , $\vec{M}_{\text{вн}}$ гироскопические силы препятствуют этому, создавая момент

$\vec{M}_{\text{р}}$

$$d\vec{L} \parallel \vec{M}_p \parallel \vec{F}_{\text{вн}}$$



§. Применение Гироскопов

§. Гироскопы

§. Гироскопы


УНИВЕРСИТЕТ
@ ТГУ 2008