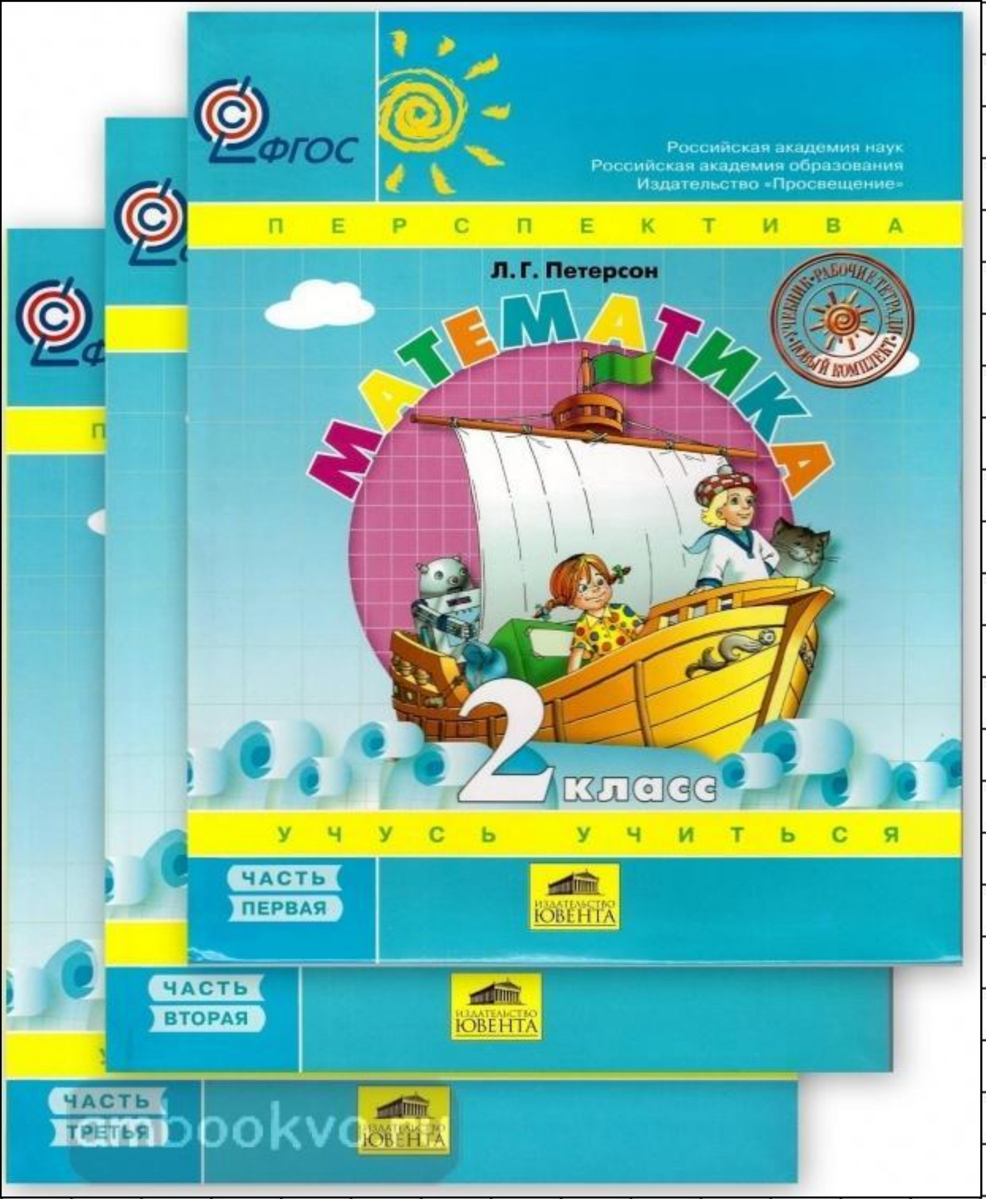
15. Каково содержание функциональной пропедевтики в начальной школе, 5–6-х классах, в начале курса алгебры?

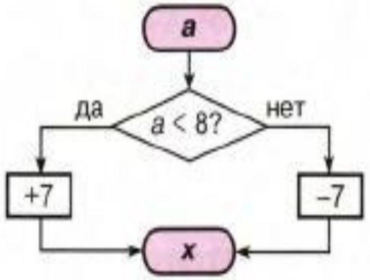
Л.Г. Петерсон. Математика. 2 класс. Часть 2,3.



Л.Г. Петерсон. Математика. 2 класс. Часть 2.

8 Игра «Вычислительные машины»

Выполни вычисления по алгоритму, заданному блок-схемой. Запиши значения ***x*** в тетради.



a	3	5	7	8	10	11	13	15
x								

Чтобы измерить любую величину, надо выбрать **мерку** (единицу измерения) и узнать, сколько раз она содержится в измеряемой величине.

Сравнивать, складывать и вычитать величины можно только тогда, когда они измерены одинаковыми мерками.

4 Сколько клеточек в фигуре? Сколько полосок? Какая это величина?

$m = \dots a$ $m = \dots b$ $m = \dots c$

Площадь – это величина, которая показывает, сколько места фигура занимает на плоскости.

8 а) Составь в тетради таблицу. Что ты замечаешь?

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a + *a*											
a · 2											

б) По таблице реши примеры:

8 · 2 6 · 2 9 · 2 3 · 2 5 · 2 7 · 2

в) Вычисли, пользуясь таблицей:

25 + (9 + 9) 68 + (7 + 7) 39 + (5 + 5)

Запиши эти же выражения, пользуясь знаком умножения. В каком порядке выполнять действия? Нужны ли скобки?

2 Что нужно поставить в пустые клетки таблицы?

a	9	18	0	24	6	12	27	3	15	3	30
a : 3											

Л.Г. Петерсон. Математика. 2 класс. Часть 3.

8 Составь таблицу в тетради:

	a	1	4	8	2	5	9	7	3	6
Больше в 5 раз										
Больше на 5										

2 Найди пропущенные числа:

а)

Множитель		9	3	7	5		9	5	4		7	*a*
Множитель	6	4		5		2		5		5		*b*
Произведение	30		15		40	16	45		16	20	28	*S*

б)

Делимое	5		20		32	25		35	24		20	*S*
Делитель	1	9		5	4		5	7		2		*a*
Частное		5	4	8		5	3		6	5	4	*b*

14 Найди наименьшее число монет, которыми можно выдать сдачу.

Надо заплатить	**Дали кассиру**	**Сдача**
2 руб. 40 коп.		?
4 руб. 25 коп.		?
8 руб. 50 коп.		?

Л.Г. Петерсон. Математика. 3 класс. Часть 2,3.

Л.Г. Петерсон. Математика. 3 класс. Часть 2.

Содержание

24 УРОК

Выражение с переменной

Задача. Дима и Саша занимаются теннисом. Дима ходит на занятия 4 дня в неделю, а Саша — на x дней в неделю больше. Сколько раз в неделю занимается теннисом Саша?

Решением этой задачи является буквенное выражение $4 + x$ с переменной x. Так как в неделе 7 дней, то x может принимать значения 1, 2 и 3.

Подставим в выражение $4 + x$ вместо x числа 1, 2 и 3. Получатся числовые выражения $4 + 1$, $4 + 2$ и $4 + 3$, значения которых равны соответственно 5, 6 и 7:

$x = 1$ $\quad 4 + x = 4 + 1 = 5$

$x = 2$ $\quad 4 + x = 4 + 2 = 6$

$x = 3$ $\quad 4 + x = 4 + 3 = 7$

Это значит, что если Саша занимается на 1 раз в неделю больше Димы, то у него в неделю 5 занятий, если на 2 раза больше — то 6 занятий, а если на 3 раза больше — то 7 занятий. Числа 5, 6 и 7 образуют множество значений выражения $4 + x$.

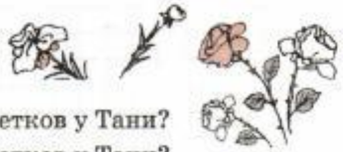
Буквенное выражение может содержать также две, три и более переменных. Например, в выражении $a - b - 15$ две переменные — a и b.

1 Прочитай задачи из списка:

1) У Тани 3 розы и 5 пионов. Сколько цветков у Тани?

2) У Тани 3 розы и 4 пиона. Сколько цветков у Тани?

3) У Тани 3 розы и 2 пиона. Сколько цветков у Тани?



Составь с помощью переменной k задачу, которая объединит все три задачи в одну:

У Тани ... розы и ... пионов. Сколько цветков у Тани?

Что означает выражение $3 + k$? Какие значения может принимать в нём переменная k?

2 Прочитай задачу: «В первой коробке 6 карандашей, а во второй в n раз больше. Сколько карандашей во второй коробке?» Составь полный список задач, если n принимает значения 2, 4 и 8. Составь выражения по условию каждой задачи.

$6 \cdot n$

3 Подставь вместо переменной a какое-нибудь значение в задачу: «Ира купила 3 конфеты и a из них съела. Сколько конфет у неё осталось?» Какие значения может принимать переменная a?

4 Найди значения выражений. Составь задачи, решением которых могут служить эти выражения.

а) $38 + y$, если $y = 92$;

б) $m \cdot 15$, если $m = 60$;

в) $x - 65$, если $x = 140$;

г) $5400 : a$, если $a = 60$.

5 Заполни таблицы. Запиши для каждого выражения множество его значений для указанных значений переменной с помощью фигурных скобок.

1)

Значение переменной m	Значение выражения $m \cdot 3$
0	
6	
12	
18	
24	

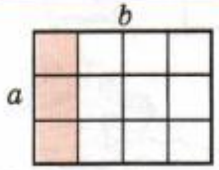
2)

Значение переменной p	Значение выражения $p : 11$
0	
22	
44	
66	
88	

6 Найди множество значений выражения $80 \cdot x$ для всех значений переменной x из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 56\}$.

7 Найди значения выражений $a - (b + c)$ и $a - b - c$, если $a = 5308$, $b = 924$, $c = 3785$. Что ты замечаешь? Как объяснить полученный результат?

30 УРОК Формулы



Пусть стороны прямоугольника равны a и b. Обозначим S его площадь. Так как **площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины**, то можно записать:

$$S = a \cdot b$$

Чтобы найти периметр P прямоугольника, надо сложить все его стороны. Поскольку противоположные стороны прямоугольника равны, то

$$P = a \cdot 2 + b \cdot 2, \quad \text{или} \quad P = (a + b) \cdot 2$$

Приведённые равенства устанавливают взаимосвязи между величинами. Они верны при всех значениях входящих в них букв. Их называют **формулами**.

Формулы помогают вычислять значения одной из величин по известным значениям остальных величин. Например, из формулы площади прямоугольника следует:

$$a = S : b \qquad b = S : a \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

Значит, **чтобы найти неизвестную сторону прямоугольника, можно его площадь разделить на известную сторону.**

Задача 1. Найти площадь и периметр прямоугольника со сторонами 8 см и 4 см.

Решение:
$8 \cdot 4 = 32$ (см²) — площадь.
$(8 + 4) \cdot 2 = 24$ (см) — периметр.

Задача 2. Площадь прямоугольника 20 дм², а его сторона 5 дм. Найти вторую сторону.

Решение:
$20 : 5 = 4$ (дм).

1 Найди площадь и периметр прямоугольника со сторонами:

а) 6 м и 9 м; б) 58 дм и 70 дм; в) 30 см и 80 см.

5 Пусть сыну c лет, а отцу p лет. Отец старше сына на 21 год. Заполни таблицу и запиши формулу, устанавливающую взаимосвязь между возрастом отца и возрастом сына.

c	1	3		14	
p	22		28		42

$p =$ ______

Во сколько раз отец старше сына, если отцу исполнилось 22 года, 24 года, 28 лет, 42 года?

6 Рассмотри по таблице взаимосвязь между величинами x и y. Запиши формулу, выражающую y через x.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	9	10	11	12	13	14	15

$y =$ ______

x	1	2	3	4	5	6	7
y	6	12	18	24	30	36	42

$y =$ ______

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	4	9	16	25	36	49

$y =$ ______

Для приведённых взаимосвязей между величинами x и y придумай подходящие примеры.

8 При каких значениях a верны равенства:

$a + 0 = 0 + a = a$

$a - 0 = a$
$a - a = 0$

$a : 1 = a$
$a : a = 1$
$0 : a = 0$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

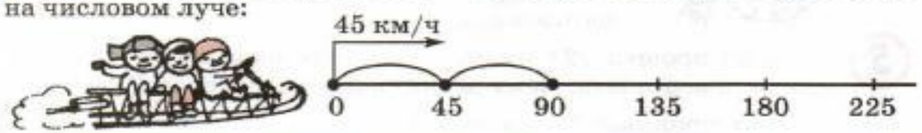
Объясни смысл этих равенств.

Л.Г. Петерсон. Математика. 3 класс. Часть 3.

Содержание

2 УРОК **Формула пути**

1 Аэросани едут со скоростью $v = 45$ км/ч. Покажи их движение на числовом луче:



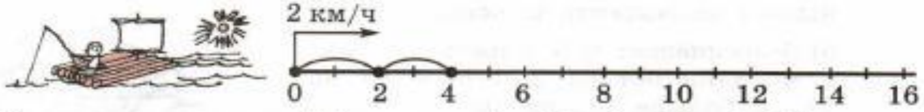
Какое расстояние преодолеют аэросани за 1 ч, 2 ч, 3 ч, 4 ч, t ч? Заполни таблицу и напиши формулу, выражающую зависимость пройденного расстояния s от времени t.

Время (t ч)	1	2	3	4	t
Расстояние (s км)					

$v = 45$ км/ч

$s =$ ______

2 По реке плывёт плот со скоростью $v = 2$ км/ч. Покажи его движение на числовом луче:



Какое расстояние пройдёт плот за 1 ч, 3 ч, 5 ч, 7 ч, t ч? Заполни таблицу и запиши зависимость s от t.

Время (t ч)	1	3	5	7	t
Расстояние (s км)					

$v = 2$ км/ч

$s =$ ______

3 Как найти расстояние s, пройденное объектом за время t, если объект движется со скоростью v?

Пусть v — скорость движения, t — время движения и s — расстояние, пройденное за время t. Равенство $s = v \cdot t$, устанавливающее зависимость между этими величинами, называется **формулой пути**. Формула пути означает, что **расстояние равно скорости, умноженной на время:**

$$s = v \cdot t$$

(Для записи формулы пути используются строчные буквы s, v и t, чтобы не путать их с обозначением площади — S и объёма — V.)

Из формулы пути по правилу нахождения неизвестного множителя следует, что $v = s : t$, $t = s : v$.

— Скорость равна расстоянию, делённому на время.
— Время движения равно расстоянию, делённому на скорость.

4 Используя формулу пути $s = v \cdot t$, заполни таблицу:

а)

s	v	t
?	5 м/с	9 с
48 км	?	6 ч
21 м	7 м/мин	?

б)

s	v	t
320 км	?	80 ч
810 м	9 м/мин	?
?	60 м/с	50 с

5 Реши задачи по формуле пути $s = v \cdot t$.

а) Всадник едет на лошади со скоростью 8 км/ч. Какое расстояние он проедет за 4 часа?

s	v	t

б) Чему равна скорость почтового голубя, если за 2 ч он пролетает 120 км?

s	v	t

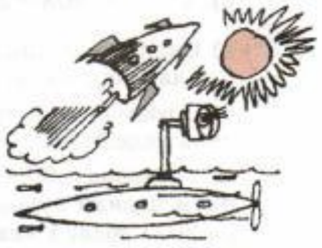
в) Пчела летит со скоростью 6 м/с. За какое время она долетит до улья, если находится на расстоянии 360 м от него?

s	v	t

6 а) Космический корабль движется со скоростью 9 км/с. За какое время он пролетит 441 км?

б) Сколько метров проплывёт окунь за 8 мин, если будет плыть со скоростью 80 м/мин?

в) Подводная лодка проплыла 228 км за 6 ч. Чему равна её скорость?



Л.Г. Петерсон. Математика. 4 класс. Часть 2,3.

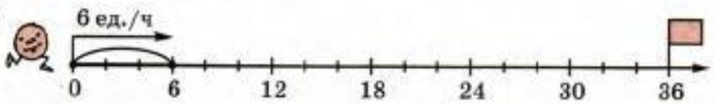
Л.Г. Петерсон. Математика. 4 класс. Часть 2.

Содержание

2 Игра "Движущиеся точки".

Определи по рисунку, откуда вышли движущиеся точки и с какой скоростью они идут. Изобрази их движение на координатном луче. Найди зависимость координаты x движущейся точки от времени ее движения t. (Напомним, что координата точки равна ее расстоянию от начала луча.)

а)

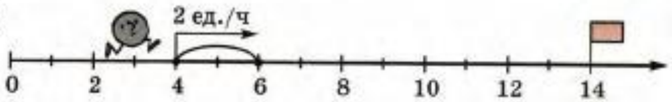


t ч	0	1	2	3	4	5	6	t
s ед.	0	6						
x	0	6						

$s =$ ______

$x =$ ______

б)

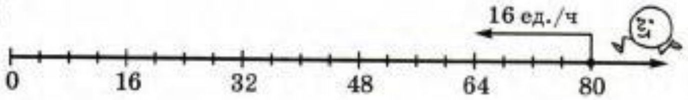


t ч	0	1	2	3	4	5	t
s ед.	0	2					
x	4	6					

$s =$ ______

$x =$ ______

в)

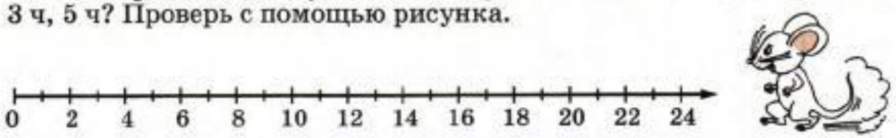


t ч	0	1	2	3	4	5	t
s ед.	0						
x	80						

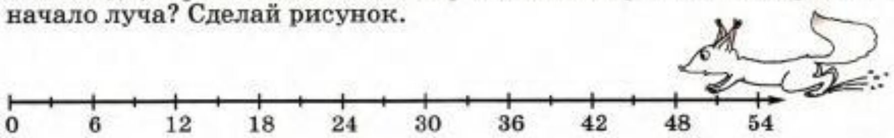
$s =$ ______

$x =$ ______

2 Движение мышонка по координатному лучу описывается формулой $x = 2 + 4 \cdot t$ (время t — в часах). Из какой точки луча мышонок вышел? В каком направлении и с какой скоростью он идет? В какой точке координатного луча он был через 1 ч после выхода, через 2 ч, 3 ч, 5 ч? Проверь с помощью рисунка.



3 Движение белочки по координатному лучу описывается формулой $x = 48 - 6 \cdot t$ (время t — в минутах). Из какой точки луча она вышла? Определи направление и скорость ее движения. Определи координату точки, в которой находилась белочка через 1 мин после выхода, через 2 мин, 3 мин. Через сколько времени она придет в начало луча? Сделай рисунок.

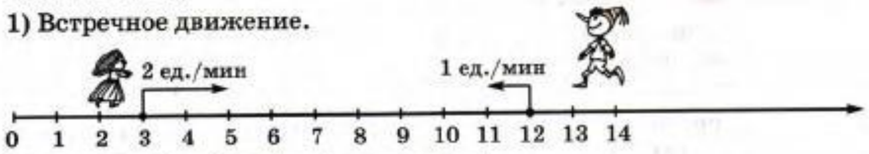


Скорость сближения и скорость удаления

24 УРОК

1 Изобрази одновременное движение героев сказок по координатному лучу и заполни таблицы (переменная x обозначает координату движущейся точки, а переменная d — расстояние между точками). Проанализируй, как изменяется расстояние во всех четырех случаях движения — уменьшается или увеличивается, и на сколько? Сделай вывод.

1) Встречное движение.

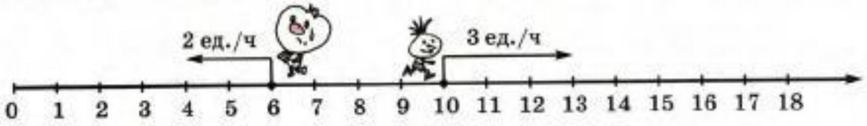


t мин	0	1	2	3	t
$x_м$					
$x_в$					
d					

Вывод:

Сближаются на … ед. в минуту

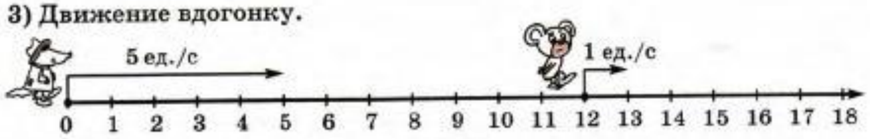
2) Движение в противоположных направлениях.



t ч	0	1	2	3	t
$x_п$					
$x_ч$					
d					

Вывод:

3) Движение вдогонку.



t с	0	1	2	3	t
$x_г$					
$x_ч$					
d					

Вывод:

8* Переменные x и y связаны зависимостью: $y = x \cdot (6 + x) - x \cdot 4$. Заполни таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y											

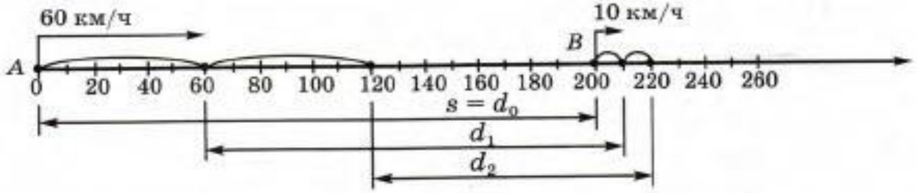
Что ты замечаешь? Попробуй зависимость между переменными x и y выразить другой формулой.

Движение вдогонку

28 УРОК

1 а) Из пунктов A и B, удаленных друг от друга на 200 км, одновременно в одном направлении выехали автобус и велосипедист. Скорость велосипедиста 10 км/ч, а автобус догоняет его со скоростью 60 км/ч. Как изменяется расстояние между ними за 1 час? Чему оно будет равно через 1 ч, 2 ч, 3 ч, t ч? Когда произойдет встреча?

Закончи построения на координатном луче и обозначь место встречи флажком. Заполни таблицу и запиши формулу зависимости расстояния d между автобусом и велосипедистом от времени движения t.



t ч	d км
0	200
1	200–(60–10) · 1 =…
2	200–(60–10) · 2 =…
3	200–
4	
t	

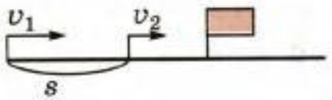
$v_{сбл.}$ = … – … = … (км/ч)

d =

б) Как найти время до встречи с помощью вычислений? Докажи.

в) Запиши формулу зависимости между величинами s, v_1, v_2 и $t_{встр.}$, где:

s — первоначальное расстояние;
v_1 и v_2 — скорости объектов, движущихся вдогонку ($v_1 > v_2$);
$t_{встр.}$ — время до встречи.



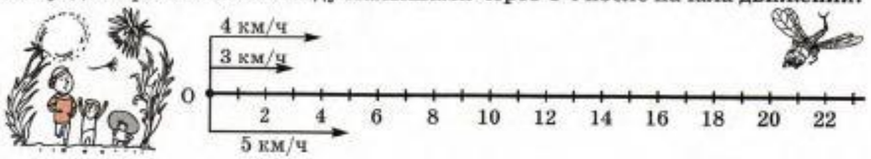
Л.Г. Петерсон. Математика. 4 класс. Часть 3.

Содержание

18 УРОК

График движения

1 Сиропчик, Тюбик и Незнайка вышли одновременно из Солнечного города по одной дороге, ведущей к Знайкиной даче. Их скорости равны соответственно 3 км/ч, 4 км/ч и 5 км/ч. Изобрази их движение на координатном луче и определи расстояние между малышами через 4 ч после начала движения.



Удобно ли исследовать с помощью координатного луча одновременное движение трех объектов?

На координатном луче можно наглядно показывать движение объектов. Но объединять эти рисунки нельзя, так как изображение становится слишком громоздким.

Чтобы наглядно показать движение, лучше изображать положение движущегося тела точками координатного угла. Для этого по горизонтальной оси откладывается время движения, а по вертикали — пройденное расстояние. Например, точка (1; 4) обозначает, что Тюбик за 1 час прошел 4 км, точка (2; 8) — то, что за 2 часа он прошел 8 км. За 3 часа Тюбик прошел 12 км, значит, строим точку (3; 12) и т. д. (рис. 1). Соединив все точки, получим луч *OA*, который называется **графиком движения** Тюбика (рис. 2). Каждая точка графика показывает, где и в какое время находился Тюбик. Например, по графику видно, что за $\frac{1}{2}$ часа Тюбик отошел от города на 2 км, а на расстоянии 10 км он находился через 2 ч 30 мин после выхода.

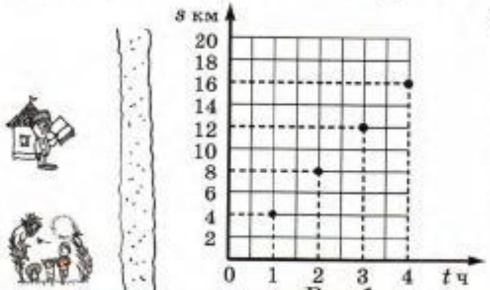


Рис. 1

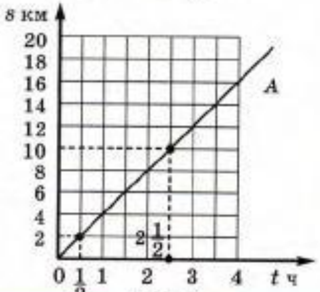


Рис. 2

3 Заполни таблицы и построй графики движения Сиропчика и Незнайки, используя данные из задачи № 1, стр. 69. Определи с их помощью:

а) На каком расстоянии от Солнечного города находился Сиропчик через 20 мин после выхода? Сколько времени понадобилось ему, чтобы пройти 8 км?

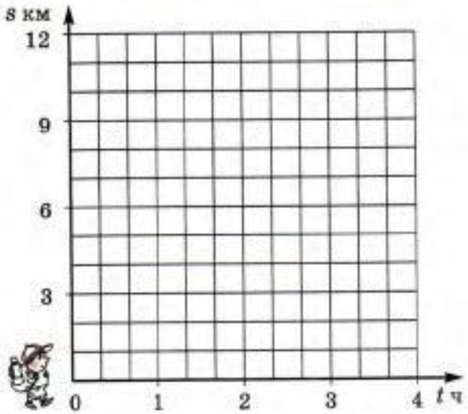
б) На каком расстоянии от Солнечного города находился Незнайка через $\frac{1}{2}$ ч после выхода? За сколько времени он прошел 12 км 500 м?

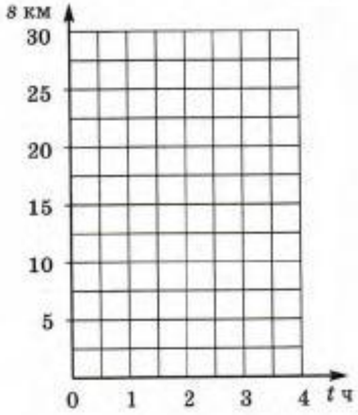
t ч	0	1	2	3	4	*t*
s км						

t ч	0	1	2	3	4	*t*
s км						

$v = 3$ км/ч $s =$ ______

$v = 5$ км/ч $s =$ ______





4 Дача Знайки находится на расстоянии 10 км от Солнечного города. Изменялось ли во время движения малышей расстояние от Знайки до Солнечного города, если Знайка все это время находился на даче? Заполни таблицу и построй график движения Знайки на обоих рисунках предыдущего номера.

Что на этих рисунках обозначает точка пересечения графиков?

t ч	0	1	2	3	4	*t*
s км						

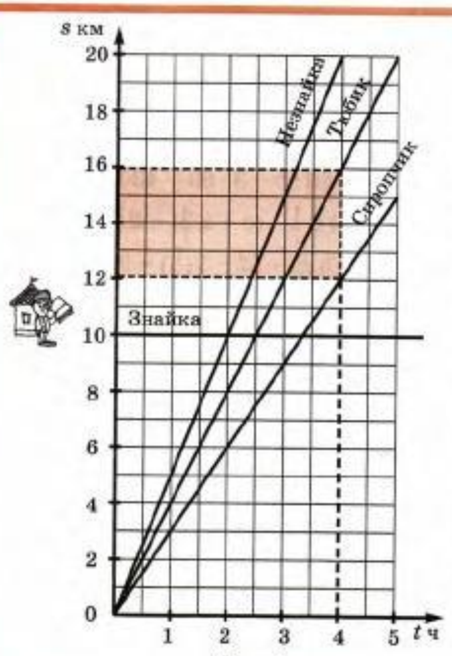


Рис. 3

На рис. 3 показаны графики движения всех четырех малышей: Сиропчика, Тюбика, Незнайки и Знайки. Рассматривая их, можно заметить, что **чем больше скорость движения, тем круче вверх поднимается график.** Если же скорость движения меньше, то график, наоборот, получается более пологий.

Горизонтальная линия на рис. 3 показывает, что расстояние от Знайки до Солнечного города не изменялось. Значит, **горизонтальный график означает отсутствие движения.**

По графику движения удобно отвечать на самые разнообразные вопросы. Например, на рисунке показано, как найти расстояние между Сиропчиком и Тюбиком через 4 часа после выхода:

$$16 - 12 = 4 \text{ (км)}$$

5 На рисунке изображен график движения лыжника. Используя этот график, ответь на вопросы:

1) В котором часу лыжник вышел с турбазы?

2) Сколько времени он был в пути?

3) Сколько километров он прошел за это время?

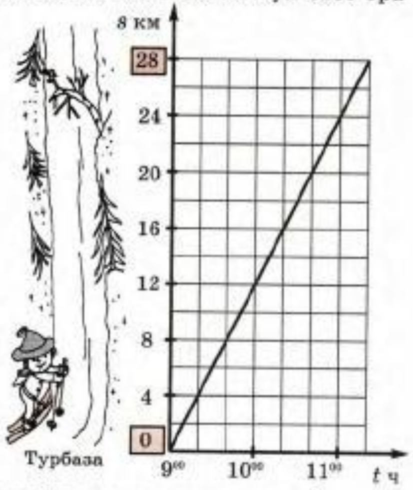
4) Менялась ли в пути скорость его движения?

5) С какой скоростью он шел?

6) Делал ли он в пути остановки?

7) На каком расстоянии от турбазы был лыжник в 9 ч 40 мин? В 10 ч 20 мин? В 11 ч?

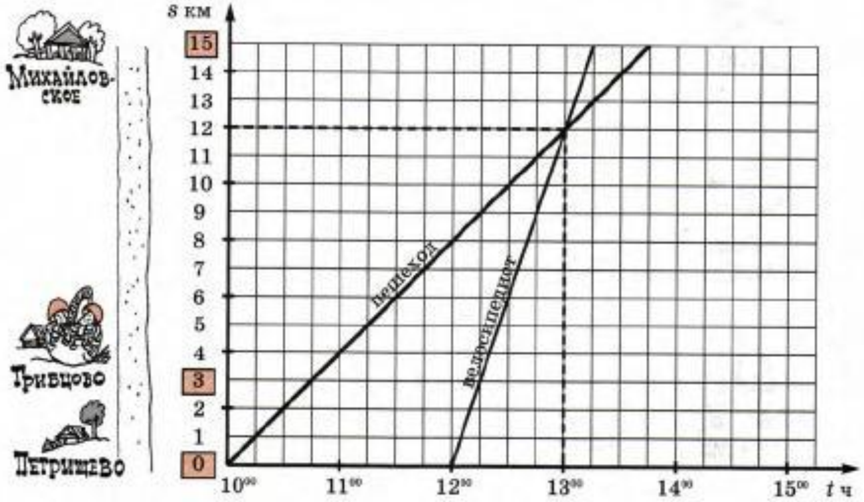
8) В котором часу он находился на расстоянии 4 км от турбазы? 12 км? 20 км?



Запиши формулу зависимости расстояния s от времени движения t.

20 УРОК

1 Из деревни Петрищево в село Михайловское, расстояние между которыми 15 км, в 10 часов утра вышел пешеход. Через 2 ч по той же дороге вслед за пешеходом выехал велосипедист. На рисунке приведены графики их движения.



а) Чему равна скорость движения пешехода и велосипедиста? Как отражено на графике, что скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

б) На каком расстоянии от Петрищево находился пешеход в момент выезда велосипедиста?

в) В котором часу пешеход и велосипедист были в Грибцово? Когда они прибыли в Михайловское?

г) На каком расстоянии от Петрищево были пешеход и велосипедист в 13 часов? Что означает на рисунке точка пересечения графиков?

> График движения позволяет определить положение движущихся объектов в заданный момент времени, скорость и направление их движения, расстояние между ними.
>
> Точка пересечения графиков движения двух объектов показывает время и место их встречи.

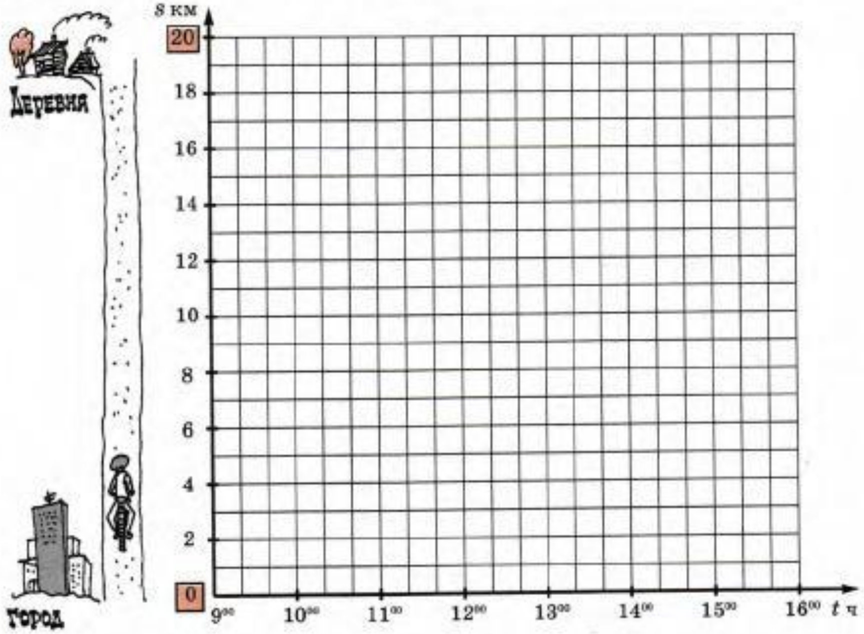
3 В 9 ч утра из города в деревню, расстояние между которыми 20 км, вышли туристы. Пройдя 8 км со скоростью 4 км/ч, они сделали привал на 1 ч, после чего продолжали путь со скоростью 3 км/ч. В 12 ч по той же дороге вслед за туристами выехал велосипедист со скоростью 15 км/ч.

Построй график движения туристов и велосипедиста и ответь по графику на вопросы:

а) В котором часу и на каком расстоянии от города велосипедист догнал туристов?

б) На каком расстоянии от города и от деревни были туристы и велосипедист в 12 ч 20 мин?

в) В котором часу они прибыли в деревню?

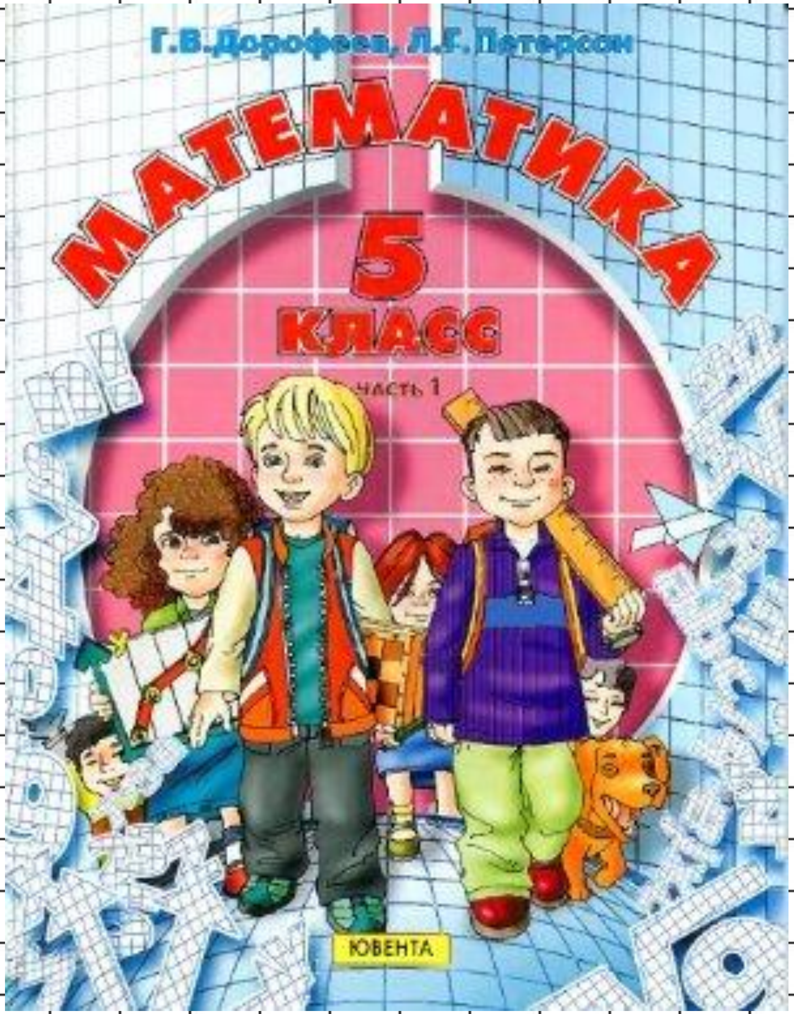


4 Между пунктами A и B по шоссе 70 км. В 8 ч утра из пункта A по направлению к B выехал велосипедист со скоростью 20 км/ч. Через 2 ч после выезда он сделал часовую остановку, а затем продолжил путь с той же скоростью. В 10 ч из пункта A по той же дороге вслед за велосипедистом выехал мотоциклист со скоростью 30 км/ч. Через 1 ч пути он сделал остановку на 15 мин, а затем увеличил скорость до 40 км/ч. Построй графики движения велосипедиста и мотоциклиста (1 кл. — 15 мин, 1 кл. — 5 км). Определи время и место их встречи.

Какие еще вопросы можно задать по графикам движения велосипедиста и мотоциклиста?

5* Начерти квадрат, площадь которого равна двум тетрадным клеточкам.

Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. Математика. 2 класс. Часть 1.



Л.Г. Петерсон. Математика. 4 класс. Часть 3.

Оглавление

Глава 1. Математический язык

Задача 3.

Одна сторона прямоугольного участка земли на 3 м больше другой его стороны. Площадь участка равна 70 м². Найти размеры этого участка.

Обозначим ширину прямоугольника, выраженную в метрах, через x, тогда его длина равна $(x+3)$ м, а площадь равна $x(x+3)$ м². Но по условию площадь равна 70 м². Таким образом, решением задачи является значение x, удовлетворяющее равенству:

$$x(x+3)=70.$$

Это равенство и является математической моделью данной задачи.

Напомним, что для построения моделей задач, величины в которых связаны отношением $a=b\cdot c$, удобно использовать таблицу:

Длина	Ширина	Площадь
$(x+3)$ м	x м	$x(x+3)$ м², или 70 м²

Так как по условию в большой автобус вмещается на 6 детей больше, чем в маленький, то разность $252:x-252:(x+1)$ равна 6. Значит, решением задачи является число x, удовлетворяющее равенству:

$$252:x-252:(x+1)=6.$$

Можно получить более простую математическую модель этой задачи, обозначив дополнительно буквой y число детей, которых можно разместить в большом автобусе:

	Количество детей в одном автобусе	Количество автобусов	Общее количество детей
Большие автобусы	y	x	252
Маленькие автобусы	$y-6$	$x+1$	252

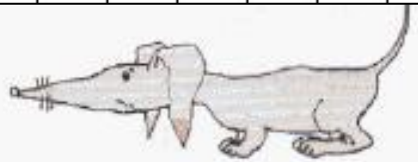
Очевидно, что в этом случае математической моделью задачи являются два равенства:

1) $xy=252$;

2) $(x+1)(y-6)=252$.

Искомые числа x и y должны удовлетворять как первому, так и второму равенству.

104 Как изменится произведение, если:



а) один множитель увеличить в 9 раз;

б) один множитель уменьшить в 7 раз;

в) один множитель уменьшить в 2 раза, а другой уменьшить в 8 раз;

г) один множитель увеличить в 4 раза, а другой увеличить в 5 раз;

д) один множитель увеличить в 12 раз, а другой уменьшить в 4 раза;

е) один множитель увеличить в 3 раза, а другой уменьшить в 6 раз;

ж) один множитель увеличить в n раз, а другой увеличить в 2 раза;

з) один множитель уменьшить в m раз, а другой уменьшить в 3 раза?

169 Как изменится частное, если:

а) делимое увеличить в 3 раза;

б) делитель увеличить в 5 раз;

в) делимое увеличить в 8 раз, а делитель увеличить в 2 раза;

г) делимое уменьшить в 6 раз, а делитель уменьшить в 2 раза;

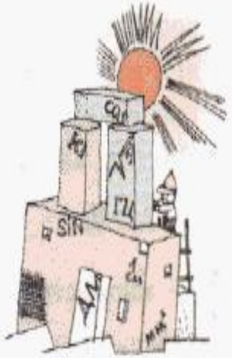
д) делимое увеличить в 7 раз, а делитель уменьшить в 5 раз;

е) делимое уменьшить в 9 раз, а делитель увеличить в 6 раз;

ж) делимое увеличить в n раз, а делитель уменьшить в 3 раза;

з) делимое уменьшить в m раз, а делитель увеличить в 8 раз?

150 Пользуясь распределительным свойством умножения, упрости выражение и найди его значение:



1) $4a + 36a - 8a + 3a$, если $a = 6$;

2) $52b - 7b - 6b + b$, если $b = 25$;

3) $14m + m + 17m - 9m$, если $m = 30$;

4) $31n + 5n - n + 19n$, если $n = 20$;

5) $2x + 6 + 9x + 8 + x$, если $x = 4$;

6) $15 + 3y + y + 4 + 5y$, если $y = 7$.

142 Построй математическую модель задачи и найди ответ при данных значениях букв:

1) Купили 3 батона хлеба и 2 кг яблок. Один батон хлеба стоит a р., а 1 кг яблок стоит b р. Сколько рублей стоит вся покупка? ($a = 25$, $b = 60$.)

2) Через одну трубу в бассейн вливается m л воды в минуту, а через другую – n л воды в минуту. Сколько литров воды поступит в бассейн за 15 минут работы обеих труб? ($m = 75$, $n = 45$.)

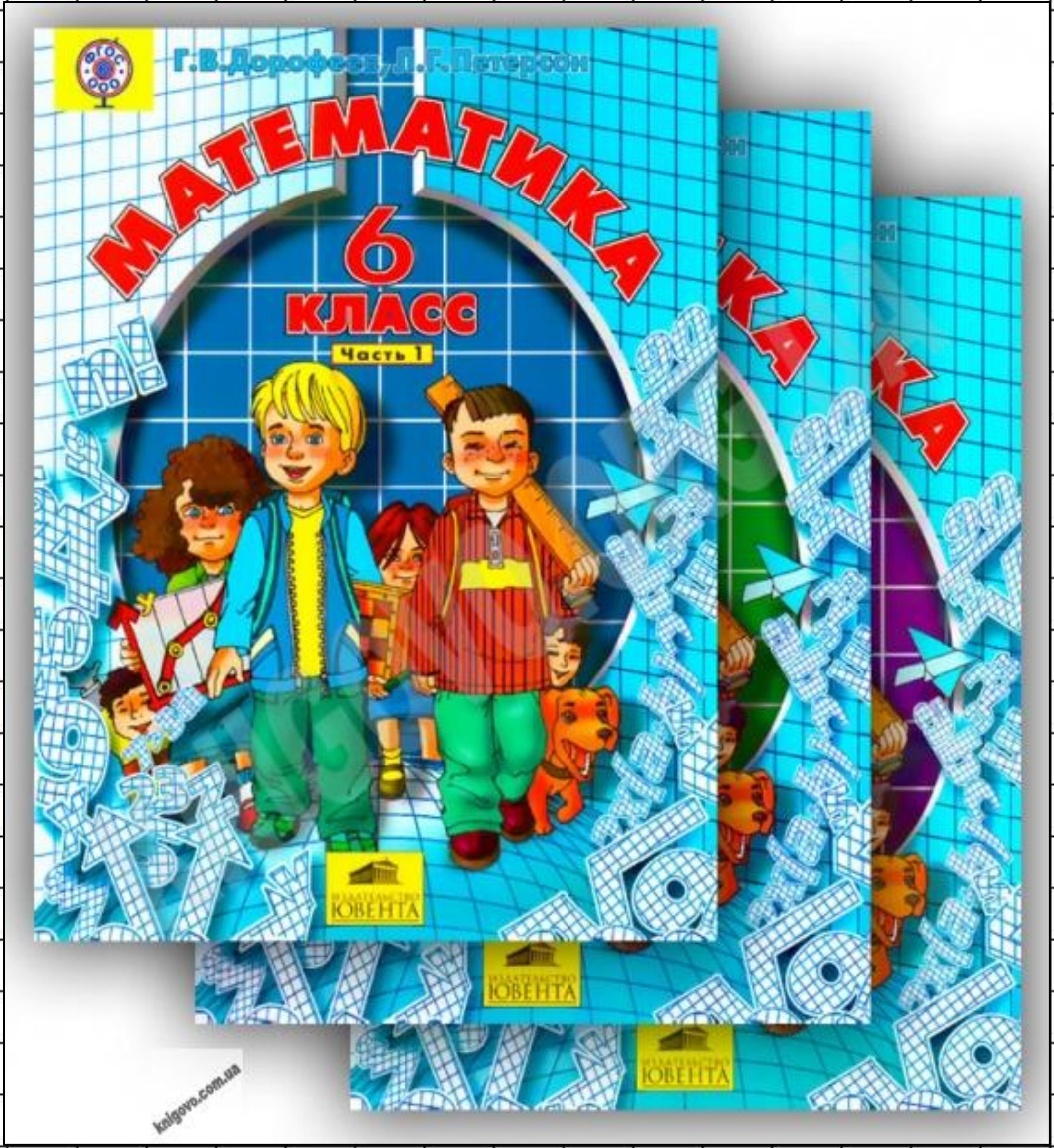
3) За 3 м шерстяной ткани и c м шелка заплатили 1360 р. Сколько стоит 1 м шелка, если 1 м шерстяной ткани стоит d рублей? ($c = 2$, $d = 240$.)

4) За 4 альбома для рисования и 7 шариковых ручек заплатили x рублей. Сколько стоит один альбом для рисования, если одна шариковая ручка стоит y рублей? ($x = 400$, $y = 24$.)

5) Площадь садового участка, имеющего форму прямоугольника, равна 600 $м^2$, а его длина равна a м. Чему равна длина изгороди, построенной вдоль границы этого участка? ($a = 30$.)

6) Периметр прямоугольника равен b м, а длина одной из его сторон c м. Какую площадь имеет этот прямоугольник? ($b = 360$, $c = 80$.)

Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. Математика. 6 класс.



Л.Г. Петерсон. Математика. 6 класс. Часть 1.

Оглавление

Л.Г. Петерсон. Математика. 6 класс. Часть 2.

Оглавление

§ 4. Пропорциональные величины

1. Зависимости между величинами.

Как нам уже известно, математика зародилась тысячи лет назад и создавалась для решения многочисленных практических задач, возникавших как в жизни каждого человека, так и в жизни общества. Одним из наиболее значимых для практики результатов пройденного пути являются верные равенства, описывающие зависимости между величинами – *формулы*.

Мы уже узнали многое из того, что открыли математики древности, в частности, формулу площади прямоугольника: $S = ab$, где буквой S обозначена площадь прямоугольника, а буквами a и b – его длина и ширина. Эта формула описывает соотношение между тремя величинами – длиной, шириной и площадью прямоугольника. И надо сказать, что, хотя это соотношение было известно еще в Древнем Египте и Месопотамии, пользоваться им могли лишь самые образованные люди того времени, так как действия умножения и деления были в те времена "высшей математикой".

Практический смысл формулы $S = ab$ состоит в том, что для вычисления площади заданного прямоугольника нет необходимости измерять ее непосредственно, то есть укладывать прямоугольник квадратами единичной площади и подсчитывать их число. Достаточно лишь измерить и перемножить его длину и ширину.

Установление взаимосвязей между величинами имеет большое практическое значение. Например, в физике далеко не всякую величину можно измерить непосредственно каким-нибудь прибором, и, открывая связи между величинами, физики получают возможность ***вычисления*** значений таких величин с использованием формул. А математики разрабатывают способы вычислений, создавая аппарат для физики и других наук.

Примером физической формулы является хорошо известная нам формула пути $s = vt$, описывающая равномерное прямолинейное движение. Эта формула дает возможность по любым двум из величин – путь (s), скорость (v), время (t) – найти третью величину с помощью вычислений по одной из формул: $s = vt$, $v = s : t$, $t = s : v$.

Вообще зависимости, в которых одна из величин является произведением двух других, часто встречаются в жизни. В таблице приведены лишь некоторые примеры таких величин.

Произведение	Множитель	Множитель	Формула
Путь (s)	Скорость (v)	Время (t)	$s = vt$
Работа (A)	Производительность (w)	Время (t)	$A = wt$
Стоимость (C)	Цена (a)	Количество товара (n)	$C = an$
Площадь прямоугольника (S)	Длина (a)	Ширина (b)	$S = ab$
Масса вещества (m)	Плотность (ρ)	Объем (V)	$m = \rho V$
Масса вещества в растворе (m)	Концентрация (p)	Масса раствора (M)	$m = pM$

Подобных примеров можно привести очень много. Отвлекаясь от конкретных значений величин, общее свойство зависимостей между ними – а именно то, что одна из величин является произведением двух других, – можно записать так:

$$a = bc,$$

где a, b и c – это некоторые переменные величины. Вместо обозначений a, b и c могут использоваться другие буквы, но суть при этом не меняется. Полученную обобщенную формулу назовем ***формулой произведения***.

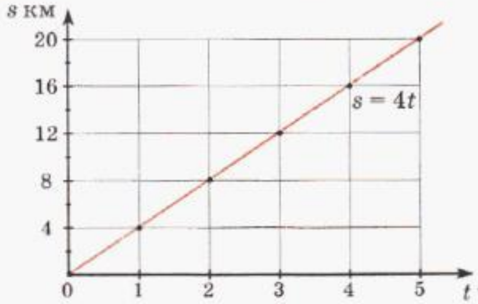
В заключение напомним, что зависимости между величинами можно задавать, кроме формул, с помощью таблиц и графиков. Например, равномерное движение со скоростью 4 км/ч можно описать:

1) формулой: $s = 4t$;

2) таблицей:

t ч	0	1	2	3	4	5
s км	0	4	8	12	16	20

3) графиком:



132 Приведи примеры величин, связанных зависимостью вида $a = bc$. Из формул этих зависимостей вырази значение каждой величины.

Образец: $\boxed{s = vt \;\Leftrightarrow\; v = \frac{s}{t} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{s}{v}}$

133 Построй формулу, устанавливающую зависимость: 1) числа n купленных тетрадей от их цены a, если стоимость всей покупки равна 600 р.; 2) времени t набора рукописи на компьютере от производительности w, если в рукописи 240 страниц; 3) массы m соли в растворе от массы M раствора, если концентрация раствора 30%.

134 Перерисуй в тетрадь и заполни таблицу единиц измерения величин в формулах:

1) $s = vt$

s	v	t
м	м/с	?
?	км/ч	ч
км	?	мин
?	см/с	с

2) $A = wt$

A	w	t
шт.	?	ч
м	м/день	?
?	шт./мин	мин
дм^3	?	с

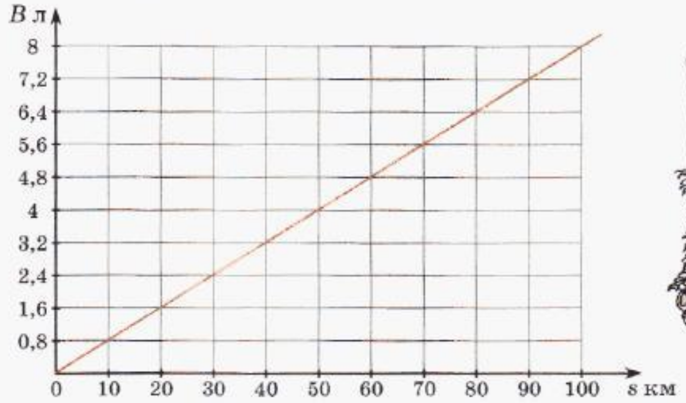
3) $C = an$

C	a	n
?	р./шт.	шт.
р.	р./кг	?
р.	?	м
р.	р./тетр.	?

135 Прочитай формулу одновременного движения: $s = v_{сбл.} \cdot t_{встр.}$. Что обозначают входящие в нее буквы? Перепиши эту формулу для случаев встречного движения и движения вдогонку, выразив $v_{сбл.}$ через скорости v_1 и v_2 движущихся объектов ($v_1 > v_2$). По каждой из полученных формул вычисли:

1) s, если $v_1 = 36$ км/ч, $v_2 = 14$ км/ч, $t_{встр.} = 0{,}5$ ч;
2) $t_{встр.}$, если $s = 30$ км, $v_1 = 18$ км/ч, $v_2 = 12$ км/ч;
3) v_1, если $s = 120$ км, $t_{встр.} = 1{,}5$ ч, $v_2 = 20$ км/ч.

140 Ниже приведен график зависимости расхода бензина B л для автомобиля "Лада" от пройденного расстояния s км. Заполни таблицу и построй формулу зависимости B от s.



s км	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
B л										

Л.Г. Петерсон. Математика. 6 класс. Часть 3.

Оглавление

2. Графики зависимостей величин.

Мы уже много раз наблюдали, как знание общих свойств зависимостей между величинами помогает решать практические задачи. Например, выявление общих свойств зависимостей между такими величинами, как «расстояние – скорость – время», «стоимость – цена – количество товара», «объем выполненной работы – производительность – время», привело к построению зависимостей общего вида – прямой пропорциональности ($y = kx$) и обратной пропорциональности $\left(y = \frac{k}{x}\right)$. А это помогло построить способ решения задач с помощью пропорций.

Зависимости между величинами выражаются на математическом языке с помощью формул, таблиц и графиков. Введение системы координат на плоскости позволяет сопоставить каждой точке ее координаты, которые могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Самый простой пример – график изменения температуры в зависимости от времени, когда температура может принимать отрицательные значения.

Приведем еще один пример зависимости, связанной с изменением температуры. Вспомним, что на градусниках, которыми мы пользуемся, обычно стоит значок $^\circ C$, который означает, что этим градусником температура измеряется «по Цельсию». Между тем во многих странах, в частности в США и в Англии, используется другая шкала измерения температуры – шкала Фаренгейта, отмечаемая знаком $^\circ F$. Совершенно естественно возникает задача – как по одной из этих температур узнать другую.

Сопоставляя шкалу измерения температур по Цельсию со шкалой по Фаренгейту, можно вывести общую формулу зависимости между величинами y – температурой по Цельсию и x – температурой по Фаренгейту:

$$y = \frac{5}{9}(x - 32).$$

Полученная формула позволяет по любому данному значению x найти соответствующее значение y и построить график этой зависимости (рис. 16):

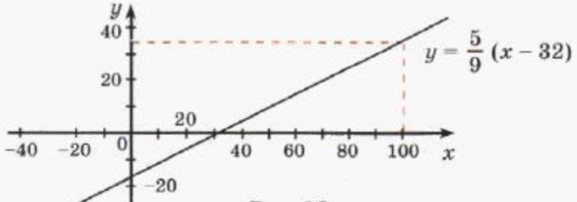


Рис. 16

Несмотря на кажущуюся абстрактность математических вычислений и графиков, в повседневной жизни очень часто возникают ситуации, в которых использование математики имеет практическое значение.

Например, из приведенной выше формулы следует, что если $y = 37$, то

$5(x - 32) = 333$, $x = 32 + 66{,}6 = 98{,}6$.

Значит, при температуре около $100\,^\circ F$ или больше у человека есть все основания побеспокоиться о своем здоровье. Это число полезно помнить каждому туристу, заболевшему в англоязычной стране.

Приведенный пример показывает, как разнообразные математические понятия – отрицательные числа, координатная плоскость, формулы, графики, – возникшие из внутренней логики развития самой математики, оказываются практически значимыми.

Следующим важным шагом в развитии этих понятий является выявление и изучение общих свойств зависимостей между величинами. Исследование этих зависимостей помогает ***прогнозировать*** события, или, иначе говоря, помогает найти ответ на вопрос: «Что будет происходить при тех или иных обстоятельствах?»

На рис. 17 приведены графики трех зависимостей переменной y от переменной x. Первые две зависимости обладают тем свойством, что каждому значению x сопоставляется ***единственное*** значение y, а третья зависимость этим свойством не обладает (контрпример показан на чертеже). Таким образом, в первых двух случаях можно говорить об однозначном характере зависимостей, что позволяет на практике прогнозировать развитие событий. А в третьем случае этой возможности нет.

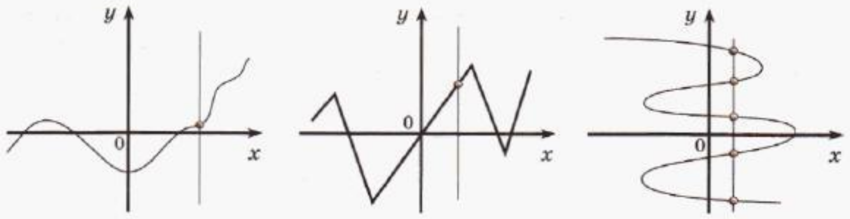


Рис. 17

Зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует единственное значение y, стали называть ***функциональной зависимостью***, или ***функцией***.

дало мощный импульс развитию всех наук, которое мы наблюдаем до настоящего времени.

Зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению x соответствует единственное значение y, стали называть ***функциональной зависимостью***, или ***функцией***.

210 По таблице установи формулу зависимости между переменными y и x и построй график этой зависимости на координатной плоскости. Какие из этих зависимостей являются функциональными? Какие из них являются прямой пропорциональностью, обратной пропорциональностью?

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8

б)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	1	2	3	4

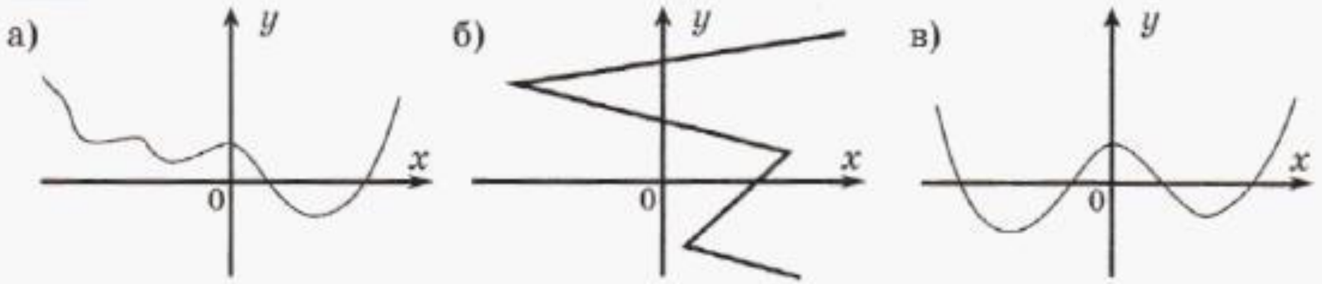
в)

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

г)

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

211 Какие из зависимостей y от x, приведенных на рисунке, являются функциями:



212 Построй на одной координатной плоскости графики трех данных зависимостей y от x:

а) $y = \frac{1}{3}x$, $y = x$ и $y = 3x$; б) $y = 2x$, $y = 2x + 3$ и $y = 2x - 1$.

Что ты наблюдаешь? Сформулируй *гипотезу*.

213 Построй на одной координатной плоскости графики зависимостей вида $y = kx$, если: а) $k = 2$ и $k = -2$; б) $k = 1$ и $k = -1$; в) $k = 2{,}5$ и $k = -2{,}5$.

Что ты наблюдаешь? Сформулируй *гипотезу*.

Л.Г. Петерсон. Алгебра. 7 класс. Часть 3.

Оглавление

Глава 5

Введение в теорию функций

§ 1. Понятие функции и ее практическое применение

1. Функциональная зависимость между величинами

Понятие функции такое же основное и первоначальное, как понятие множества.

Феликс Хаусдорф (1868–1942),
немецкий математик

В обычной жизни мы постоянно сталкиваемся с разнообразными величинами: температурой, стоимостью, массой, количеством предметов, длиной, площадью, объемом и т. д. При этом, рассматривая некоторую конкретную ситуацию, мы можем обнаружить, что одни величины меняются, а другие остаются неизменными.

Мы уже знаем, что величина, которая может принимать различные числовые значения, называется **переменной величиной.** Так, например, если вы решили проехать на автобусе несколько остановок, то скорость автобуса, масса бензина в его баке и количество пассажиров будут переменными величинами, а количество его колес и окон в течение поездки не изменится, останется постоянным.

Среди переменных величин различают *независимые* и *зависимые* величины. Например, длина пути, проходимого вами со скоростью 50 м/мин, зависит от времени прогулки, которое вы выберете. При этом она однозначно определяется выбранным временем: за 5 мин вы пройдете 250 м, за 12 мин – 600 м, за 20 мин – 1000 м и т. д.

Похожая ситуация возникнет, если вы захотите купить несколько одинаковых тетрадей или распечатать несколько страниц текста на принтере. Во всех этих примерах мы можем точно и однозначно находить конкретные значения переменных величин с помощью изученных нами формул – в данном случае формул пути, стоимости, работы.

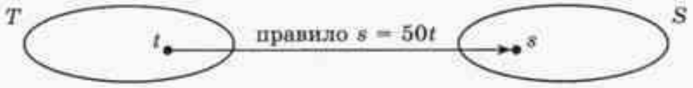
Зависимости между величинами, которые позволяют ***однозначно*** определять значение искомой величины, занимают среди всех других зависимостей особое место, так как помогают, например, осуществлять планирование, давать прогноз поведения различных величин в тех или иных условиях. Ведь даже в быту нам важно уметь рассчитать стоимость покупки или время, необходимое на ту или иную работу. Что же касается современного производства, то именно точность прогнозирования во многом определяет его результативность и конкурентоспособность.

В связи с особой значимостью таких зависимостей возникает необходимость изучать их отдельно от всех остальных. Для того чтобы выделить их среди всех других зависимостей, их назвали **функциональными зависимостями,** или **функциями.**

Прежде чем дать определение функции, вспомним предыдущий пример. Как мы определяли длину пути s м, пройденного за данное время t мин со скоростью 50 м/мин? Мы брали некоторое конкретное значение t мин (5 мин, 12 мин, 20 мин и т. д.), затем, пользуясь правилом $s = 50t$, умножали t мин на 50 м/мин и получали искомое значение s м (250 м, 600 м, 1000 м и т. д.).

Возможные значения переменной t в мин образуют некоторое множество T. При этом t не может принимать любые значения. Так, например, прогулка не может длиться 1 000 000 мин или (–24) мин. Если же она длилась, например, 30 мин, то множество T можно задать следующим образом: $T = \{t \in Q: 0 \leq t \leq 30\}$. Переменная s в метрах при этом принимает значения из некоторого множества S: $S = \{s \in Q: 0 \leq s \leq 1500\}$.

Данную зависимость можно схематически представить следующим образом:



где, согласно правилу $s = 50t$, каждому элементу t из множества T ставится в соответствие *единственный* элемент s из множества S.

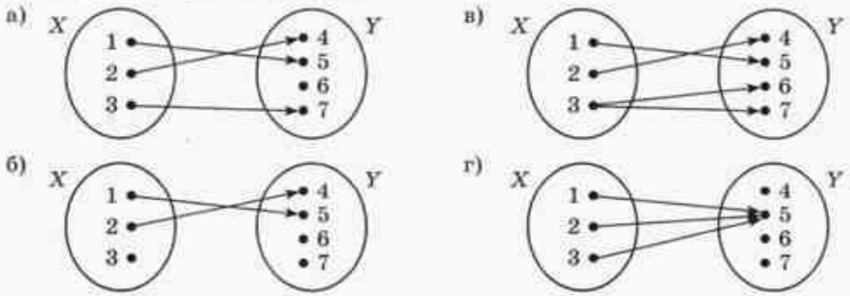
Таким образом, мы приходим к следующему определению понятия функции, где независимая переменная обозначается буквой x, зависимая – буквой y, а правило соответствия – буквой f.

Определение. Функцией называется правило f, по которому *каждому* элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие *единственный* элемент y из множества Y. Множество X при этом называется областью определения, а множество Y – областью значений данной функции.

Итак, отличительной особенностью функциональной зависимости (функции) является то, что для каждого элемента из ее области определения 1) *существует* и 2) *единственный* соответствующий элемент из области ее значений. Если хотя бы одно из этих двух требований не выполняется, то зависимость не является функциональной.

Разберемся в этом на конкретных примерах.

Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$ и зависимость между ними задается следующими схемами, описывающими, какой элемент множества Y соответствует тому или иному элементу множества X.



3 Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функциональной.

а)

x	−2	−1	0	1	3
y	1	2	3	4	5

в)

x	0	1	2	3	5
y	−3	−1	−3	−1	−3

б)

x	5	−3	5	4	3
y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

г)

x	3	5	7	9	11
y	4	4	5	5	6

4 Задайте зависимость объема куба V от длины его ребра a. Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $a = 3$ см; б) $a = 2$ м; в) $a = \frac{1}{2}$ дм; г) $a = 10$ мм; д) $a = \frac{1}{4}$ м.

5 Задайте зависимость пройденного с постоянной скоростью 5 км/ч пути S (в км) от времени движения t (в часах). Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $t = 3$ ч; б) $t = 15$ мин; в) $t = 1$ ч 20 мин; г) $t = 3$ ч 30 мин.

6 Зависимость задали следующим образом: каждому целому числу поставили в соответствие его остаток при делении на целое число a. Определите, является ли данная зависимость функциональной. Укажите область определения и область значений этой зависимости для указанных значений a.

а) $a = 5$; б) $a = 8$; в) $a = 11$; г) $a = -3$; д) $a = -5$.

7 а) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 + 6x + 12$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x, при которых значение зависимой переменной y равно 3?

б) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 - 2$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x, при которых значение зависимой переменной y равно −6?

38 Функция задана формулой. Найдите ее область определения.

а) $y = x^2$; в) $y = \frac{3}{x-9}$; д) $y = \frac{14}{x^2}$; ж) $y = \frac{9x+7}{(2x-5)(4x+9)}$;

б) $y = 2x + 3$; г) $y = \frac{7x+5}{3}$; е) $y = \frac{2x}{3x-8}$; з) $y = \frac{11(x-5)}{x^3(2x+6)}$.

39 Функция задана формулой. Найдите ее значение в точках x_1, x_2 и x_3.

а) $y = 7x - 5$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; в) $y = 3x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -0,5$;

б) $y = \frac{4}{2x-7}$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$; г) $y = \frac{4x-3}{5}$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0,75$; $x_3 = -2$.

40 Функция задана формулой: 1) $y = 2x$; 2) $y = -x$; 3) $y = 2 - x$; 4) $y = -|x|$.

Задайте данную функцию с помощью:

а) словесного описания;

б) таблицы значений от −3 до 3 с шагом 1.

(*Шагом* называют разность между двумя соседними значениями аргумента.)

41 Функция задана с помощью таблицы. Задайте ее словесным описанием и графически.

а)

x	−2	−1	0	1	2
y	−6	−3	0	3	6

в)

x	−4	−2	−1	0	1	2	4
y	2	1	0,5	0	−0,5	−1	−2

б)

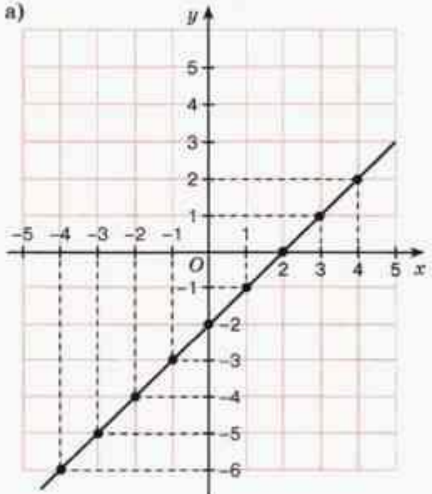
x	−2	−1	0	1	2
y	−1	0	1	2	3

г)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

42 Функция задана с помощью графика. Задайте эту функцию: а) таблицей значений от −4 до 4 с шагом, равным 1; б) словесным описанием; в) формулой.

а)



б)