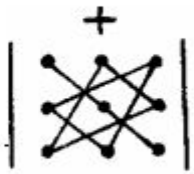
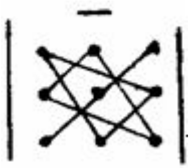




Вихрь (ротор) векторного поля B

$$\mathbf{rot}\cdot\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

Вычислить дивергенцию векторного произведения полей A и B.

Решение. Здесь удобно воспользоваться оператором Гамильтона, записав

$$div\left[\mathbf{AB}\right]=\nabla\left[\mathbf{AB}\right].$$

Оператор Гамильтона является дифференциальным оператором, поэтому к приведенному векторному произведению можно применит обычные правила дифференцирования произведения:

$$\nabla\left[\mathrm{AB}\right]=\nabla_A\left[\mathrm{AB}\right]+\nabla_B\left[\mathrm{AB}\right].$$

Нижние индексы у оператора указывают поле, на которое он воздействует. Поле, на которое оператор не воздействует, должно быть вынесено за знак оператора подобно константе. В результате получаем

$$div\left[\mathrm{AB}\right]=\mathrm{B}\left[\nabla_A A\right]+A\left[\nabla_B \mathrm{B}\right]=\mathrm{B}\,rot\ \mathrm{A}-\mathrm{A}\,rot\ \mathrm{B}.$$

Теорема Умова – Пойтинга. Вектор Пойтинга. Теорема подобия. Граничные задачи электродинамики.

Интегральная	Дифференциальная	Комплексная
$\oint_l \vec{H}\,d\vec{l} = \oint_S \vec{\delta}\,d\vec{S} + \frac{d}{dt}\oint_S \vec{D}\,d\vec{S}$	$rot\,\vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$rot\,\dot{\vec{H}} = j\omega\varepsilon_{ka}\dot{\vec{E}}$
$\oint_l \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\oint_S \vec{B}\,d\vec{S}$	$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$rot\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a\dot{\vec{H}}$
$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = \int_V \rho_{своб}dV = \sum q_{своб}$	$div\,\vec{D} = \rho_{своб}$	$div\,\dot{\vec{D}} = \dot{\rho}$
$\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0$	$div\,\vec{B} = 0$	$div\,\dot{\vec{B}} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} = \varepsilon_a\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} = \mu_a\vec{H}$, $\vec{\delta} = \gamma\vec{E}$.		

$$rot\,\vec{H} = \gamma\vec{E} + \varepsilon_a\frac{\partial \vec{E}}{\partial t};\; rot\,\vec{E} = -\mu_a\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Домножим почленно первое уравнение Максвелла скалярно на $\vec{E}$, а второе – на $\vec{H}$ и вычтем из первого уравнения второе уравнение. Получим

$$\vec{E}\,rot\,\vec{H} - \vec{H}\,rot\,\vec{E} = \gamma\vec{E}\vec{E} + \varepsilon_a\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a\vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

$$div[AB] = B[\nabla_A A] + A[\nabla_B B] = B\,rot\,A - A\,rot\,B.$$

$$\vec{E}\,rot\,\vec{H} - \vec{H}\,rot\,\vec{E} = div\left[\vec{H}\times\vec{E}\right] = -div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right],$$

$$-div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] = \gamma E^2 + \varepsilon_a\vec{E}\frac{\partial\left(\vec{E}\right)}{\partial t} + \mu_a\vec{H}\frac{\partial\left(\vec{H}\right)}{\partial t}.$$

$$-div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] = \gamma E^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\varepsilon_a E^2\right)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\mu_a H^2\right)}{\partial t} =$$

$$= \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right).$$

теорема ***Умова-Пойнтинга в дифференциальной форме записи***

$$-div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] = \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right).$$

теорема ***Умова-Пойнтинга в дифференциальной форме записи***

$$-div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]=\gamma E^2+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2}+\frac{\mu_a H^2}{2}\right).$$

$\dfrac{\varepsilon_a E^2}{2}$ энергия электрического поля в единице объёма

$\dfrac{\mu_a H^2}{2}$ энергия магнитного поля в единице объёма dV

γE^2 тепловые потери электромагнитной энергии.

Для определения энергии во всём объёме проинтегрируем выражение по объёму *V* .

Теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_V div\,\vec{K}dV=\oint_S \vec{K}\,\vec{dS}$$

$$\int_V -div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]=\int_V \gamma E^2 dV+\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2}+\frac{\mu_a H^2}{2}\right)dV\;.$$

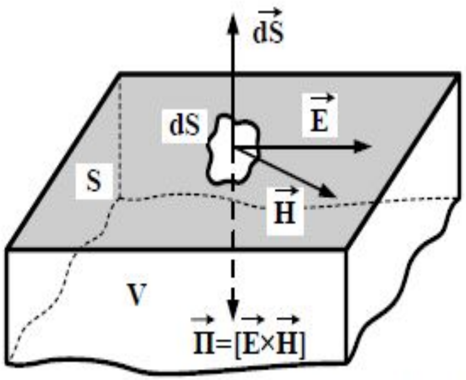
$$\int_V -div\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]=-\oint_S\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\vec{dS}$$

$$-\oint_S\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\vec{dS}=\int_V \gamma E^2 dV+\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2}+\frac{\mu_a H^2}{2}\right)dV$$

теорема Умова-Пойнтинга в интегральной форме

$$-\oint_S \left[\vec{E}\times\vec{H}\right] d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{d}{dt}\int_V \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}\right) dV$$

Векторное произведение $\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] = \vec{\Pi}$ *вектор Пойнтинга*



Ориентация векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{\Pi}$ относительно поверхности S, ограничивающей объём V

характеризует значение и направление перемещения энергии, проходящей в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной *вектору Пойнтинга*

Если вектор $\vec{\Pi}$ направлен внутрь поверхности, то его поток, проходяший через поверхность, будет положительным:

$-\oint_S \vec{\Pi}\, d\vec{S} > 0$ (при положительном направлении $d\vec{S}$ в сторону внешней нормали к поверхности).

Физический смысл теоремы Умова-Пойнтинга

энергия электромагнитного поля расходуется на тепловые потери γE^2

на приращение электрической $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2}\right)$ и

магнитной $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_a H^2}{2}\right)$ энергий в заданном объёме.

Теорема Умова - Пойнтинга в комплексной форме

$$rot\,\dot{\vec{H}} = \gamma\,\dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon_a\,\dot{\vec{E}}\,;\quad rot\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a\,\dot{\vec{H}}\,.$$

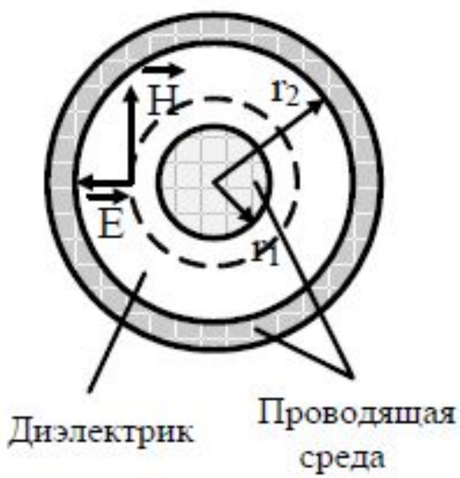
$$\dot{\vec{E}}\,rot\,\dot{\vec{H}} = \gamma\,\dot{\vec{E}}\,\dot{\vec{E}} + j\omega\varepsilon_a\,\dot{\vec{E}}\,\dot{\vec{E}} \qquad \dot{\vec{H}}\,rot\,\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_a\,\dot{\vec{H}}\,\dot{\vec{H}}$$

$$\dot{\vec{E}}\,rot\,\dot{\vec{H}} - \dot{\vec{H}}\,rot\,\dot{\vec{E}} = div\left[\dot{\vec{H}}\times\dot{\vec{E}}\right] = -div\left[\dot{\vec{E}}\times\dot{\vec{H}}\right] \qquad -div\,\dot{\vec{\Pi}} = \gamma\,E^2 + 2j\omega\left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2}\right)$$

$$-\oint_S \dot{\vec{\Pi}}\,\vec{dS} = \int_V \gamma\,E^2 dV + j2\omega\int_V\left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2}\right)dV$$

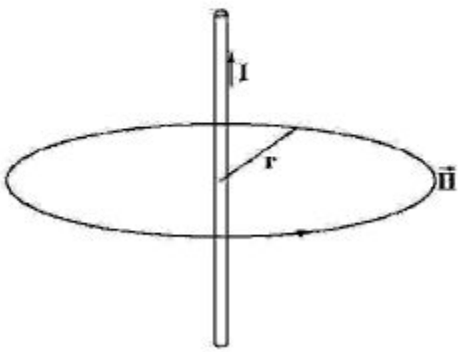
$$P = \int_V \gamma\,E^2 dV \qquad Q = 2\omega\int_V\left(\frac{\mu_a H^2}{2} - \frac{\varepsilon_a E^2}{2}\right)dV \qquad -\oint_S \dot{\vec{\Pi}}\,\vec{dS} = P + jQ$$

поток комплексного вектора Пойнтинга сквозь замкнутую поверхность равен комплексной мощности, выделяемой внутри объёма, ограниченного этой поверхностью.



Сила постоянного тока *I* .
Напряжение между жилой и оболочкой *U* .
Проводимость материала жилы и оболочки γ .
Мощность сигнала, передаваемого по кабелю,
P = *IU* .

Рассчитать поток вектора Пойнтинга через поперечное сечение диэлектрика, заполняющего пространство между жилой и оболочкой.



Из первого уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s}$$

следует, что в случае постоянного тока (d/dt = 0)

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} d\vec{s} = I,$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = H \cdot 2\pi r, \qquad H = \frac{I}{2\pi r}$$

Нормальная составляющая вектора напряжённости электрического поля *En* в диэлектрике через напряжение *U* для коаксиального контура определяется

$$E_n = \frac{U}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

где R_1 – радиус жилы;
R_2 – внутренний радиус оболочки.

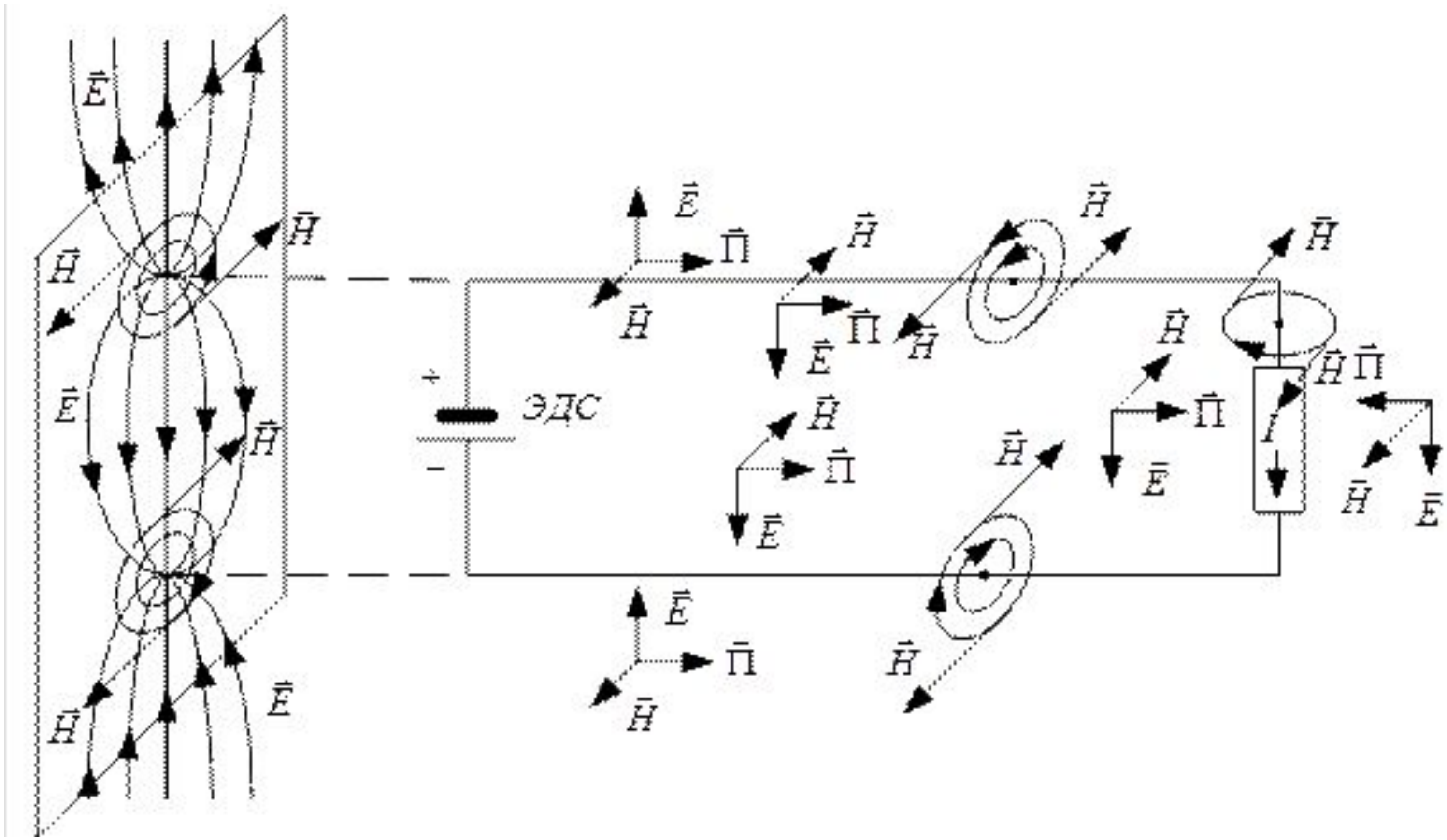
Тогда тангенциальная составляющая вектора Пойнтинга для точек диэлектрика на расстоянии *r* от оси ($R_1 \le r \le R_2$) определяется выражением

$$\Pi_\tau = E_n H = \frac{UI}{2\pi\, r^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Поток вектора Пойнтинга через кольцо диэлектрика с радиусами *R1* и *R2* :

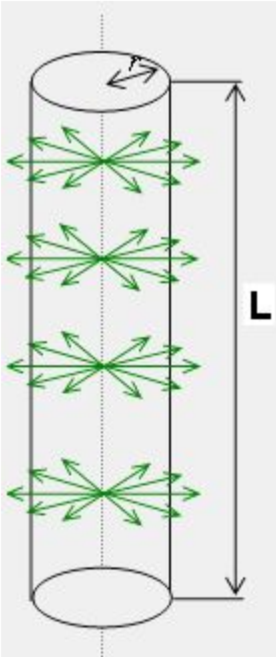
$$\oint_S \vec{\Pi}\, d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \Pi_\tau 2\pi r dr = 2\pi \frac{UI}{2\pi \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \int_{R_1}^{R_2} \left(r^{-1}\right) dr = UI.$$

Электромагнитная энергия от места её генерирования к месту потребления передаётся по диэлектрику; провода являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике. По жиле и оболочке энергия к приёмнику не передаётся. Провода сами потребляют из диэлектрика энергию на покрытие тепловых потерь.



$\vec{E}$
$\vec{H}$
$\vec{\Pi}$
+
ЭДС
−
I

СРСП РЕФЕРАТ: «Поток вектора Пойнтинга в плоскопараллельном конденсаторе»
Приложить расчет, показать направление потока. (3-4 страницы)



Напряженность электрического поля равномерно заряженной тонкой проволоки бесконечной длины.
Найдем зависимость напряженности электрического поля равномерно заряженной тонкой проволоки бесконечной длины от расстояния ***r*** до оси проволоки, используя теорему Гаусса. Выделим участок проволоки конечной длины **L**. Если линейная плотность заряда на проволоке ***λ***, то заряд выделенного участка равен **q = λ L** .

$$E_n = \frac{U}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}$$

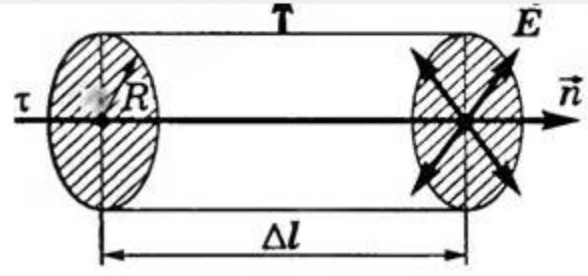


Рис. 5

Линии напряженности электростатического поля, создаваемого нитью в сечении, перпендикулярном самой нити, направлены перпенди
поверхности цилиндра, поэтому поток напряженности сквозь боковую поверхность $N = E \cdot 2\pi R\Delta l$, где R — радиус цилиндра. Через
цилиндра поток напряженности равен нулю (α = 90°, cos α = 0). Тогда полный поток напряженности через выделенный цилиндр

$$N = E \cdot 2\pi R\Delta l.$$

Заряд, находящийся внутри этого цилиндра, $q = \tau \cdot \Delta l$.

Согласно теореме Остроградского—Гаусса, можно записать $E \cdot 2\pi R\Delta l = \frac{\tau \Delta l}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. Следовательно, модуль напряженности поля, создав
равномерно заряженной бесконечно длинной нитью на расстоянии R от нее,

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

Литература

Аксенович Л. А. Физика в средней школе: Теория. Задания. Тесты: Учеб. пособие для учреждений, обеспечивающих получение общ. сред
Л. А. Аксенович, Н.Н.Ракина, К. С. Фарино; Под ред. К. С. Фарино. — Мн.: Адукацыя і выхаванне, 2004. — С. 220-222.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}$$ В среде

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{Кл^2}{Н\cdot м^2}$$

Электрическая постоянная

$$k = \frac{F\cdot r^2}{|q_1|\cdot|q_2|}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$ В вакууме

$$\varepsilon = 1$$

$$k = 9\cdot10^{9}\,\frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$$

$$e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,Кл$$

Линии напряженности электростатического поля, создаваемого нитью в сечении, перпендикулярном самой нити, направлены перпендикулярно боковой поверхности цилиндра, поэтому поток напряженности сквозь боковую поверхность $N = E \cdot 2\pi R \Delta l$, где R — радиус цилиндра. Через оба основания цилиндра поток напряженности равен нулю (α = 90°, cos α = 0). Тогда полный поток напряженности через выделенный цилиндр

$$N = E \cdot 2\pi R \Delta l.$$

Заряд, находящийся внутри этого цилиндра, $q = \tau \cdot \Delta l$.

Согласно теореме Остроградского—Гаусса, можно записать $E \cdot 2\pi R \Delta l = \frac{\tau \Delta l}{\varepsilon_0 \varepsilon}$. Следовательно, модуль напряженности поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечно длинной нитью на расстоянии R от нее,

$$E = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon R}.$$

–

Весь поток вектора напряженности электрического поля будет выходить через боковую поверхность цилиндра, а поток через оба основания цилиндра равен нулю. Площадь боковой поверхности равна **S=2πrL**, вектор напряженности параллелен вектору нормали во всех точках боковой поверхности и постоянен по модулю, поэтому поток вектора напряженности через боковую поверхность: **Ф=ES=2πErL**

Откуда для напряженности электрического поля получаем выражение:

.

Таким образом, напряженность электрического поля тонкой равномерно заряженной бесконечно длинной прямой проволоки обратно пропорциональна расстоянию от нее.