

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 4

2.7 Симметрические уравнения

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_nx^{n+1} + a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (1)$$

$$a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + \dots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad (2)$$

где $a_0 \neq 0$ называются *симметрическими уравнениями* соответственно нечетной и четной степеней. Симметрическое уравнение нечетной степени (1) всегда имеет корень $x = -1$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1} + 1) + a_1x(x^{2n-1} + 1) + \dots + a_nx^n(x + 1) = 0.$$

После деления симметрического многочлена нечетной степени на $x + 1$ получается симметрический многочлен четной степени. Симметрическое уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x + \frac{1}{x}$ новой переменной.

2.53. Решение. Имеем симметрическое уравнение четвёртой степени. Перепишем уравнение, сгруппировав слагаемые с одинаковыми коэффициентами:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0 \iff x^4 + 1 - 5(x^3 + x) + 6x^2 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на x^2 :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0. \quad (*)$$

Обозначим $x + \frac{1}{x} = t$. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим, что $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$. Отсюда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Подставим полученные выражения в уравнение (*):

$$t^2 - 2 - 5t + 6 = 0 \iff t^2 - 5t + 4 = 0 \iff t = 1; 4.$$

Значит,

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset (D = 1 - 4 = -3 < 0);$$

$$x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Ответ. $2 \pm \sqrt{3}$.

2.54. $x^6 - 9x^5 + 26x^4 - 33x^3 + 26x^2 - 9x + 1 = 0.$

2.59. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0.$

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_nx^{n+1} - a_nx^n - \dots - a_1x - a_0 = 0, \quad (1')$$

$$a_0x^{2n} + \dots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + \dots + (-1)^na_0 = 0, \quad (2')$$

где $a_0 \neq 0$ называются *кососимметрическими уравнениями* соответственно нечетной и четной степеней. Кососимметрическое уравнение нечетной степени (1') всегда имеет корень $x = 1$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1} - 1) + a_1x(x^{2n-1} - 1) + \dots + a_nx^n(x - 1) = 0.$$

После деления кососимметрического многочлена нечетной степени на $x - 1$ получается симметрический многочлен четной степени. Кососимметрическое уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x - \frac{1}{x}$ новой переменной.

Уравнения вида

$$a_0x^{2n+1} + \dots + a_nx^{n+1} + a_nx^n\lambda + a_{n-1}x^{n-1}\lambda^3 + \dots + a_1x\lambda^{2n-1} + a_0\lambda^{2n+1} = 0, \quad (1'')$$

$$a_0x^{2n} + \dots + a_{n-1}x^{n+1} + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}\lambda + \dots + a_1x\lambda^{n-1} + a_0\lambda^n = 0, \quad (2'')$$

где λ — фиксированное число и $a_0 \neq 0$ называются *возвратными уравнениями*. При $\lambda = 1$ уравнения (1'') и (2'') являются симметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней. Возвратное уравнение нечетной степени (1'') всегда имеет корень $x = -\lambda$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$a_0(x^{2n+1} + \lambda^{2n+1}) + a_1x(x^{2n-1} + \lambda^{2n-1}) + \dots + a_nx^n(x + \lambda) = 0.$$

После деления возвратного многочлена нечетной степени на $x + \lambda$ получается возвратный многочлен четной степени. Возвратное уравнение четной степени решается делением на x^n и последующей заменой $x + \frac{\lambda}{x}$ новой переменной.

При $\lambda = -1$ уравнения (1'') и (2'') являются кососимметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней.

2.55. $x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 0.$

2.56. $x^4 - x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$

3 Уравнения с модулем

Решение уравнений, содержащих модули, может быть проведено с помощью раскрытия модулей и последующего решения полученных уравнений в каждом из промежутков и выбора тех корней, которые попали в эти промежутки. Иногда более простые решения уравнений получаются, если мы будем заменять наше исходное уравнение некоторой эквивалентной системой или совокупностью уравнений. Для каждого вида уравнений будем в начале пункта предлагать такую эквивалентную систему или совокупность уравнений.

3.1 Уравнения вида $|f| = g$

Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$ можно проводить по одной из схем, приведенных ниже.

$$|f| = g \iff \begin{cases} f \geq 0, \\ f = g, \\ f \leq 0, \\ -f = g; \end{cases} \quad (1) \quad |f| = g \iff \begin{cases} \begin{cases} f = g, \\ f = -g, \end{cases} \\ g \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

3.1. Решение I. Уравнение вида $|f| = g$ решим по схеме (1)
п. 3.1

$$\begin{aligned} |x - 3| = 2x &\iff \begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x - 3 = 2x, \\ x - 3 \leq 0, \\ -x + 3 = 2x, \end{cases} &\iff \begin{cases} x \geq 3, \\ x = -3, \\ x \leq 3, \\ x = 1, \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \emptyset, \\ x = 1, \end{cases} &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Ответ. 1.

Решение II. Уравнение вида $|f| = g$ решим по схеме (2) п. 3.1

$$|x - 3| = 2x \iff \begin{cases} \begin{cases} x - 3 = 2x, \\ x - 3 = -2x, \\ 2x \geq 0, \end{cases} &\iff \begin{cases} \begin{cases} x = -3, \\ x = 1, \\ x \geq 0, \end{cases} &\iff x = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Видно, что в данном примере вторая схема решения оказалась существенно проще первой.

3.2. (МГУ, почвоведения, май 2001, 2(6))

$$|2x + 3| = x^2.$$

3.3. (МГУ, Московская школа экономики, 2005, 1(8))

$$|2x - 4| + 4 = 2x.$$

3.4. (МГУ, геологический, 1991, 2(6))

$$|x^2 - 2x - 1| - x + 1 = 0.$$

3.6. (МГУ, экономический (отд. менеджмента), 2000, 1(6))

$$3|x + 1| + x^2 + 4x - 3 = 0.$$

3.7. $x^2 - 5|x| + 6 = 0.$