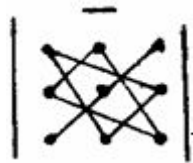


Вихрь (ротатор) векторного поля \mathbf{B}

$$\text{rot} \cdot \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$



Вычислить дивергенцию векторного произведения полей \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Решение. Здесь удобно воспользоваться оператором Гамильтона, записав

$$\text{div} [\mathbf{AB}] = \nabla [\mathbf{AB}].$$

Оператор Гамильтона является дифференциальным оператором, поэтому к приведенному векторному произведению можно применить обычные правила дифференцирования произведения:

$$\nabla [\mathbf{AB}] = \nabla_A [\mathbf{AB}] + \nabla_B [\mathbf{AB}].$$

Нижние индексы у оператора указывают поле, на которое он воздействует. Поле, на которое оператор не воздействует, должно быть вынесено за знак оператора подобно константе. В результате получаем

$$\text{div} [\mathbf{AB}] = \mathbf{B} [\nabla_A A] + A [\nabla_B B] = \mathbf{B} \text{rot} A - A \text{rot} B.$$

Теорема Умова – Пойтинга. Вектор Пойтинга. Теорема подобия. Граничные задачи электродинамики.

Интегральная	Дифференциальная	Комплексная
$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_s \vec{\delta} d\vec{S} + \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{H} = j\omega \epsilon_{ka} \vec{E}$
$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_s \vec{B} d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}$
$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho_{своб} dV = \sum q_{своб}$	$\text{div } \vec{D} = \rho_{своб}$	$\text{div } \vec{D} = \rho$
$\oint_s \vec{B} d\vec{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$		

теорема Умова-Пойнтинга в дифференциальной форме записи

$$-\text{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] = \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right).$$

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Домножим почленно первое уравнение Максвелла скалярно на \vec{E} , а второе – на \vec{H} и вычтем из первого уравнения второе уравнение. Получим

$$\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E} = \gamma \vec{E} \vec{E} + \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

$$\text{div} [AB] = B[\nabla_A A] + A[\nabla_B B] = B \text{rot } A - A \text{rot } B.$$

$$\vec{E} \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \text{rot } \vec{E} = \text{div} \left[\vec{H} \times \vec{E} \right] = -\text{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right],$$

$$-\text{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] = \gamma E^2 + \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \left(\vec{E} \right)}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \left(\vec{H} \right)}{\partial t}.$$

$$-\text{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] = \gamma E^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \left(\epsilon_a E^2 \right)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \left(\mu_a H^2 \right)}{\partial t} =$$

$$= \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right).$$

теорема Умова-Пойнтинга в дифференциальной форме записи

$$-\operatorname{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] = \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right).$$

$\frac{\varepsilon_a E^2}{2}$ энергия электрического поля в единице объёма

$\frac{\mu_a H^2}{2}$ энергия магнитного поля в единице объёма dV

γE^2 тепловые потери электромагнитной энергии.

Для определения энергии во всём объёме проинтегрируем выражение по объёму V .

Теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{K} dV = \oint_S \vec{K} \vec{dS}$$

$$\int_V -\operatorname{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] dV = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV.$$

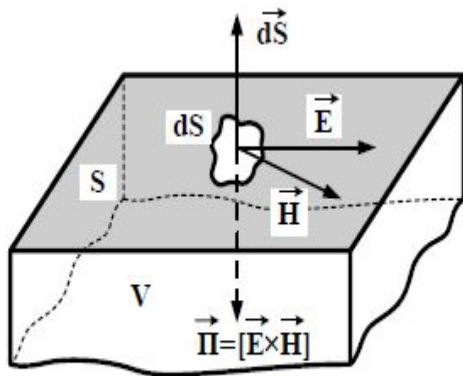
$$\int_V -\operatorname{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] dV = -\oint_S \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] \vec{dS}$$

$$-\oint_S \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] \vec{dS} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$$

теорема Умова-Пойнтинга в интегральной форме

$$-\oint_S [\vec{E} \times \vec{H}] \cdot \vec{dS} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV$$

Векторное произведение $[\vec{E} \times \vec{H}] = \vec{\Pi}$ — вектор Пойнтинга



Ориентация векторов \vec{E} , \vec{H} , $\vec{\Pi}$ относительно поверхности S , ограничивающей объём V

Если вектор $\vec{\Pi}$ направлен внутрь поверхности, то его поток, проходящий через поверхность, будет положительным:

$$-\oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} > 0 \quad (\text{при положительном направлении } \vec{dS} \text{ в сторону внешней нормали к поверхности}).$$

характеризует значение и направление перемещения энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной вектору Пойнтинга

Физический смысл теоремы Умова-Пойнтинга

энергия электромагнитного поля расходуется на тепловые потери γE^2

на приращение электрической $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} \right)$ и

магнитной $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_a H^2}{2} \right)$ энергий в заданном объёме.

Теорема Умова - Пойнтинга в комплексной форме

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + j\omega \varepsilon_a \vec{E}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H}.$$

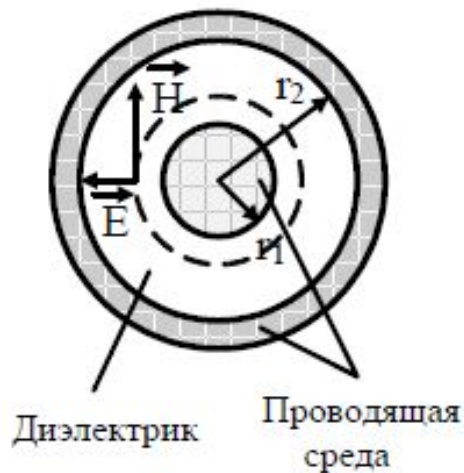
$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} \vec{E} + j\omega \varepsilon_a \vec{E} \vec{E} \quad \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu_a \vec{H} \vec{H}$$

$$\vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{div} \left[\vec{H} \times \vec{E} \right] = -\operatorname{div} \left[\vec{E} \times \vec{H} \right] \quad -\operatorname{div} \vec{\Pi} = \gamma E^2 + 2j\omega \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right)$$

$$-\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + j2\omega \int_V \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dV$$

$$P = \int_V \gamma E^2 dV \quad Q = 2\omega \int_V \left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2} \right) dV \quad -\oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = P + jQ$$

поток комплексного вектора Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность равен комплексной мощности, выделяемой внутри объёма, ограниченного этой поверхностью.



Сила постоянного тока I .

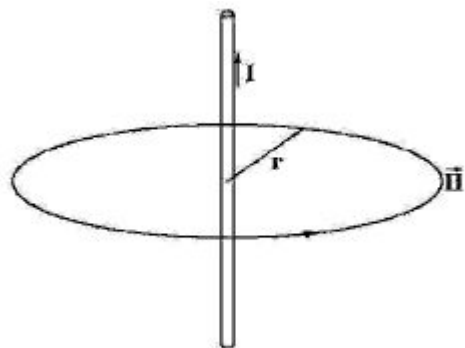
Напряжение между жилой и оболочкой U .

Проводимость материала жилы и оболочки γ .

Мощность сигнала, передаваемого по кабелю,

$$P = IU .$$

Рассчитать поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, заполняющего пространство между жилой и оболочкой.



Из первого уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s}$$

следует, что в случае постоянного тока ($d/dt = 0$)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} d\vec{s} = I,$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = H \cdot 2\pi r, \quad H = \frac{I}{2\pi r}$$

Нормальная составляющая вектора напряжённости электрического поля E_n в диэлектрике через напряжение U для коаксиального контура определяется

$$E_n = \frac{U}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

где R_1 – радиус жилы;
 R_2 – внутренний радиус оболочки.

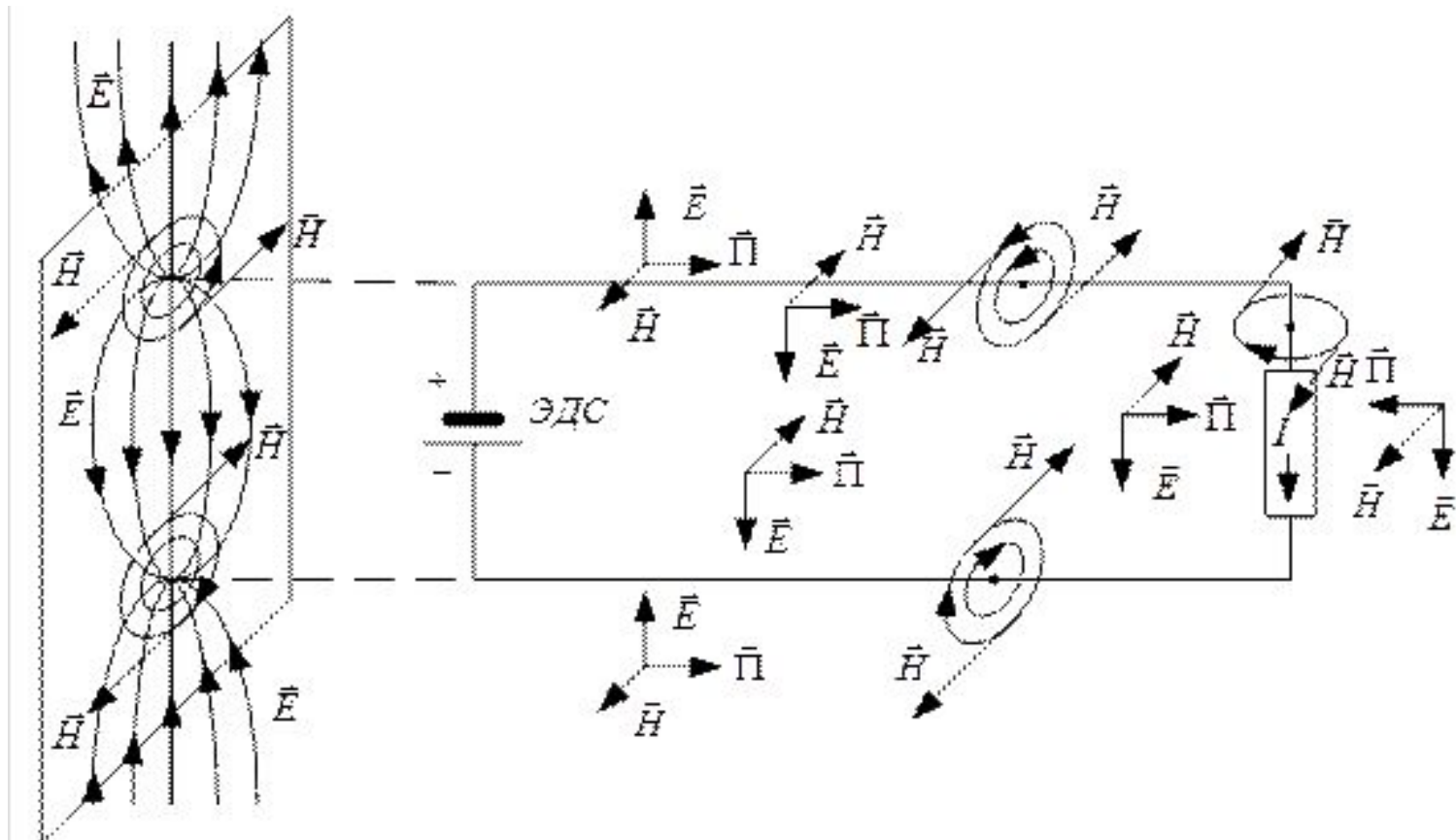
Тогда тангенциальная составляющая вектора Пойнтинга для точек диэлектрика на расстоянии r от оси ($R_1 \leq r \leq R_2$) определяется выражением

$$\Pi_r = E_n H = \frac{UI}{2\pi r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Поток вектора Пойнтинга через кольцо диэлектрика с радиусами R_1 и R_2 :

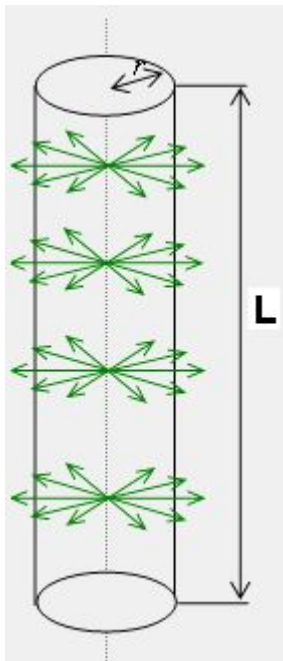
$$\oint_S \vec{\Pi} dS = \int_{R_1}^{R_2} \Pi_r 2\pi r dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \int_{R_1}^{R_2} (r^{-1}) dr = UI.$$

Электромагнитная энергия от места её генерирования к месту потребления передаётся по диэлектрику; провода являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике. По жиле и оболочке энергия к приёмнику не передаётся. Провода сами потребляют из диэлектрика энергию на покрытие тепловых потерь.



СРСР РЕФЕРАТ: «Поток вектора Пойнтинга в плоскопараллельном конденсаторе»

Приложить расчет, показать направление потока. (3-4 страницы)



Напряженность электрического поля равномерно заряженной тонкой проволоки бесконечной длины.

Найдем зависимость напряженности электрического поля равномерно заряженной тонкой проволоки бесконечной длины от расстояния r до оси проволоки, используя теорему Гаусса.

Выделим участок проволоки конечной длины L . Если линейная плотность заряда на проволоке λ , то заряд выделенного участка равен $q = \lambda L$.

$$E_n = \frac{U}{r \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)},$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon}$$

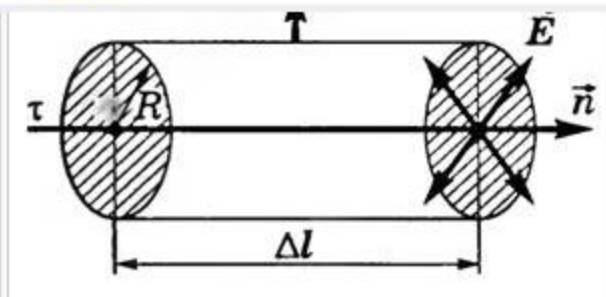


Рис. 5

Линии напряженности электростатического поля, создаваемого нитью в сечении, перпендикулярном самой нити, направлены перпендикулярно поверхности цилиндра, поэтому поток напряженности сквозь боковую поверхность $N = E \cdot 2\pi R \Delta l$, где R — радиус цилиндра. Через торцы цилиндра поток напряженности равен нулю ($\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$). Тогда полный поток напряженности через выделенный цилиндр

$$N = E \cdot 2\pi R \Delta l.$$

Заряд, находящийся внутри этого цилиндра, $q = \tau \cdot \Delta l$.

Согласно теореме Остроградского—Гаусса, можно записать $E \cdot 2\pi R \Delta l = \frac{\tau \Delta l}{\epsilon_0 \epsilon}$. Следовательно, модуль напряженности поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечно длинной нитью на расстоянии R от нее,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon R}.$$

Литература

Аксенович Л. А. Физика в средней школе: Теория. Задания. Тесты: Учеб. пособие для учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования. — Мн.: Адукацыя і выхаванне, 2004. — С. 220-222.



$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \quad \text{В среде}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$$

Электрическая
постоянная

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{В вакууме}$$
$$\epsilon = 1$$

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

$$k = \frac{F \cdot r^2}{|q_1| \cdot |q_2|}$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Линии напряженности электростатического поля, создаваемого нитью в сечении, перпендикулярном самой нити, направлены перпендикулярно боковой поверхности цилиндра, поэтому поток напряженности сквозь боковую поверхность $N = E \cdot 2\pi R \Delta l$, где R — радиус цилиндра. Через оба основания цилиндра поток напряженности равен нулю ($\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$). Тогда полный поток напряженности через выделенный цилиндр

$$N = E \cdot 2\pi R \Delta l.$$

Заряд, находящийся внутри этого цилиндра, $q = \tau \cdot \Delta l$.

Согласно теореме Остроградского—Гаусса, можно записать $E \cdot 2\pi R \Delta l = \frac{\tau \Delta l}{\epsilon_0 \epsilon}$. Следовательно, модуль напряженности поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечно длинной нитью на расстоянии R от нее,

$$E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 \epsilon R}.$$

Весь поток вектора напряженности электрического поля будет выходить через боковую поверхность цилиндра, а поток через оба основания цилиндра равен нулю. Площадь боковой поверхности равна $S = 2\pi r L$, вектор напряженности параллелен вектору нормали во всех точках боковой поверхности и постоянен по модулю, поэтому поток вектора напряженности через боковую поверхность: $\Phi = ES = 2\pi ErL$

Откуда для напряженности электрического поля получаем выражение:

Таким образом, напряженность электрического поля тонкой равномерно заряженной бесконечно длинной прямой проволоки обратно пропорциональна расстоянию от нее.