Линейная алгебра

Основы матричной алгебры

Матрицы и векторы имеют следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Матричные операции

Пусть матрица A(MxN) умножается на матрицу B(NxK).
Результат – матрица C

$$C = A * B$$

В покомпонентной записи:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Для того, чтобы умножить матрицу ***A*** на матрицу ***B*** необходимо, чтобы число столбцов матрицы ***A*** равнялось числу строк матрицы ***B***.

Специальные операции

$$C_{i,j} = X_i \cdot Y_j$$

На Матлабе это выглядит как:

$$C = X * Y';$$

Здесь X и Y – вектор-столбцы

Аналогично выглядят операции:

$$C_{i,j} = X_i \pm Y_j$$

Задание

Дана покомпонентная запись. Записать в формате Матлаба:

$$\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1} K_{i,j}\cdot x_i\cdot y_j$$

A – матрица, ***x*** и **y**– вектор-столбцы. Записать в покомпонентной форме:

$$A\cdot x\cdot x'\cdot A' \qquad x'\cdot A'\cdot A\cdot x$$

Какова размерность матрицы и векторов? Что собой представляет результат?

Записать в формате Матлаба: (j – мнимая единица)

$$y_k=\sum_{i=0}^{N-1} x_i\cdot e^{-j\cdot 2\pi\frac{i\cdot k}{N}}$$

Логическая индексация массивов

Логические вектора, построенные с помощью логических выражений могут служить индексами при доступе к массивам.

Пусть

```
>>x=[1,2,3,4,5,6,7,8];
>>y=x(x>3)
Y= 4   5   6   7   8
```

Пусть функция задается разными выражениями при разных значениях аргумента:

$$y = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ \sin(x), & x \in [-5,1] \\ x^2 - 3, & x \in (1,4] \\ \ln(x), & x > 4 \end{cases}$$

```
>> y=@(x)[0*x((x<-5)),sin(x(a1)),x(a2).^2-3,log(x(a3))]
>>x=-10:0.1:10;
>>plot(x,y(x))
```

Обратите внимание как записывается функция, равная нулю на некотором интервале. Как формируется функция из отрезков.

Постройте график этой функции.

Создание матриц
с заданными свойствами

eye(n) – возвращает единичную матрицу размера **nxn**; **eye(m,n)** – размера **mxn**.

eye(size(A)) – возвращает единичную матрицу того же размера, что и **A**.

ones(n), ones(m,n), ones(size(A)) – возвращает матрицу, все элементы которой единицы.

zeros(n), zeros(m,n), zeros(size(A)) – нулевые матрицы.

Функция **linspace** формирует *линейный массив равноотстоящих узлов. Это подобно* оператору **:**, но дает прямой контроль над числом точек. Применяется в следующих формах:

- **linspace(a,b)** – возвращает линейный массив из **100** точек, равномерно распределенных между **a** и **b**;
- **linspace(a,b,n)** – генерирует **n** точек, равномерно распределенных в интервале от **a** до **b**.

```
>> linspace(1,10,5)
ans =
    1.0000    3.2500    5.5000    7.7500   10.0000
```

logspace(a,b) – возвращает вектор-строку из **50** равноотстоящих в логарифмическом масштабе точек между декадами 10^*a* *и* 10^*b*;

logspace(a,b,n) – возвращает **n** точек между декадами 10^*a* *и* 10^*b*;

>> logspace(1,10,5)

ans =

Columns 1 through 4:

10.00000 1778.27941

316227.76602 56234132.51903

Column 5:

10000000000.00000

Функция *rand* генерирует массивы случайных чисел, значения элементов которых *равномерно распределены в промежутке* *(0,1)*

Функция *randn* генерирует массив со случайными элементами, распределенными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, равным 1.

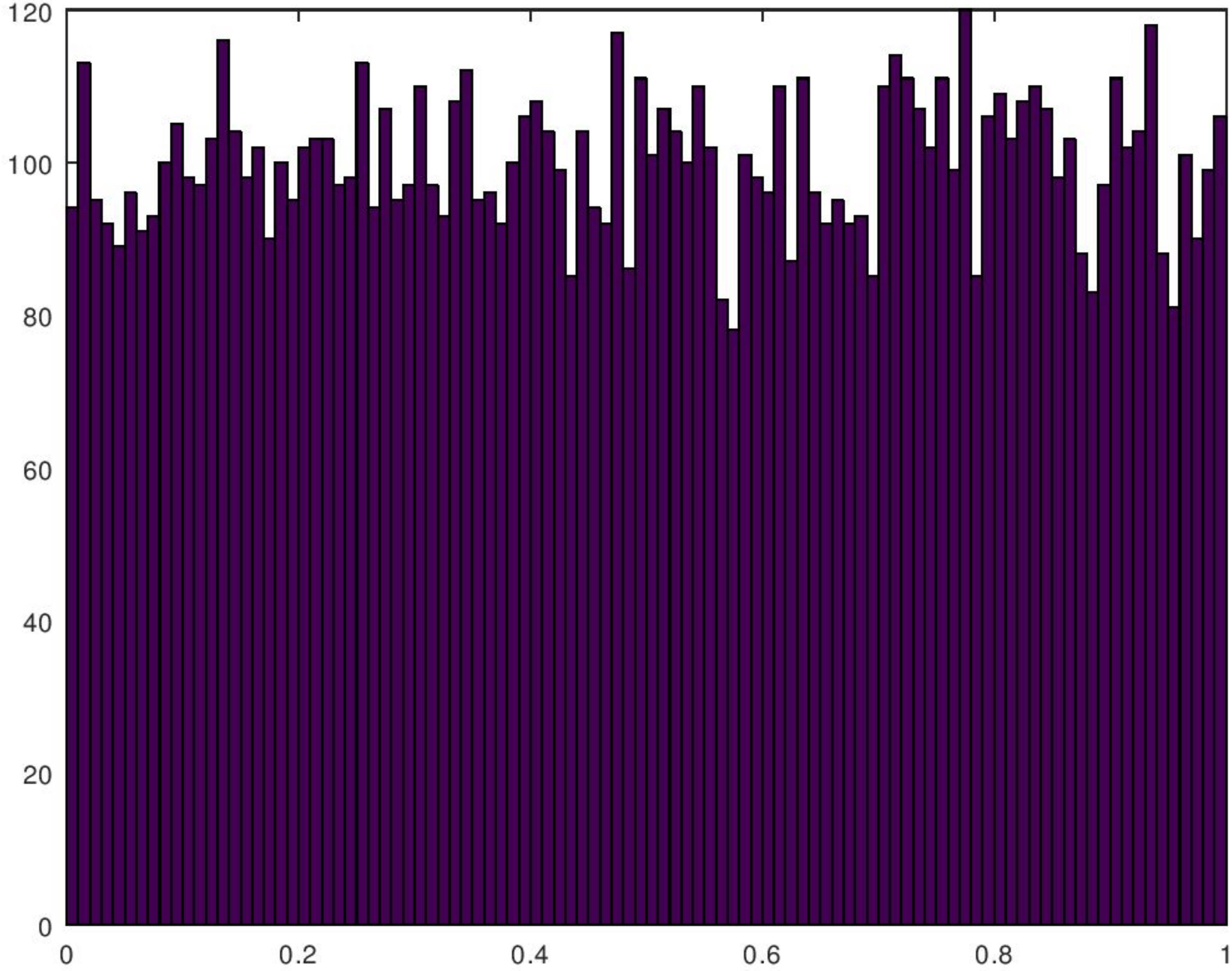
randn(n), randn(m,n), randn(size(A))

rand(n), rand(m,n), rand(size(A))

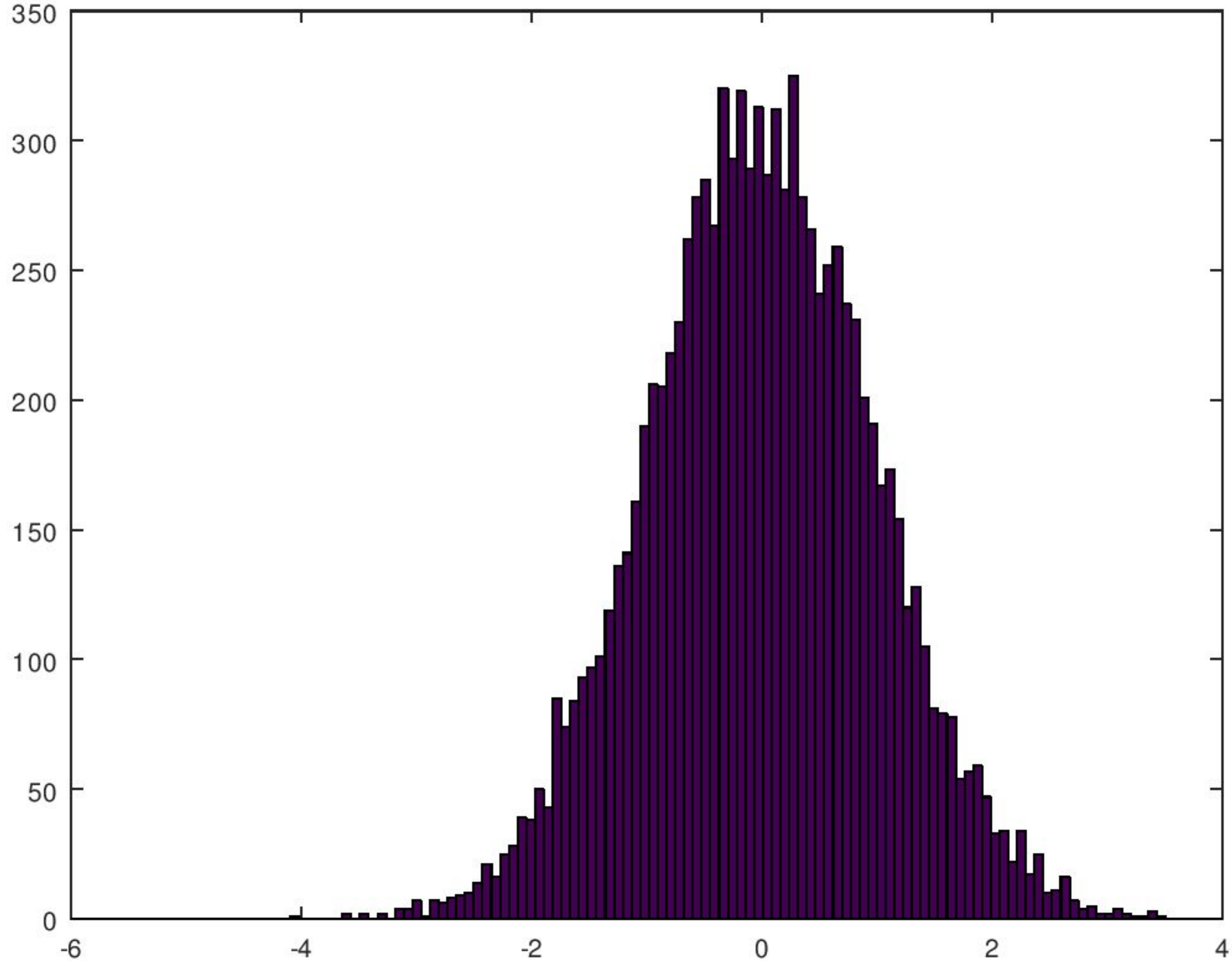
Проверить распределение случайных чисел можно, построив гистограмму распределения большого количества чисел.

```
>> Y=rand(10000,1); hist(Y,100)
>> Y=randn(10000,1); hist(Y,100)
```

rand



randn



Конкатенация матриц

C = cat(dim,A,B) – объединяет массивы **A** и **B** в соответствии со спецификацией размерности **dim** и возвращает объединенный массив;

dim=1 – горизонтальная конкатенация;

dim=2 – вертикальная конкатенация;

dim=3 – многомерный массив размерности 3 и т.д.

X = diag(v,k) – для вектора v, состоящего из n компонентов, возвращает
квадратную матрицу X порядка n+abs(k) с элементами v на *kой диагонали*, при k=0 это главная диагональ (из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол), при k>0 – одна из диагоналей выше главнойдиагонали, при k<0 – одна из нижних диагоналей. Остальные элементы матрицы – нули;

- **prod(A) – возвращает произведение элементов массива, если A – вектор, или вектор-строку, содержащую произведения элементов каждого столбца, если A – матрица;**
- **prod(A,dim) – возвращает вектор (строку или столбец) с произве-дением элементов массива A по столбцам (dim=1), по строкам(dim=2).**

Пример:

```
>> A=[1 2 3 4; 2 4 5 7; 6 8 3 4]
A =
1 2 3 4
2 4 5 7
6 8 3 4
>> B=prod(A)
B = 12 64 45 112
>> B=prod(A,2)
B = 24
    280
    576
```

- sum(A) – возвращает сумму элементов массива, если A – вектор, или вектор-строку, содержащую сумму элементов каждого столбца, если A – матрица;
- sum(A,dim) – возвращает сумму элементов массива по столбцам (dim=1),
строкам (dim=2) или иным размерностям, в зависимости от значения скаляра dim.

```
>> X=[1 2;3 4]
X =

   1   2
   3   4

>> sum(X)
ans =

   4   6
```

Возможно создание *пустых матриц, например:*

```
>> M=[]
M = [](0x0)
>> M=[M [1,2;3,4]]
M =
   1   2
   3   4
```

Матричные функции

expm(X) – возвращает exp(X) от квадратной матрицы X. sqrtm(X),logm(X) – квадратный корень и логарифм от матрицы X. Комплексный результат получается, если X имеет неположительные собственные значения. Пусть X=[1,2;3,4];

Найти: exp(X); expm(X); sqrt(X);sqrtm(X); Объяснить отличия.

```
>> S=[1,0,3;1,3,1;4,0,0]
>> a=expm(S)
a =
   31.22028    0.00000   23.37787
   38.96594   20.08554   30.05928
   31.17049    0.00000   23.42766
>> b=logm(a)
b =
   1.00000   0.00000   3.00000
   1.00000   3.00000   1.00000
   4.00000   0.00000  -0.00000
```

Умножение матриц

$$C_{i,k} = \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} \cdot B_{j,k} -> C = A * B;$$

Это запись в Матлабе

$$C_{i,j} = X_i \otimes Y_j -> C = X \otimes Y';$$

Если X вектор – столбец

Y вектор – столбец

$\otimes$ *– любой оператор* : + – *

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot Y_i -> X'*Y$$

Скалярное произведение

Вычисление нормы и чисел обусловленности матрицы

Норма вектора X (или, точнее,

его *p-норма) задается выражением*

и вычисляется функцией norm(x,p).

Заметим, что norm(x,2)=sqrt(x'*x)

$$\|X\|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Пусть A – матрица. Тогда n=norm(A) эквивалентно n=norm(A,2) и возвращает вторую норму, то есть самое большое сингулярное число матрицы A.

n=norm(A,1)= $\max_i \sum_j |A_{i,j}|$

n=norm(A,inf)= $\max_j \sum_i |A_{i,j}|$

В общем случае *p - норма матрицы A вычисляется как* $\max_x \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

```
>> A=[2,3,1;1,9,4;2,6,7]
A =
   2   3   1
   1   9   4
   2   6   7
>> norm(A)
ans =  13.735
>> norm(A,1)
ans =  18
>> norm(A,Inf)
ans =  15
```

Проверьте!

Число обусловленности матрицы определяет чувствительность решения системы линейных уравнений к погрешностям исходных данных. Следующая функция позволяет найти число обусловленности матриц:

cond(X) – возвращает число обусловленности, основанное на второй норме.

$$cond(A) = (\max \|Ax\| / \|x\|) / (\min \|Ax\| / \|x\|)$$

```
>> A=hilb(4)
A =

   1.00000   0.50000   0.33333   0.25000
   0.50000   0.33333   0.25000   0.20000
   0.33333   0.25000   0.20000   0.16667
   0.25000   0.20000   0.16667   0.14286

>> cond(A)
ans =  15513.73874
```

Для нахождения *определителя (детерминанта) и ранга матриц в MATLAB имеются* следующие функции:

- **det(X) – возвращает определитель квадратной матрицы X. Если X содержит только целые элементы, то результат – тоже целое число. Использование det(X)=0 как теста на вырожденность матрицы действительно только для матрицы малого порядка с**

***Ранг матрицы определяется количеством сингулярных чисел, превышающих* порог tol.**
Для вычисления ранга используется функция rank:
rank(A) – возвращает количество сингулярных чисел, которые являются
большими, чем заданный по умолчанию допуск;
rank(A,tol) – возвращает количество сингулярных чисел, которые

```
>> A=hilb(11);
>> rank(A)
ans =  10
>> cond(A)
ans =    5.2237e+14
```

Вычисление ***ортонормированного базиса матрицы обеспечивают следующие*** **функции:**

- **B = orth(A) – возвращает ортонормированный базис матрицы A. Столбцы B определяют то же пространство, что и столбцы матрицы A, но столбцы B ортогональны, то есть B'*B=eye(rank(A)). Количество столбцов матрицы B равно рангу матрицы A.**

Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

Задача на собственные значения для квадратной матрицы имеет вид:

$$A\psi = \lambda\psi$$

Или в покомпонентной записи:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\psi_{j,k} = \lambda_k \psi_{i,k}$$

Совокупность всех собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором, образует линейное подпространство.
Если вектора $X_1, X_2, \ldots, X_n$ являются собственными и относятся к разным собственным значениям, то векторы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – линейно независимы.

Матрица *A* приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис в n-мерном пространстве, состоящий из собственных векторов.

$A\psi = \psi\Lambda$ **– матричное представление уравнения на собственные значения.**

Λ – диагональная матрица, состоящая из собственных значений;

Ψ – матрица собственных векторов.

$$A\psi = \psi\Lambda \rightarrow A = \psi\Lambda\psi^{-1}$$ **Факторизация матрицы**

Матрица *A* называется неотрицательно определенной, если: $X^H A X \geq 0$ Для любого вектора *X*

Матрица *A* называется симметрической, если: *A^н^ =A* (*н* – *символ эрмитова транспонирования, т.е. транспонирования и комплексного сопряжения. В Матлабе символ ‘*).

Для симметрической и неотрицательно определенной матрицы собственные вектора –

[V, lambda] = eig (A) – вычисление матрицы собственных векторов (V) и диагональной матрицы собственных значений (lambda) от матрицы A

A2 =

1	2	3
4	5	6
7	8	9

\>> [V,D]=eig(A2)

V =

-0.231971	-0.785830	0.408248
-0.525322	-0.086751	-0.816497
-0.818673	0.612328	0.408248

\>> diag(D)‘ **Каков ранг этой матрицы?**

ans =

1.6117e+01 -1.1168e+00 -1.3037e-15

```
>> V'*V
ans =
   1.0000e+00  -2.7343e-01   5.5511e-17
  -2.7343e-01   1.0000e+00  -9.9920e-16
   5.5511e-17  -9.9920e-16   1.0000e+00
```

Матрица *A2* – не симметрическая и не является неотрицательно определенной, поэтому собственные вектора не ортонормированные

Теплицева матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{pmatrix}$$

На всех диагоналях одинаковые значения

toeplitz *(c)*
toeplitz *(c, r)*
Возвращает матрицу Теплица созданную из вектора *c* (в первом случае).
Во втором случае верхняя треугольная из вектора *c*, а нижняя треугольная из вектора *r*.

Создадим матрицу $K_{i,j} = \rho^{(i-j)^2},\ i,j \in \overline{0,n-1}$

```
>> r=0.9;
>> n=5;a=(0:n-1).^2;
>> c=r.^a;
>> K=toeplitz (c)
K =
  1.00000   0.90000   0.65610   0.38742   0.18530
  0.90000   1.00000   0.90000   0.65610   0.38742
  0.65610   0.90000   1.00000   0.90000   0.65610
  0.38742   0.65610   0.90000   1.00000   0.90000
  0.18530   0.38742   0.65610   0.90000   1.00000
```

Найдем собственные вектора и собственные значения этой матрицы

```
>> [V,D]=eig(K);
V =
  -1.6166e-01   3.8166e-01   5.7288e-01  -5.9526e-01   3.8168e-01
   4.9416e-01  -5.9526e-01  -1.7637e-01  -3.8166e-01   4.7402e-01
  -6.7775e-01   7.8822e-16  -5.3048e-01   1.9868e-17   5.0916e-01
   4.9416e-01   5.9526e-01  -1.7637e-01   3.8166e-01   4.7402e-01
  -1.6166e-01  -3.8166e-01   5.7288e-01   5.9526e-01   3.8168e-01

>> diag(D)'
ans =

   0.00057261   0.01525073   0.18139281   1.14334725   3.65943661
```

```
>> V'*V
ans =

 1.0000e+00   1.1102e-16   6.9389e-17  -4.1633e-17  -9.0206e-17
 1.1102e-16   1.0000e+00  -1.6653e-16   5.5511e-17   5.5511e-17
 6.9389e-17  -1.6653e-16   1.0000e+00  -1.1102e-16   5.5511e-17
-4.1633e-17   5.5511e-17  -1.1102e-16   1.0000e+00  -2.2204e-16
-5.5511e-17   5.5511e-17   2.7756e-17  -2.2204e-16   1.0000e+00
```

Так как эта теплицева матрица симметрическая и неотрицательно определенная, то собственные векторы ортогональны.

Скорость выполнения

Файл test1

```
A=rand(1000,1000);
B=rand(1000,1000);
for i=1:1000
    for j=1:1000
     A(i,j)=A(i,j).^B(i,j);
    end
end
```

Файл test2

```
A=rand(1000,1000);
B=rand(1000,1000);
A=A.^B;
```

```
A=rand(1000,1000);
B=rand(1000,1000);
for i=1:1000
  for j=1:1000
    A(i,j)=A(i,j).^B(i,j);
  end
end
----------------------------------
>> clear
>> tic,test1,toc
Elapsed time is 25.106
seconds.
```

```
A=rand(1000,1000);
B=rand(1000,1000);
A=A.^B;
---------------------------
-
>> clear
>> tic,test2,toc
Elapsed time is
0.224 seconds.
```

Выигрыш во времени выполнения 100 раз!

Тест в MatLab 7.5.0

>> clear

>> tic,test1,toc

Elapsed time is 0.340472 seconds.

>> clear

>> tic,test2,toc

Elapsed time is 0.254457 seconds.

В Матлабе интерпретатор оптимизирован лучше, чем в Octave.

Запрограммировать на матлабе:

Пусть A и B – квадратные матрицы, имеющие обратные.
Записать на Матлабе задачу на обобщенные собственные значения (использовать eig())

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \cdot X_{j,k} = \lambda_k \sum_{i=1}^{N} B_{i,j} \cdot X_{j,k}$$

A=[1,2;2,3] B=[25,5.5;5.5,121]