Лекционный материал и
методические указания к практическим работам
по дисциплине

Основы математического моделирования социально - экономических процессов

Часть 1

для всех форм обучения

Составитель:
к.т.н., доцент А.Ю. Уразбахтина

Воткинск 2021

Использованная литература

Гаврилова, А. А. Методы моделирования, управление и принятие решений в социально-экономических системах : учебное пособие / А. А. Гаврилова, А. Р. Диязитдинова, М. В. Цапенко. — 2-е изд. — Самара : Самарский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2017. — 255 с. — ISBN 978-5-7964-1841-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/90622.html (дата обращения: 01.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

Введение

- Под моделью будем понимать вещественную или символьную конструкцию, которая в определенных целях используется вместо изучаемого реального объекта. Моделирование заключается в построении и исследовании моделей, заменяющих исходный объект-оригинал. Далее будем рассматривать внешний уровень формальных моделей – математические модели. Модель является инструментом научного познания, с помощью которого проводится исследование. Моделирование особенно эффективно, когда непосредственно исследовать объекты невозможно или это требует существенных затрат времени и средств.
- Процесс моделирования проводится в несколько этапов. На первом этапе конструируется модель объекта. Модель должна отражать наиболее существенные черты исследуемого объекта. Следует иметь в виду, что для разных элементов одного объекта может быть построено множество различных математических моделей, описывающих разные черты исследуемого объекта, представляющие объект с различной степенью детализации. На втором этапе проводится исследование построенной модели, при этом сама модель выступает как самостоятельный объект. Изучаются закономерности поведения модели, возможные стратегии управления и сценарии функционирования. На третьем этапе на основе полученной модельной информации делаются выводы о свойствах, характеристиках, закономерностях поведения исследуемого объекта.

- На четвертом этапе осуществляется практическое подтверждение полученных модельных результатов. На основе практической проверки может оказаться, что принятые при построении модели предпосылки привели к неадекватным реальности результатам. В этом случае следует сконструировать новую математическую модель и провести полный цикл исследований на ее базе.

Математическое моделирование экономических объектов требует наличия необходимой содержательной информации. Необходимы данные о свойствах и характеристиках экономических систем, о протекании процессов во времени, об управляющих и возмущающих воздействиях.

Получение экономической информации основано на методах сбора и обработки данных о функционировании систем. При получении и использовании экономической информации следует учитывать статистический характер экономических явлений и процессов, вследствие чего необходима организация многократных процедур экономических измерений.

ВИДЫ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

- По функциональному признаку выделяются модели анализа, прогнозирования и управления.
- По производственным признакам формируются национальные, межотраслевые, отраслевые и региональные модели.
- По методологическому признаку классифицируются функциональные и структурные математические модели.
- По методу моделирования различаются аналитические и численные модели.
- По принципам построения и использования выделяются дескриптивные и нормативные модели. Дескриптивные модели строятся для описания существующих фактов. Нормативные модели конструируются для исследования прогнозов и будущих сценариев развития экономики.
- По степени определенности дифференцируются детерминированные и стохастические модели, учитывающие случайность и неопределенность процессов.
- По характеру поведения во времени различаются статические и динамические модели. По однозначности и возможностям описания сложных экономических процессов различаются линейные и нелинейные модели.

СТАДИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

- 1. Содержательная формулировка постановки задачи. Она включает осознание сущности задачи, постановку целей моделирования, формулировку допущений, качественное описание моделирования. На этой стадии определяются наиболее существенные факторы и характеристики объекта, его базовая структура, поведенческие функции, состав необходимых исходных данных.

- 2. Конструирование математической модели. На этой стадии осуществляется постановка экономико-математической задачи. Выбирается класс математических моделей, в рамках которого строится конкретная модель. При возможности следует выбирать классические апробированные модели. Далее необходимо определить структуру и объем информации, требуемой для моделирования.

- 3. Решение сформулированной математической задачи. Для этого необходимо выбрать методы решения и анализа, адекватные целям моделирования и постановке задачи. Могут быть применены как аналитические, так и численные методы. Большое число сложных нелинейных, многофакторных задач, как правило, может быть решено только численными методами.
- Для исследования различных сценариев и стратегий развития экономических систем эффективным является применение методов имитационного моделирования.

- 4. Анализ полученных результатов и их использование на практике. На этой стадии исследуется полученная модельная информация и сопоставляется с реальными фактическими данными. Анализируется достоверность и адекватность полученных результатов. На их основе разрабатываются предложения по совершенствованию исследуемых экономических процессов и объектов.

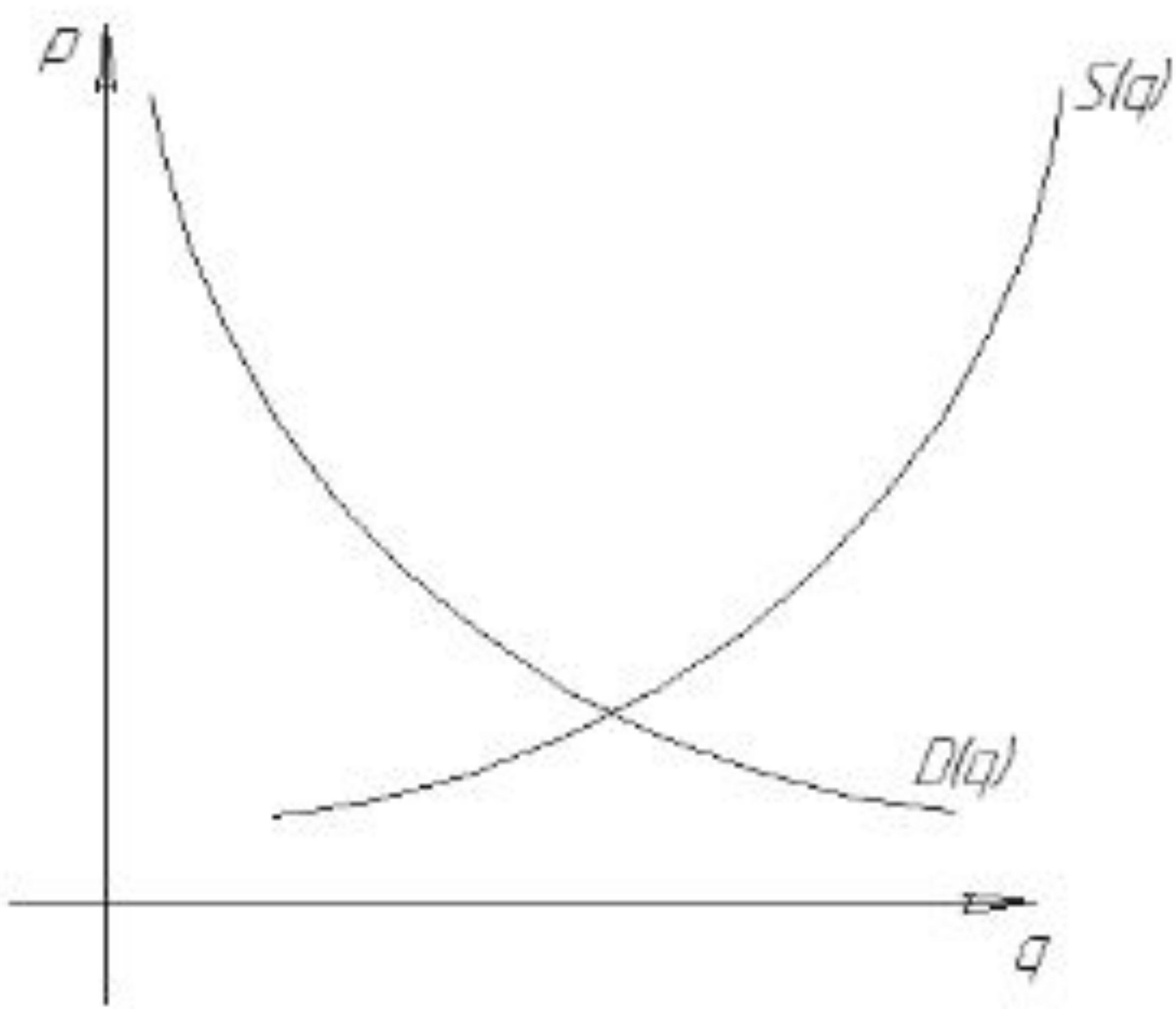
УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

- Управление – это организация входных воздействий для достижения системой заданных целей – желаемых будущих результатов. Главным в управлении является цель. Формализованное описание цели называется целевой функцией. Процесс управления применяется к произвольным объектам, элементам, системам, частям систем, которые называются единообразным способом – объекты управления. Объект управления характеризуется входными, выходными сигналами и помехами.
- Входные, или управляющие, сигналы – это воздействия, с помощью которых можно целенаправленным образом изменять состояние объектов. Места приложения входных сигналов называются входами.
- Выходными, или управляемыми, величинами называются сигналы, с помощью которых можно охарактеризовать состояние объектов управления. Места проявления выходных величин называются выходами. Помехами, или возмущениями, называются неизвестные или неконтролируемые воздействия на объект управления, чаще всего имеющие случайный характер, которые непредсказуемым, непрогнозируемым образом влияют на протекание процессов управления.

- Примеры целевых функций: максимизация быстродействия, максимизация коэффициента полезного действия, максимизация прибыли, минимизация расходов сырья и полуфабрикатов в технологическом процессе.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В ЭКОНОМИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Ценовые функции спроса и предложения. Функции спроса (qD и предложения qS) выражают связь между ценой продукции или услуги p и величиной (количеством) спроса и предложения q при условии постоянства конъюнктуры рынка, цен на товары-заменители и других параметров. Зависимость величины предложения от цены продукции p прямая, и график функции qS монотонно возрастает. График функции спроса qD монотонно убывает, т.к. существует обратная зависимость спроса от цены товара. Графики этих функций представлены на рис.



Практическое занятие 1

Моделирование социально-экономических процессов с помощью функций одной переменной

Задание 1.1

Функции спроса. Равновесная цена

Микроэкономика, как известно, занимается анализом отдельных элементов экономической системы. Один из важнейших разделов микроэкономики — изучение спроса и предложения. *Спрос* на некоторый товар — это потребность в определенном количестве товара, ограниченная действующими ценами и платежеспособностью (доходами) потребителей. *Предложение* — это количество товара, которое может быть представлено для продажи по данной цене.

Здравый смысл подсказывает: увеличение выпуска требует дополнительных затрат и, для того чтобы заинтересовать производителя в увеличении выпуска, нужно предложить ему повышенную цену. Отсюда следует, что *предложение* S нужно рассматривать как возрастающую функцию *цены** P. Если предложение зависит от цены, то и цена зависит от предложения. Экономисты обычно именно функцию $P = S(Q)$ называют *функцией предложения*, а ее график — *кривой предложения*; здесь Q — количество товара, предложенного для продажи по цене P.

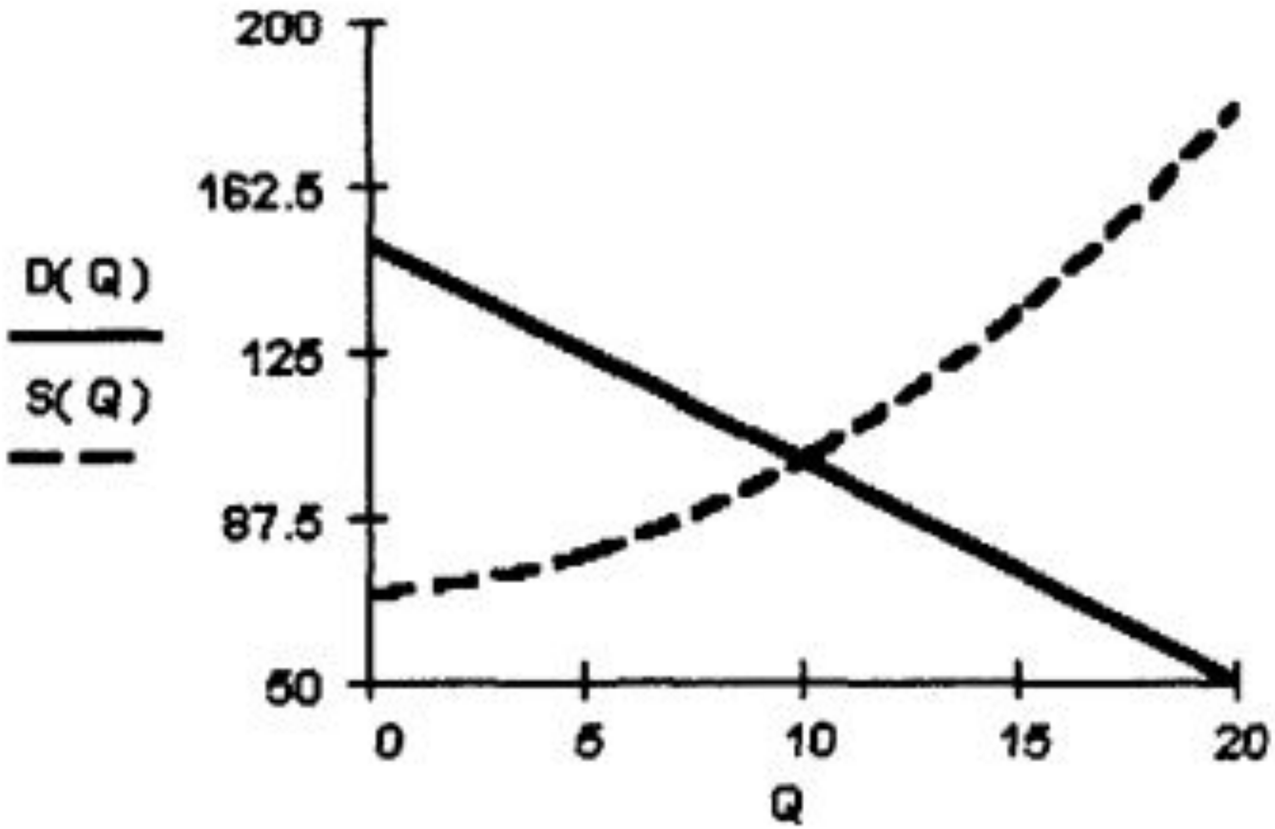
Тот же здравый смысл подсказывает: если цена на определенный товар начинает расти, то количество проданного товара будет уменьшаться, т.е. зависимость спроса* D от цены P — убывающая функция. Экономисты называют *функцией спроса* функцию $P = D(Q)$, а ее график — *кривой спроса*; здесь Q — количество товара, приобретенного потребителями по цене P.

Хотя любое предположение о виде функциональных зависимостей $S(Q)$ и $D(Q)$ будет упрощением действительности, исследование этих функций позволяет частично "оценить" реальную ситуацию. Таким образом, анализируя модель, можно оценивать, предсказывать изменение исследуемых величин**. Чем ближе модель к реальности, тем, вообще говоря, она сложнее и тем более точными могут оказаться прогнозы и оценки.

Некоторые содержательные выводы о взаимном влиянии показателей можно сделать, исследуя поведение графиков соответствующих функций. Посмотрим, например, на графики функций спроса и предложения, приведенные ниже.

$D(Q) := -5 \cdot Q + 150$ функция спроса

$S(Q) := \frac{Q^2}{4} + \frac{Q}{2} + 70$ функция предложения

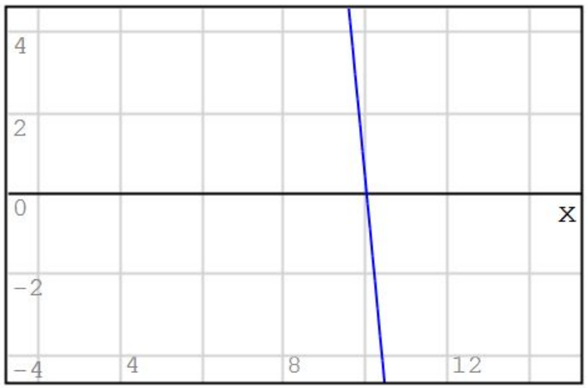


Представляет интерес точка пересечения кривых спроса и предложения. Эта точка называется *точкой равновесия*, а соответствующая цена — *равновесной ценой*. Пересечение графиков при $P = 100$ означает, что при такой цене весь произведенный товар раскупается, спрос и предложение совпадают. При ценах ниже равновесной ($P < 100$) спрос превышает предложение, $D(Q) > S(Q)$, возникает "дефицит" товара и производители могут повышать цену, рыночная цена будет стремиться к равновесной. Если же цены выше равновесной цены, $P > 100$, то $S(Q)$ больше $D(Q)$, предложение превышает спрос, остается нереализованная продукция, что побуждает производителей снижать цену, и рыночная цена будет стремиться к равновесной. Следует заметить, что здесь рассмотрена очень упрощенная модель: ведь цена — не единственный фактор, определяющий изменение спроса и предложения; с некоторыми другими факторами мы познакомимся в разделе, посвященном функциям нескольких переменных в экономических задачах.

https://ru.smath.com/Решение в среде Smath Studio - скачать тут https://ru.smath.com/обзор/Решение в среде Smath Studio - скачать тут https://ru.smath.com/обзор/SMathStudio/Решение в

$$D(x) := -5 \cdot x + 150 \qquad S(x) := \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 70$$

$$P(x) := D(x) - S(x)$$



$P(x)$

$$\begin{cases} D(x) \\ S(x) \end{cases}$$

$$d := 0{,}0001$$

$$a := 8 \qquad b := 12 \qquad x := \frac{(a+b)}{2}$$

$$P(a) = 20 \qquad P(b) = -22$$

$$\begin{array}{l} \text{while } |P(x)| \geq d \\ \left| \begin{array}{l} x := \dfrac{(a+b)}{2} \\ \text{if } P(x) \cdot P(a) < 0 \\ \quad b := x \\ \text{else} \\ \quad a := x \end{array} \right. \end{array}$$

$$x = 10 \qquad P(x) = 0$$

Варианты заданий

Задание 3.17. Изобразите кривые спроса и предложения. Найдите равновесную цену. Выполните задание для функций $D(Q) = -AQ + B$ и $S(Q) = Q^2/C + Q/D + E$.

N	A	B	C	D	E	N	A	B	C	D	E
1	3	120	4	2	80	**11**	4	140	5	5	50
2	5	12	4	2	80	**12**	5	130	5	7	80
3	4	100	3	2	70	**13**	7	150	5	7	80
4	5	120	2	5	70	**14**	6	140	7	7	70
5	7	100	2	5	70	**15**	4	140	7	7	70
6	6	120	3	7	90	**16**	3	120	3	2	70
7	4	140	7	2	60	**17**	5	120	3	2	70
8	5	130	7	2	60	**18**	4	100	2	5	70
9	7	100	7	2	60	**19**	6	120	2	5	70
10	6	140	5	5	50	**20**	7	100	3	7	90

Задание 1.2

Функции спроса. Зависимость спроса от дохода

Предметом теории потребления является исследование того, как люди распределяют заработную плату между различными расходными статьями своего бюджета, в каких объемах они покупают продукты потребления и т.д.

Функции спроса описывают зависимость спроса D на приобретаемый продукт потребления от цены P этого продукта и от дохода потребителя x, $D = D(x, P)$. При фиксированной ценс P функция спроса зависит только от дохода: $D = D(x)$.

Рассмотрим в качестве примера *функции спроса Торнквиста** $D(x)$, которые описывают зависимость величины спроса на различные *группы* товаров в зависимости от их цены и роли в потребительской корзине:

$$D_0(x) = \frac{\alpha x(x+\beta)}{x^2+\gamma}$$ — спрос на малоценные товары;

$D_1(x) = \dfrac{\alpha x}{x+\beta}$ — спрос на товары первой необходимости;

$D_2(x) = \dfrac{\alpha(x-\gamma)}{x+\beta}$ — спрос на товары второй необходимости (относительная роскошь);

$D_3(x) = \dfrac{\alpha x(x-\gamma)}{x+\beta}$ — спрос на предметы роскоши.

Здесь α, β, γ — некоторые фиксированные параметры.

Графики функций спроса Торнквиста

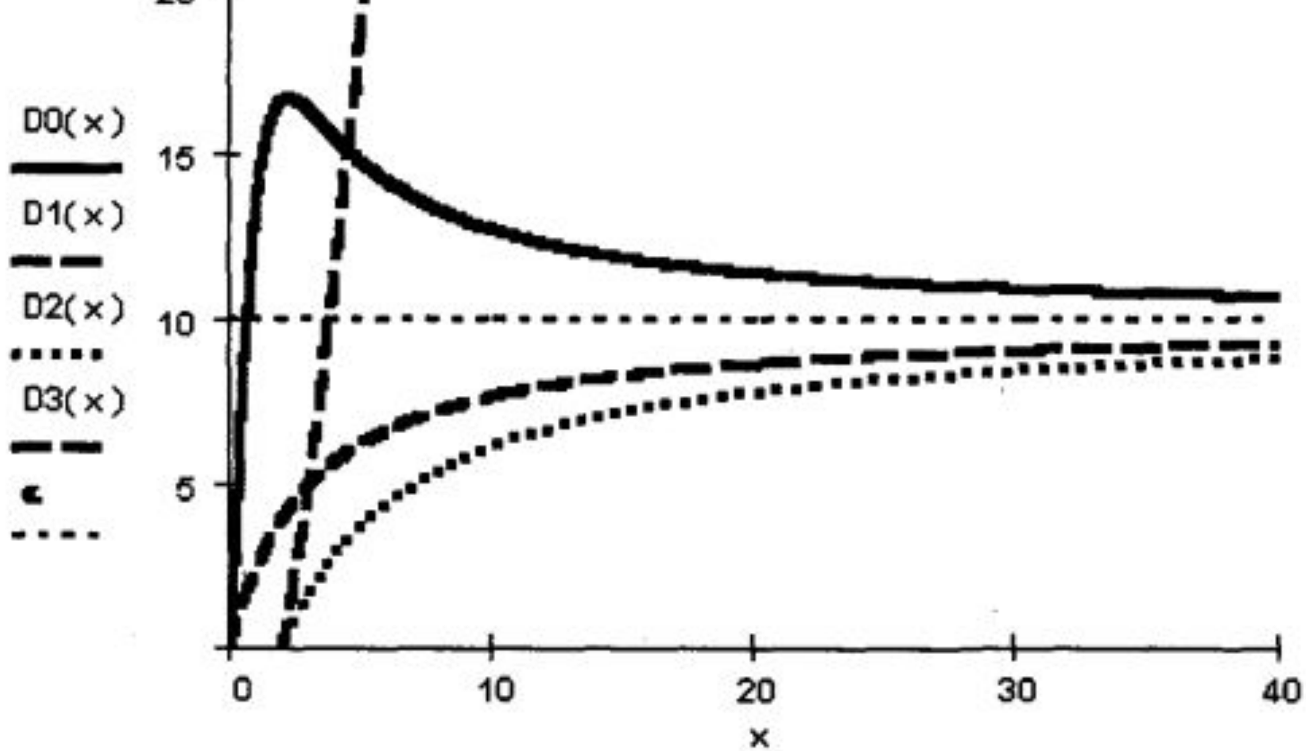
$\alpha := 10$ $\beta := 3$ $\gamma := 2$ x -- доход

$D0(x) := \dfrac{\alpha \cdot x \cdot (x+\beta)}{x^2+\gamma}$ спрос на малоценные товары

$D1(x) := \dfrac{\alpha \cdot x}{x+\beta}$ спрос на товары первой необходимости

$D2(x) := \dfrac{\alpha \cdot (x-\gamma)}{x+\beta}$ спрос на товары второй необходимости (относительная роскошь)

$D3(x) := \dfrac{\alpha \cdot x \cdot (x-\gamma)}{x+\beta}$ спрос на предметы роскоши



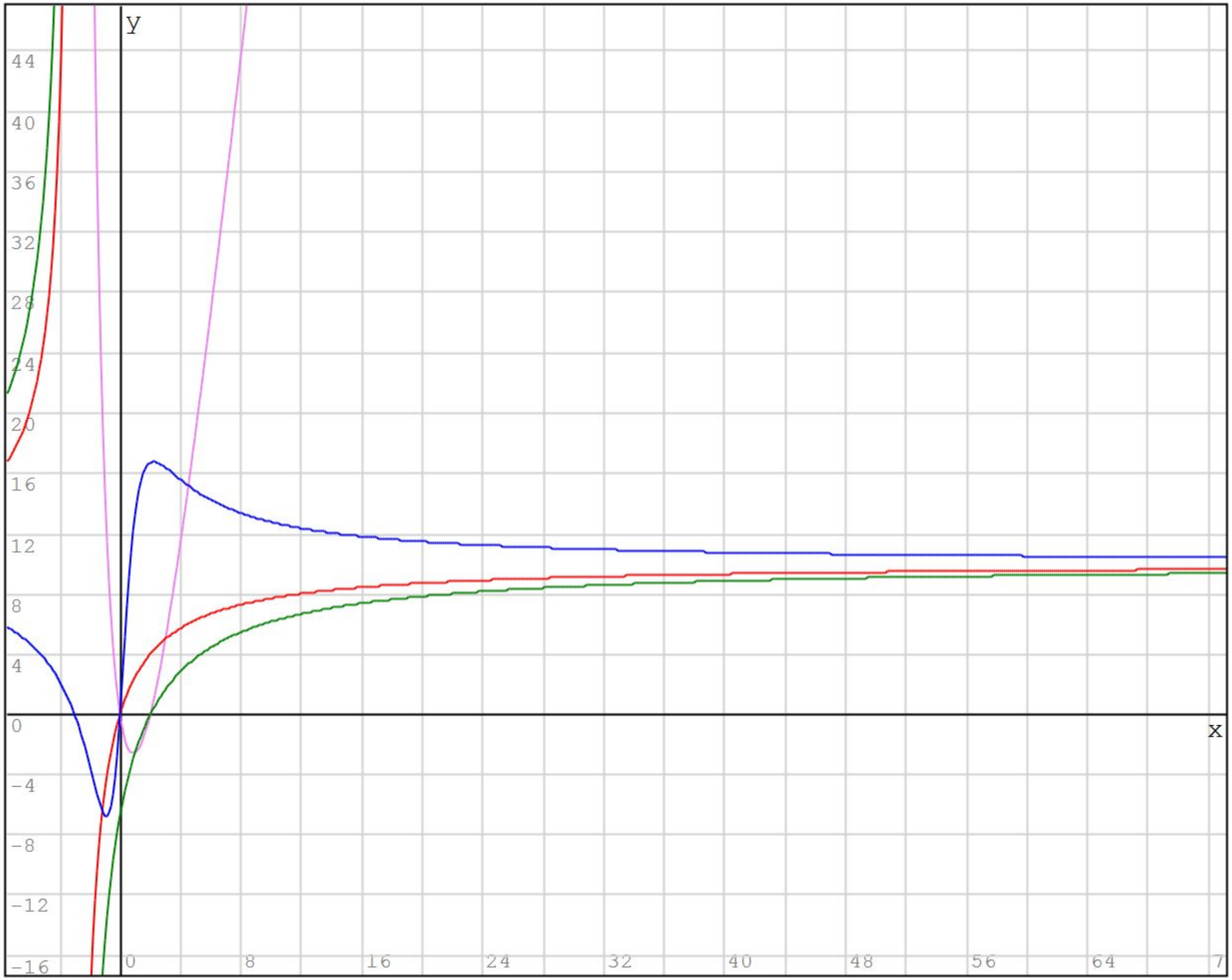
Из приведенных графиков видно, что при $\alpha = 10$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ спрос на малоценные товары растет при малых доходах, а затем с ростом доходов начинает падать и стремится к величине α сверху. Спрос на товары первой необходимости растет с ростом доходов и стремится к величине α снизу. Товары второй необходимости и предметы роскоши приобретают только люди с доходом, превышающим $\gamma = 2$. При этом спрос на товары второй необходимости отстает от спроса на товары первой необходимости и ограничен сверху значением α. И только спрос на предметы роскоши с ростом доходов постоянно растет.

Решение в среде SMath Studio

$$\alpha := 10 \qquad \beta := 3 \qquad \gamma := 2$$

$$D0(x) := \frac{\alpha \cdot x \cdot (x + \beta)}{x^{2} + \gamma} \qquad D1(x) := \frac{\alpha \cdot x}{x + \beta}$$

$$D2(x) := \frac{\alpha \cdot (x - \gamma)}{x + \beta} \qquad D3(x) := \frac{\alpha \cdot (x - \gamma) \cdot x}{x + \beta}$$



$$\begin{cases}\begin{cases}D0(x)\\ D1(x)\end{cases}\\ \begin{cases}D2(x)\\ D3(x)\end{cases}\end{cases}$$

Варианты заданий

Задание 3.18. Изобразите график заданной функции спроса. Исследуйте вид кривой при разных значениях параметров.

Варианты 1–10: исследуйте функцию $D_0(x) = \dfrac{\alpha x(x+\beta)}{x^2+\gamma}$.

Варианты 11–20: исследуйте функцию $D_1(x) = \dfrac{\alpha x}{x^2+\beta}$.

N	α	β	γ	N	α	β	γ	N	α	β	γ	N	α	β	γ
1	11	3	2	**6**	13	4	2	**11**	11	3	2	**16**	13	4	2
2	12	3	2	**7**	12	4	2	**12**	12	3	2	**17**	12	4	2
3	13	3	2	**8**	12	5	3	**13**	13	3	2	**18**	12	5	3
4	14	3	2	**9**	12	5	4	**14**	14	3	2	**19**	12	5	4
5	14	4	2	**10**	10	5	5	**15**	14	4	2	**20**	10	5	5

Задание 1.3

Максимальная прибыль

В наиболее общем виде *прибыль** π — разность между *выручкой предприятия* от реализации *продукции* R и *полными издержками* (*затратами*) C: $\pi = R - C$.

Поскольку цена определяется не тем, сколько хочет получить производитель, а тем, сколько готов заплатить потребитель, то полный доход, полученный от реализации товара в количестве Q по цене P, вычисляется по формуле $R = QP(Q)$, где $P = P(Q)$ — соответствующая функция спроса.

Полные издержки C разделяют на *постоянные* (C_f), которые не зависят от объема производства Q, и переменные (C_v) — затраты на производство единицы продукции, т.е.

$$C = C_f + C_v Q.$$

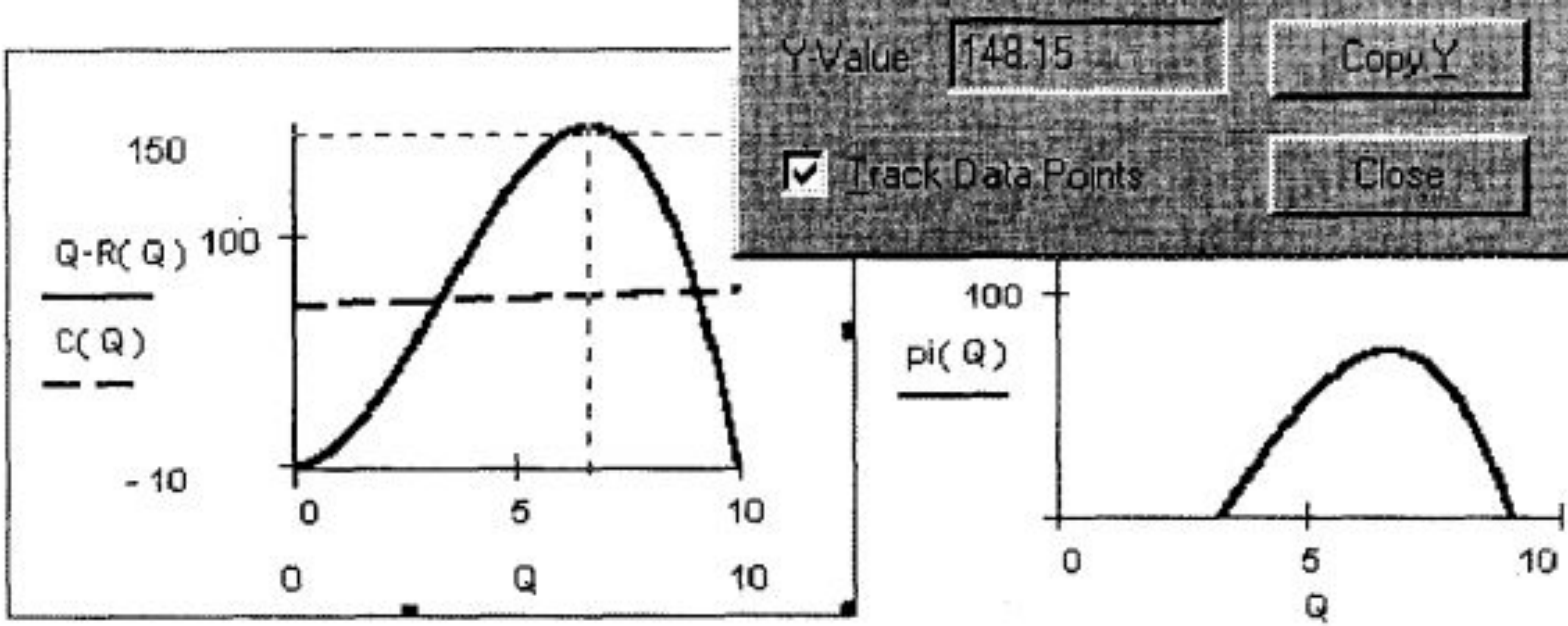
Задача об определении максимальной прибыли состоит в определении такого объема производства $Q_{\max}$, при котором достигается максимальная прибыль, т.е. требуется при заданных значениях C_f, C_v и заданной функции спроса $P = P(Q)$ найти максимум функции

$$\pi(Q) = QP(Q) - (C_f + C_v Q).$$

Ниже приведено графическое решение задачи о максимальной прибыли для квадратичной функции $P(Q) = 10Q - Q^2$ и для $C_f = 70$, $C_v = 0.7$.

$$Cf := 70 \qquad Cv := 0.7$$

$$R(Q) := -Q^2 + 10 \cdot Q \qquad C(Q) := Cf + Cv \cdot Q \qquad pi(Q) := Q \cdot R(Q) - C(Q)$$



$^*\pi$ — profit (англ.) — прибыль, R — revenue — доход, C — cost — издержки.

Указание. Для того чтобы найти геометрически выпуск продукции Q, при котором достигается максимум прибыли, изобразите на одном графике кривую полного дохода и линию издержек. Максимум прибыли достигается в точке, где расстояние между кривыми максимально. Видно, что производство прибыльно только при $Q_1 < Q < Q_2$, где Q_1 и Q_2 — точки пересечения графиков полного дохода и затрат, поскольку при таких значениях Q полный доход превышает издержки. В

Ниже приведено символьное вычисление точек, определяющих границы прибыльного объема производства, и точки максимальной прибыли. Границы интервала, на котором полный доход превышает издержки, вычислены как решения уравнения $R(Q) - C(Q) = 0$, а точка максимальной прибыли — как решение уравнения $\dfrac{d\pi(Q)}{dQ} = 0$.

Given $\left(-Q^2 + 10 \cdot Q\right) - \left(Cf + Cv \cdot Q\right) = 0$

$\mathrm{Find}(Q) \rightarrow (4.65 - 6.9553935905885297355i \quad 4.65 + 6.9553935905885297355i)$

$Q1 := 1.5479845261507801434 \qquad Q2 := 7.7520154738492198566$

Given $\dfrac{d}{dQ} pl(Q) = 0$

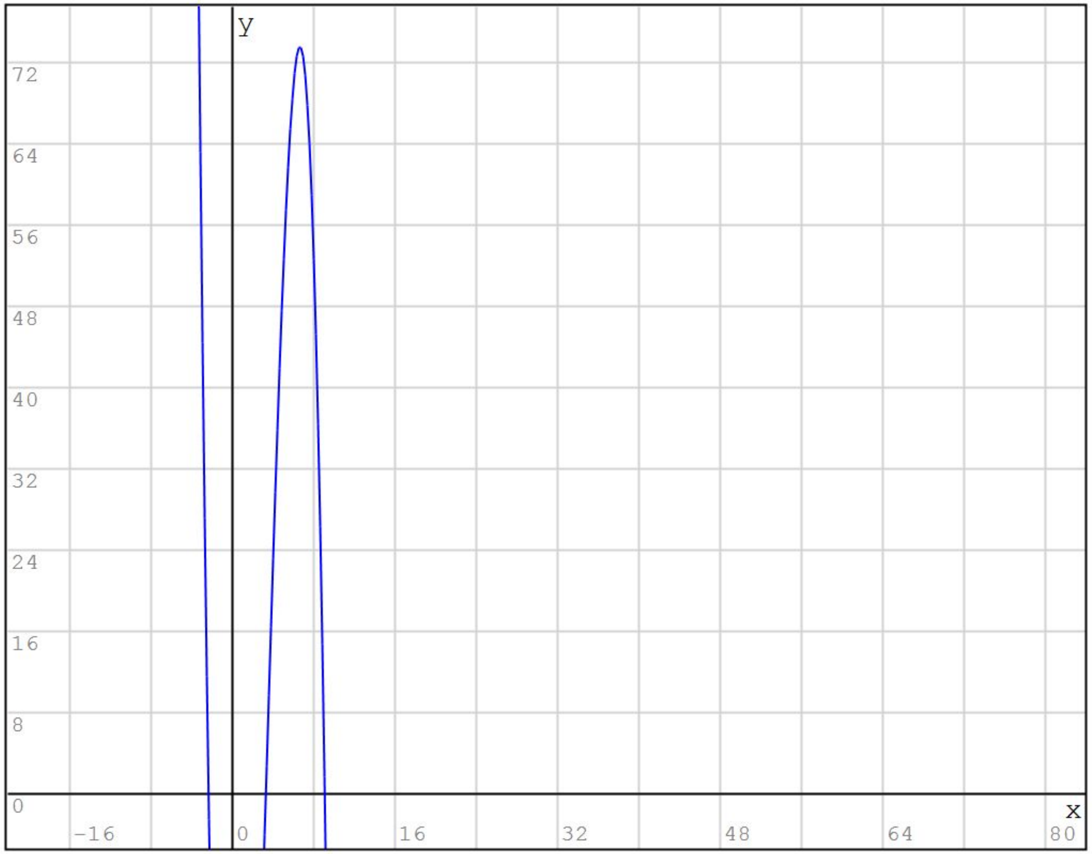
$\mathrm{Find}(Q) \rightarrow (.035185705076257006 \quad 6.6314809615904096 66)$

$Qmax := 6.6314809615904096 66 \qquad pl(Qmax) = 73.494$

Решение задачи в среде Smath Studio с использованием панели программирования и производных

$R(x) := -x^2 + 10 \cdot x \qquad C(x) := 70 + 0{,}7 \cdot x$

$$P(x) := R(x) \cdot x - C(x) = \frac{-7 \cdot (100 + x) + 10 \cdot x^2 \cdot (10 - x)}{10}$$



$P(x)$

$$a := 5 \qquad b := 15$$

$$Pm(x) := \frac{d}{d\,x} P(x) = \frac{-7 + 10 \cdot x \cdot (-x + 2 \cdot (10 - x))}{10}$$

$$x := a \qquad d := 0,1$$

$$max := Pm(a) = 24,3$$

```
while x ≤ b
    x := x + d
    if P(x) > max
        max := P(x)
        m := x
    else
        continue
```

$$max = 73,484 \qquad m = 6,6$$

Варианты заданий

Задание 3.19. Найдите графически и численно максимальную прибыль и границы прибыльного производства для заданной функции полного дохода и функции издержек. Выполните вычисления для функции дохода $P = AQ - Q^2$ и для функции издержек $C = C_f + C_v Q$.

N	A	C_f	C_v	N	A	C_f	C_v	N	A	C_f	C_v	N	A	C_f	C_v
1	10	60	0.6	**6**	10	80	0.2	**11**	11	80	0.6	**16**	12	100	0.6
2	10	60	0.9	**7**	10	100	0.6	**12**	11	80	0.9	**17**	12	100	0.9
3	10	60	0.2	**8**	10	100	0.9	**13**	11	80	0.2	**18**	9	80	0.2
4	10	80	0.6	**9**	10	100	0.2	**14**	12	100	0.2	**19**	9	80	0.6
5	10	80	0.9	**10**	10	100	0.5	**15**	12	100	0.5	**20**	9	80	0.9

Функции бюджетного ограничения. Бюджетные ограничения на расходы потребителя формируются величиной его доходов. Если потребитель хочет получить за счет своего дохода два различных блага x и y, то бюджетный доход накладывает следующее ограничение на объемы блага x и y:

$$xp_x + yp_y = I, \tag{3.1}$$

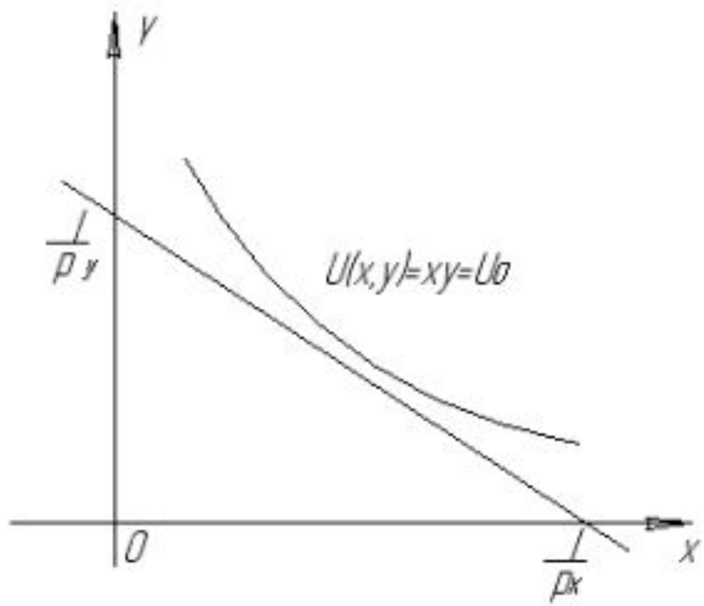
где I – доход потребителя;

p_x и p_y – цены благ x и y соответственно.

Зависимость возможных объемов получения благ в системе координат $y(x)$, где по оси абсцисс отложена величина блага x, а по оси ординат – блага y, описывается из уравнения ограничения на совокупный доход соотношением

$$y = \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x. \tag{3.2}$$

График этой функции представлен на рис. 3.12 прямой линией бюджетного ограничения, имеющей отрицательный наклон, равный по абсолютной величине относительной цене блага x. Точки пересечения с осями $\left[\frac{I}{p_y}\right]$ и $\left[\frac{I}{p_x}\right]$ определены количеством благ y и x, которые можно приобрести по соответствующим ценам p_y или p_x, если потратить на одно из благ весь доход I.



Р и с. 3.12. Бюджетное ограничение

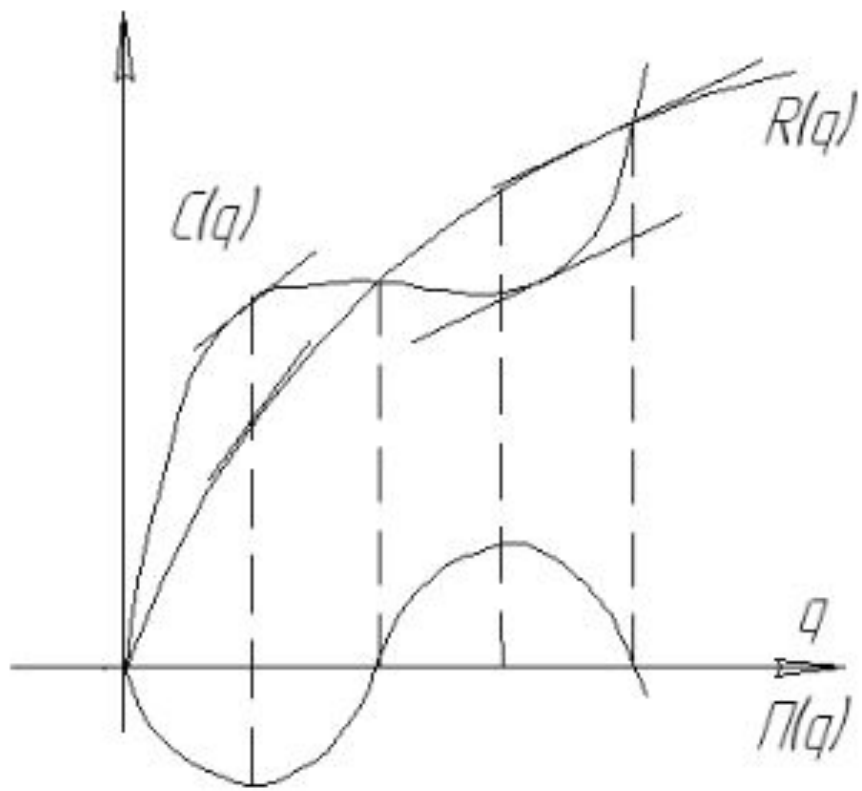
Модели зависимости издержек и дохода от объема производства. Рассмотрим функциональные зависимости издержек $C(q)$ и дохода фирмы $R(q)$ от объема производства q. Поведение функции дохода зависит от функции спроса $p(q)$ и определяется по формуле

$$R(q) = qp(q). \tag{3.3}$$

Далее более подробно проанализируем поведение функции издержек. Вначале при небольшом объеме производства q издержки фирмы велики и растут быстрее, чем доход. При увеличении объема производства скорость роста издержек снижается, в некоторый момент издержки уравниваются с доходом, и затем фирма начинает получать прибыль. При увеличении объема производства прибыль увеличивается, достигая максимума при оптимальном значении q.

При дальнейшем увеличении объема производства издержки снова начинают расти быстрее дохода, т.к. имеющиеся эффективные ресурсы исчерпаны, требуются новые помещения, сырье, персонал, т.е. необходимо расширение производства, вследствие чего прибыль фирмы уменьшается, при достаточно больших объемах производства достигает отрицательных значений. Графики дохода, издержек и прибыли, приведенные на рис. 3.14, могут быть описаны функциями

$$R(q) = aq - bq^2,$$
$$C(q) = cq - dq^2 + gq^3. \tag{3.4}$$



Р и с. 3.14. Графики дохода, издержек и прибыли

ПОНЯТИЕ ЭЛАСТИЧНОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

Понятие эластичности определяет чувствительность изменения выходной характеристики (значения функции) к изменению входного параметра (значения аргумента).

Эластичность Ex(y) является коэффициентом пропорциональности между относительными изменениями величин y и x и показывает, на сколько процентов увеличится величина y при увеличении x на один процент.

1. Эластичность степенной функции $y=x^{\alpha}$ постоянна и равна показателю степени α: $E_x(x^{\alpha})=\alpha$.

2. Эластичность показательной функции $y=a^x$ пропорциональна x: $E_x(a^x)=x\ln(a)$.

3. Эластичность линейной функции $y=ax+b$ имеет вид

$$E_x(ax+b)=\frac{d(ax+b)}{dx}\cdot\frac{x}{ax+b}=\frac{ax}{ax+b}.$$

ВИДЫ ЭЛАСТИЧНОСТЕЙ В ЭКОНОМИКЕ

Эластичность спроса от цены. Пусть задана функция спроса $D(P)$, тогда эластичность спроса от цены определяется как

$$E_D = -\frac{P}{D} \cdot \frac{dD(P)}{dP}. \qquad (3.14)$$

Эластичность спроса от цены показывает относительное изменение величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризует чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию.

Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине больше единицы $|E_D| > 1$, то спрос называют *эластичным* (*совершенно эластичным* при бесконечно большой величине эластичности спроса). В этом случае при повышении цены товара на 1% спрос на товар понижается более чем на 1%; при понижении цены товара на 1% спрос на товар повышается более чем на 1%.

Если $|E_D| < 1$, то это товар *неэластичного спроса*. В этом случае при повышении цены товара на 1% спрос на товар понижается менее чем на 1%; при понижении цены товара на 1% спрос на товар повышается менее чем на 1%.

Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине равна единице, то говорят о спросе с *единичной эластичностью*.

Таким образом, если спрос эластичен, то изменение цены вызывает обратное изменение выручки. В случае, если спрос неэластичен, изменение выручки и цены происходит однонаправленно.

Эластичность предложения от цены. Пусть задана функция предложения $S(P)$, тогда эластичность предложения от цены определяется как

$$E_S = \frac{P}{S} \cdot \frac{dS(P)}{dP}. \quad (3.15)$$

Эластичность предложения от цены показывает, на сколько процентов изменится предложение товара при изменении его цены на 1%.

Эластичность спроса по доходу. Обозначим доход потребителей через I, тогда эластичность спроса по доходу имеет вид

$$E_I = -\frac{I}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial I}, \tag{3.16}$$

где ∂D – частная производная функции спроса по I.

Этот вид эластичности характеризует относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителей этого блага на один процент.

Положительная эластичность спроса по доходу характеризует нормальные (качественные) товары, а отрицательная величина – малоценные (некачественные) товары.

Так, высокий положительный коэффициент спроса по доходу в отрасли указывает, что ее вклад в экономический рост больше, чем доля в структуре экономики, и она имеет шансы на расширение и процветание в будущем. Наоборот, если коэффициент эластичности спроса на продукцию отрасли по доходу имеет небольшое положительное или отрицательное значение, то ее может ожидать застой и перспектива сокращения производства.

Также товары с $E_I > 1$ иногда классифицируют как предметы роскоши.

Эластичность спроса для случая функции многих переменных. Как правило, рыночный спрос зависит от многих факторов. Пусть спрос D зависит от цены P_1 этого товара, цены P_2 альтернативного товара и дохода потребителей I: $D=D(P_1, P_2, I)$.

Перекрёстный коэффициент эластичности определяется следующим образом:

$$E_2 = \frac{P_2}{D} \cdot \frac{\partial D}{\partial P_2} \qquad (3.17)$$

и характеризует относительное изменение величины спроса на одно благо при изменении цены на другое благо (замещающее или дополняющее его в потреблении) на один процент.

Положительный знак перекрестной эластичности спроса по цене свидетельствует о замещаемости благ, а отрицательный – о дополняемости. При $E_2=0$ товары характеризуются как независимые.

Ценовая эластичность ресурсов. Ценовая эластичность ресурсов определяется по формуле

$$E_{pi}(R_i) = \left[\frac{dR_i}{R_i}\right] \Big/ \left[\frac{dP_i}{P_i}\right] = \frac{dR_i}{dP_i} \cdot \frac{P_i}{R_i} \tag{3.18}$$

и характеризует относительное изменение величины спроса на какой-либо ресурс R_i (например труд) при изменении цены этого ресурса P_i (соответственно, заработной платы) на один процент.

Эластичность замещения одного ресурса другим. Ценовая эластичность замещения одного ресурса другим определяется по формуле

$$E_{Rj}(R_i) = \left[\frac{dR_i}{R_i}\right] \Bigg/ \left[\frac{dR_j}{R_j}\right] = \frac{dR_i}{dR_j} \cdot \frac{R_j}{R_i}, \qquad (3.19)$$

характеризует относительное изменение величины одного ресурса R_i (например капитала) при изменении количества другого ресурса R_j (например труда) на один процент с тем, чтобы выпуск при этом не изменился.

Задание 1.4. Эластичность спроса по цене

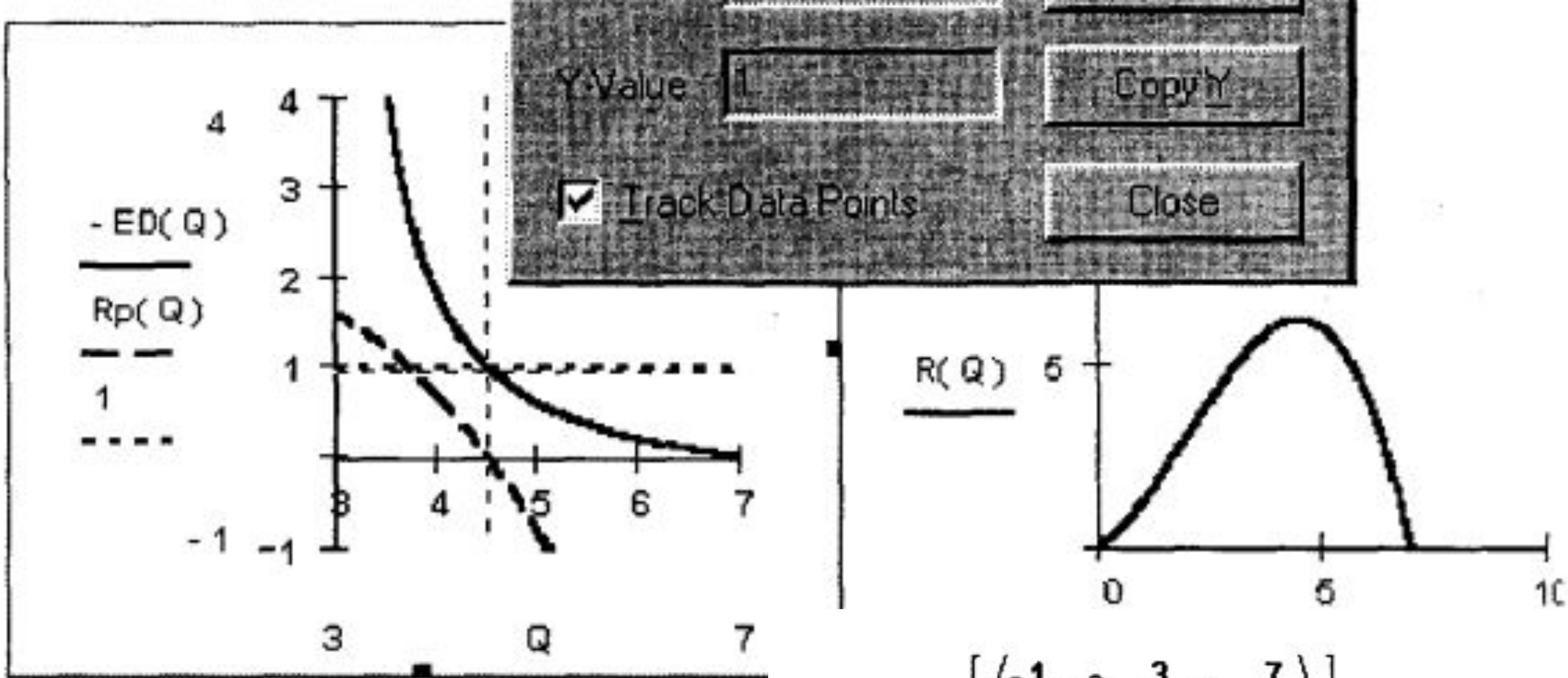
Ниже приведены вычисления предельного дохода и эластичности спроса по цене, графики эластичности, предельного дохода и график дохода. В приведенном документе показано вычисление значения P, при котором спрос на исследуемый товар теряет эластичность.

$$P(Q) := \frac{-Q^2}{10} + \frac{3}{5} \cdot Q + \frac{7}{10}$$

$$ED(Q) := \frac{P(Q)}{Q} \cdot \frac{1}{\frac{d}{dQ}P(Q)} \qquad ED(Q) \rightarrow \frac{\left(\frac{-1}{10} \cdot Q^2 + \frac{3}{5} \cdot Q + \frac{7}{10}\right)}{\left[Q \cdot \left(\frac{-1}{5} \cdot Q + \frac{3}{5}\right)\right]}$$

$$R(Q) := Q \cdot P(Q) \qquad R(Q) \rightarrow Q \cdot \left(\frac{-1}{10} \cdot Q^2 + \frac{3}{5} \cdot Q + \frac{7}{10}\right)$$

$$Rp(Q) := \frac{d}{dQ}R(Q) \qquad Rp(Q) \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot Q^2 + \frac{3}{5} \cdot Q + \frac{7}{10} + Q \cdot \left(\frac{-1}{5} \cdot Q + \frac{3}{5}\right)$$



$$\text{Given}\qquad -\left[\frac{\left(\frac{-1}{10}\cdot Q^2+\frac{3}{5}\cdot Q+\frac{7}{10}\right)}{\left[Q\cdot\left(\frac{-1}{5}\cdot Q+\frac{3}{5}\right)\right]}\right]=1$$

$$\text{Find}(Q)\rightarrow\left[2-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{57}\quad 2+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{57}\right]$$

$$Q:=2+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{57}\qquad Q=4.517\qquad P(Q)=1.37$$

У к а з а н и е. Графики подтверждают высказанные выше утверждения о связи эластичности спроса по цене с предельным и суммарным доходом. В документе показано символьное вычисление значения Q, при котором $|E_D| = 1$ (найдено решение уравнения $-E_D = 1$), и вычисление соответствующего значения цены $P = P(Q)$. Исследуемый товар является товаром эластичного спроса, и суммарный доход от его реализации растет, когда цена товара не превышает величины $P = 1.37$. При такой цене достигается максимум суммарного дохода.

Решение 1.4 в Smath Studio

$$P(x) := -\frac{x^2}{10} + 3 \cdot \frac{x}{5} + \frac{7}{10}$$

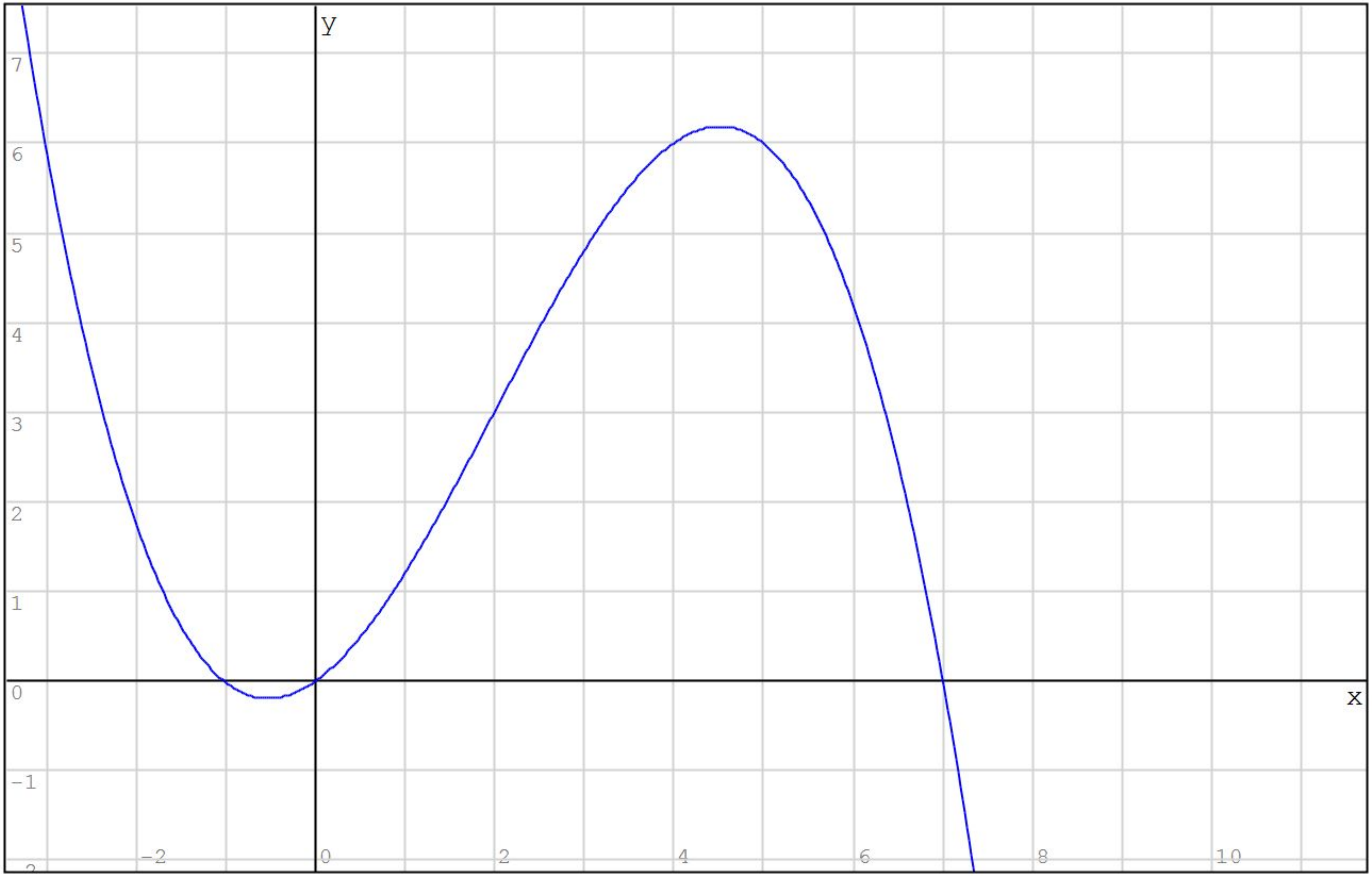
$$ED(x) := \left(\frac{P(x)}{x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{d}{d\,x} P(x)} = -\frac{7 + x \cdot (6 - x)}{2 \cdot x \cdot (-3 + x)}$$

$$R(x) := x \cdot P(x) = \frac{x \cdot (7 + x \cdot (6 - x))}{10}$$

$$Rp(x) := \frac{d}{d\,x} R(x) = \frac{7 - x \cdot (-6 + x + 2 \cdot (-3 + x))}{10}$$

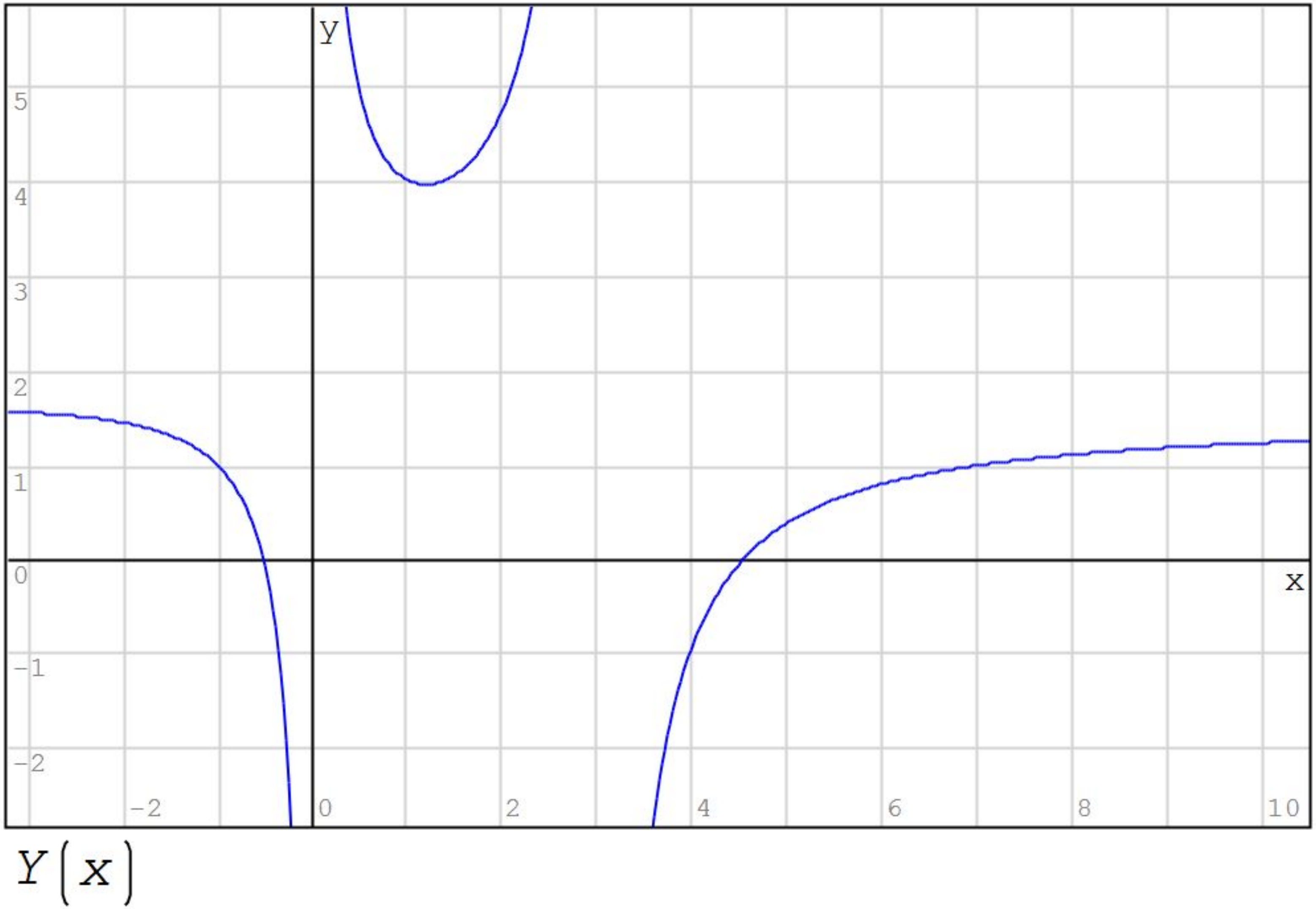
$$y(x) := 1$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-ED(x)\\R(x)\end{array}\right.\\y(x)\end{array}\right.$$



$R(x)$

$$Y(x) := 1 + ED(x)$$



$a := 3{,}5$ $\qquad b := 7$ $\qquad d := 0{,}001$

$$c := \frac{(a+b)}{2} \qquad Y(a) = -3{,}5 \qquad Y(b) = 1$$

$$
\begin{array}{l}
\texttt{while } |Y(c)| > d \\
\quad \left| \begin{array}{l}
c := \dfrac{(a+b)}{2} \\
\texttt{if } Y(a) \cdot Y(c) < 0 \\
\quad b := c \\
\texttt{else} \\
\quad a := c
\end{array} \right.
\end{array}
$$

$$c = 4{,}5168 \qquad P(c) = 1{,}3699$$

Варианты заданий

Задание 3.21. Найдите для заданной функции спроса $P(Q) = -aQ^2 + bQ + c$ эластичность E_D спроса по цене и соответствующий предельный доход. Постройте графики эластичности E_D и предельного дохода. Найдите значение Q и соответствующую цену, при которой $|E_D| = 1$. Сформулируйте выводы.

N	a	b	c	N	a	b	c
1	1/15	0.5	0.7	**11**	0.1	6/7	0.3
2	1/15	4/7	0.7	**12**	0.1	6/7	0.5
3	1/15	4/9	0.7	**13**	0.1	6/7	0.7
4	1/15	5/7	0.7	**14**	0.1	6/7	1
5	1/15	5/9	1	**15**	2/15	6/7	1
6	1/15	5/9	0.8	**16**	2/15	6/7	0.9
7	1/15	5/9	0.5	**17**	2/15	6/7	0.8
8	1/15	5/9	0.6	**18**	2/15	6/7	0.7
9	0.1	5/9	1	**19**	2/15	6/7	0.5
10	0.1	5/9	0.8	**20**	2/15	6/7	0.3