# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 4

## 2.7 Симметрические уравнения

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_nx^{n+1} + a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0, \quad (1)$$

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 = 0, \quad (2)$$

где $a_0 \neq 0$ называются *симметрическими уравнениями* соответственно нечетной и четной степеней. Симметрическое уравнение нечетной степени (1) всегда имеет корень $x = -1$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1} + 1) + a_1x(x^{2n-1} + 1) + \ldots + a_nx^n(x + 1) = 0.$$

После деления симметрического многочлена нечетной степени на $x+1$ получается симметрический многочлен четной степени. Симметрическое уравнение четной степени решается делением на $x^n$ и последующей заменой $x + \dfrac{1}{x}$ новой переменной.

**2.53.** *Решение.* Имеем симметрическое уравнение четвёртой степени. Перепишем уравнение, сгруппировав слагаемые с одинаковыми коэффициентами:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0 \iff x^4 + 1 - 5(x^3 + x) + 6x^2 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $x^2$:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0. \qquad (*)$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим, что $x^2+2+\dfrac{1}{x^2} = t^2$. Отсюда $x^2+\dfrac{1}{x^2} = t^2-2$. Подставим полученные выражения в уравнение $(*)$:

$$t^2 - 2 - 5t + 6 = 0 \iff t^2 - 5t + 4 = 0 \iff t = 1;\ 4.$$

Значит,

$$x+\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x\in\emptyset\ (D=1-4=-3<0);$$
$$x+\frac{1}{x}=4 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}.$$

*Ответ.* $2\pm\sqrt{3}$.

**2.54.** $x^6-9x^5+26x^4-33x^3+26x^2-9x+1=0.$

**2.59.** $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0.$

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_nx^{n+1} - a_nx^n - \ldots - a_1x - a_0 = 0, \quad (1')$$

$$a_0x^{2n} + \ldots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_0 = 0, \quad (2')$$

где $a_0 \neq 0$ называются *кососимметрическими уравнениями* соответственно нечетной и четной степеней. Кососимметрическое уравнение нечетной степени $(1')$ всегда имеет корень $x = 1$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1} - 1) + a_1x(x^{2n-1} - 1) + \ldots + a_nx^n(x - 1) = 0.$$

После деления кососимметрического многочлена нечетной степени на $x-1$ получается симметрический многочлен четной степени. Кососимметрическое уравнение четной степени решается делением на $x^n$ и последующей заменой $x - \dfrac{1}{x}$ новой переменной.

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1}+\ldots+a_nx^{n+1}+a_nx^n\lambda+a_{n-1}x^{n-1}\lambda^3+\ldots+a_1x\lambda^{2n-1}+a_0\lambda^{2n+1}=0, \quad (1'')$$

$$a_0x^{2n}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\lambda+\ldots+a_1x\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n=0, \quad (2'')$$

где $\lambda$ — фиксированное число и $a_0 \neq 0$ называются *возвратными уравнениями*. При $\lambda = 1$ уравнения $(1'')$ и $(2'')$ являются симметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней. Возвратное уравнение нечетной степени $(1'')$ всегда имеет корень $x = -\lambda$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1}+\lambda^{2n+1})+a_1x(x^{2n-1}+\lambda^{2n-1})+\ldots+a_nx^n(x+\lambda)=0.$$

После деления возвратного многочлена нечетной степени на $x+\lambda$ получается возвратный многочлен четной степени. Возвратное уравнение четной степени решается делением на $x^n$ и последующей заменой $x+\dfrac{\lambda}{x}$ новой переменной.

При $\lambda = -1$ уравнения $(1'')$ и $(2'')$ являются кососимметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней.

**2.55.** $x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 0.$

**2.56.** $x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$

# 3 Уравнения с модулем

Решение уравнений, содержащих модули, может быть проведено с помощью раскрытия модулей и последующего решения полученных уравнений в каждом из промежутков и выбора тех корней, которые попали в эти промежутки. Иногда более простые решения уравнений получаются, если мы будем заменять наше исходное уравнение некоторой эквивалентной системой или совокупностью уравнений. Для каждого вида уравнений будем в начале пункта предлагать такую эквивалентную систему или совокупность уравнений.

## 3.1 Уравнения вида $|f| = g$

Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$ можно проводить по одной из схем, приведенных ниже.

$$|f| = g \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0, \\ f = g, \end{cases} \\ \begin{cases} f \leq 0, \\ -f = g; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (1) \qquad |f| = g \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = g, \\ f = -g, \end{array}\right. \\ g \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

**3.1.** *Решение* I. Уравнение вида $|f| = g$ решим по схеме (1) п. 3.1

$$|x-3| = 2x \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x-3 = 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \leq 0, \\ -x+3 = 2x, \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ x = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 3, \\ x = 1, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset, \\ x = 1, \end{array}\right. \iff x = 1.$$

*Ответ.* 1.

*Решение* II. Уравнение вида $|f| = g$ решим по схеме (2) п. 3.1

$$|x-3| = 2x \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-3 = 2x, \\ x-3 = -2x, \end{array}\right. \\ 2x \geq 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \geq 0, \end{cases} \iff x = 1.$$

Видно, что в данном примере вторая схема решения оказалась существенно проще первой.

**3.2.** (МГУ, почвоведения, май 2001, 2(6))
$|2x+3| = x^2.$

**3.3.** (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 1(8))
$|2x-4|+4 = 2x.$

**3.4.** (МГУ, геологический, 1991, 2(6
$|x^2-2x-1|-x+1=0.$

**3.6.** (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2000, 1(6)
$3|x+1|+x^2+4x-3=0.$

**3.7.** $x^2-5|x|+6=0.$