Применение векторов при решении задач и доказательстве теорем

Разработал студент группы А-11
Мельников Лев

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

- Учёные всегда стремились упростить себе жизнь – придумывали новые, простые методы решения, универсальные для множества задач, позволяющие быстро решить даже самую трудную задачу. Именно таким методом и является векторно-координатный.
- «Векторный» путь построения геометрии предложил в 1918 году известный немецкий математик Герман Вейль. Векторы можно использовать как для решения планиметрических задач, так и для стереометрических.
- Векторно-координатный метод решения задач позволяет с лёгкостью решать даже самые большие и сложные задачи, избегать долгих доказательств теорем. С помощью векторов можно вычислять расстояния и углы, доказывать теоремы, строить перпендикулярные и параллельные прямые и отрезки, строить сечения, доказывать равенство геометрических фигур и многое другое.
- В настоящее время векторно-координатный метод используется в алгебре, геометрии, физике, механике; понятие векторного пространства используется в теории вероятностей, математической экономике, биологии, лингвистике и т.д.

КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

- Интерес к векторам и векторному исчислению пробудился у математиков в XIX веке в связи с потребностями механики и физики. Однако истоки исчисления с направленными отрезками возникли в далеком прошлом. В Древней Греции пифагорейцы, открыв иррациональные числа, которые нельзя выразить дробями (например:√2, √5), не решились ввести более широкое толкование числа. Математики того времени попытались свести вопросы арифметики и алгебры к решению задач геометрическим путем. Таким образом, было положено начало геометрической теории отношений Евдокса (408-355 гг. до н.э.), а позднее «геометрической алгебре». В геометрическом исчислении, изложенном, а труде Евклида «Начала», сложения и вычитания сводились к сложению и вычитанию отрезков, а умножение - к построению прямоугольников на отрезках, соответствующих по длине множителям.
- Термин «вектор» происходит от латинского слова vector, что означает несущий или ведущий, влекущий, переносящий
- В современной математике раздел, в котором излагается учение о действиях над векторами, называют векторной алгеброй, так как эти действия имеют

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

- 2.2. ВЕКТОРЫ
- Вектор-это отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом. Направление вектора на рисунке (от начала к концу) отмечается стрелкой.(рисунок 1)

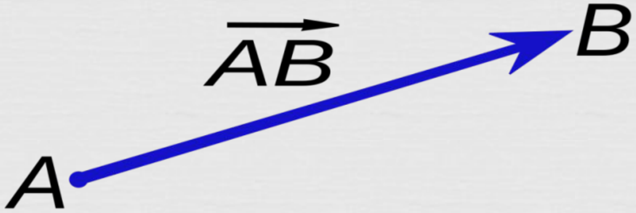


Рисунок 1 - Изображение вектора

Любая точка пространства также может считаться вектором. В таком случае вектор называется нулевым. Начало и конец этого вектора совпадают.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

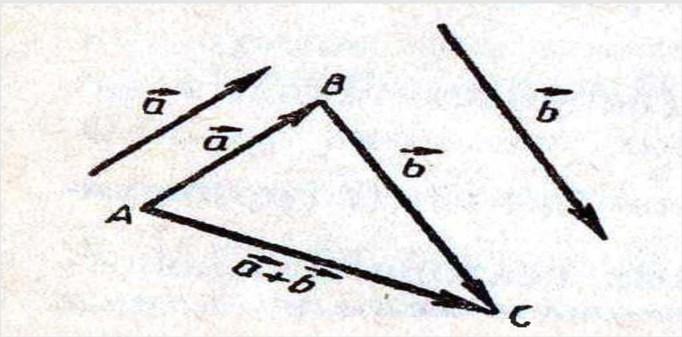


Рисунок 2 - Изображение правила треугольника

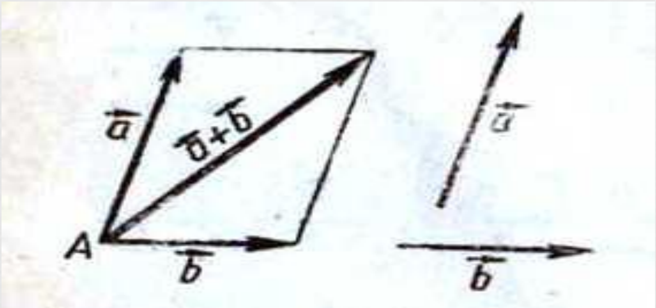


Рисунок 3 - Изображение правила параллелограмма

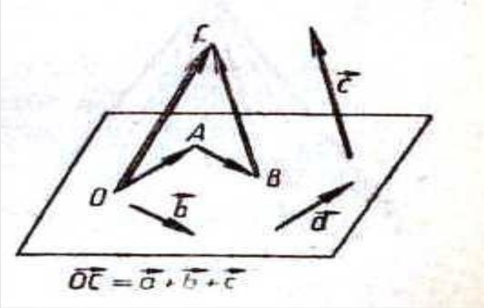


Рисунок 4 - Изображение правила многоугольника

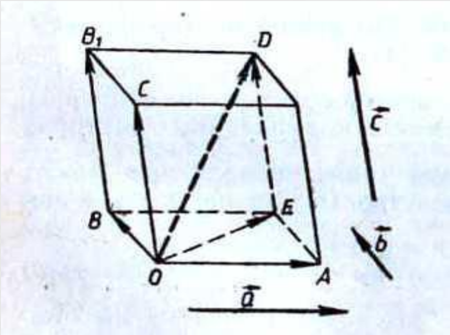


Рисунок 5 - Изображения правила параллелепипеда

КООРДИНАТЫ

- Если через некоторую точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что выбрана прямоугольная система координат в пространстве. Прямые с выбранными направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат. Она обычно обозначается буквой О. Оси обозначаются так: Ox, Oy, Oz – и имеют названия: «ось абсцисс», «ось ординат», «ось аппликат». Вся система координат называется Oxyz. Три плоскости, проходящие через оси координат называются координатными плоскостями. Точка О разделяет каждую из осей координат на на два дополнительных луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется положительной полуосью, а дополнительный к нему луч – отрицательной полуосью.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРОВ

- 4.2 Доказательство некоторых теорем
- Пусть точки A, B, C и P такие, что $OP=mOA+nOB+pOC$ (OA, OC и OB линейно независимы).Тогда необходимое и достаточное условие их принадлежности одной прямой состоит в следующем: $m+n+p=1$. (рис 7)

Пусть точки A, B, C и P лежат в одной плоскости, тогда векторы $AP=OP-OA$, $AB=OB-OA$, $AC=OC-OA$ будут линейно зависимыми, следовательно
$OP-OA=n(OB-OA)+p(OC-OA)$,
$OP=(1-n-p)OA+nOB+pOC$. И в силу единственности разложения вектора OP по векторам OA, OB, OC получим
$m=1-n-p$ или $m+n+p=1$
Доказательство достаточности:
Пусть $m+n+p=1$, тогда
$OP-OA=mOA+nOB+pOC-OA=mOA+nOB+pOC-(m+n+p)*OA=n(OB-OA)+p(OC-OA)$
Отсюда $AP=nAB+pAC$ и по определению P принадлежит плоскости ABC.

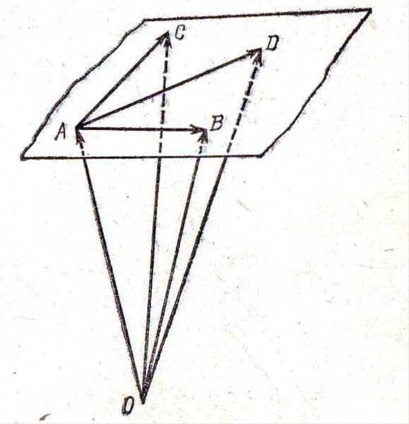


Рисунок 7 - Изображение фигуры

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРОВ

- 4.3 Нахождение расстояний и углов
- На рёбрах DA,DB,AC тетраэдра DABC взяты соответственно точки L, N, F так, что DL=1/2DA,DN=1/3DB,AF=1/4AC. В каком отношении плоскость, проходящая через точки L,N,F делит ребро BC? (рис 8)

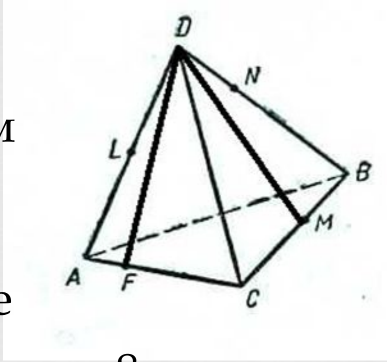


Рисунок 8 - Изображение фигуры

Решение:
Пусть M – точка пересечения рассматриваемой плоскости с ребром BC и
DA=a, DB=b, DC=c.
Так как точки M,N,L,F лежат в одной плоскости, причём последние три точки не лежат на одной прямой, то по формуле
DM=kDL+lDN+(1 – k – l)DF=ka/2+lb/3+(1 – k – l)(3/4a+1/4c).
С другой стороны, по формуле (1)
DM=(1-m)b+mc
где m – отношение BM:BC. Так как векторы a,b,c не компланарны, то на основании утверждения о разложении вектора по трём некомпланарным, мы получим систему:
k/2+(1 – k – l)3/4=0, l/3=1 – m,
(1 – k – l)1/4=m.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ

- 5.2 Задачи на построения
- Вершина B прямоугольного параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 с отношением рёбер AB:DA:AA1=1:2:3 принята за начало прямоугольной системы координат, а
- векторы BA, 1/2BC и 1/3BB1 приняты соответственно за единичные векторы i, j, k.
- … раллелепипеда плоскостью α , заданной в этой … авнением $4x + y - 2z - 2=0$. (рис 9)

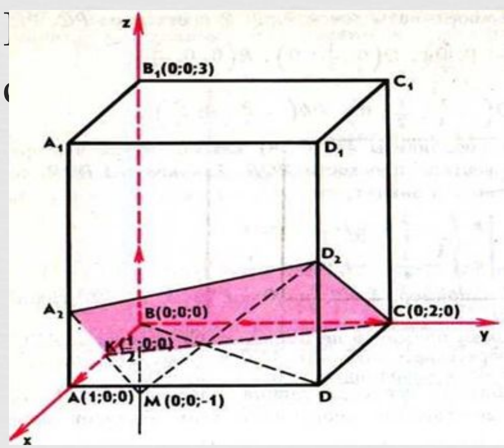


Рисунок 9 - Изображение фигуры

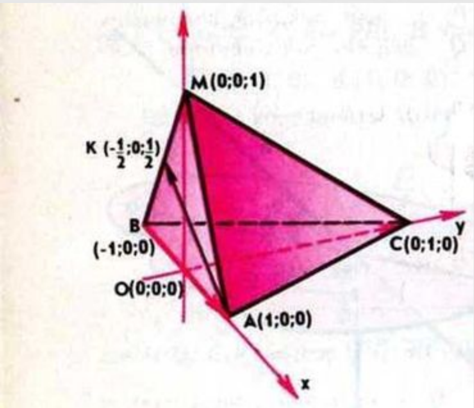
Для построения данного сечения найдем три точки, принадлежащие плоскости α, но не лежащие на одной прямой, например, точки пересечения плоскости α с осями координат. Так, если плоскость α пересекает ось Bx в точке K, то точка K имеет координаты (к;0;0). Подставляя эти координаты в уравнение плоскости α ,получим к=1/2. Таким образом, плоскость α пересекает ось Bx в точке K(1/2;0;0). Построим эту точку.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ

- Аналогично если плоскость α пересекает ось By в точке L, то точка L имеет координаты (0;l;0). Подставляя эти координаты в уравнение плоскости α , найдем, что L(0;2;0). Построим точку L (она совпала с точкой C).
- Точно так же находим, что плоскость α пересекает ось Bz в точке M(0;0;- построим эту точку и затем построим сечение призмы плоскостью α, проходящей через точки K,L,M. Получаем четырёхугольник KCD2A2.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ

- 5.3 Задачи на вычисления расстояний и углов
- В основании пирамиды MABC лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине С. каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45 гр. На ребре MB взята точка K – середина этого ребра. Найдём угол между прямой AK и плоскостью MBC. (рис 10)



Установив, что медианно MO грани MAB является высотой пирамиды, т.е. $MO \perp AB$ и $MO \perp OC$, и что OA =OC=OM, зададим в пространстве прямоугольную систему координат Oxyz, как показано на рисунке. OA=i ; OC=j ; OM=k

В этой системе координат O(0;0;0), A(1;0;0), C(0;1;0), M(0,0,1)

Находим далее координаты точек B и K, вектора AK, коллинеарного прямой AK, и

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ

- векторов BC и BM. Получаем B(-1;0;0;), K(-1/2;0;1/2), AK(-3/2;0;1/2), BC(1;1;0), BM (1;0;1).
- Если вектор n(k;l;m) перпендикулярен плоскости MBC, то n⊥BC и n⊥BM, или в координатах:
- k*1+l*1+m*0=0
- k*1+l*0+m*1=0
- откуда, полагая, например, что k=1, находим, что l=-1, m=-1, т.е. n(1;-1;-1).
- Пусть φ – это искомый угол. Тогда

$$\sin\varphi = |\cos(\widehat{\vec{n}, \overline{AK}})| = \frac{\left|1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

Рисунок 11 - продолжение решения задачи

- Таким образом, угол между прямой AK и плоскостью MBC равен arcsin (2√30)/15

Содержание

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Обобщая вышеизложенные доводы, мы удостоверились, что использование векторно-координатного метода позволяет с лёгкостью решать множество задач самых разных видов, избегать больших доказательств теорем. Решение таким методом задачи, помогает сэкономить время и силы. Такое решение задач хорошо тем, что человек не механически действует по образцу решения задач данного типа, повторяя одни и те же действия, а творчески подходит к работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1. В.Б. Некрасов, Б.М. Беккер, «Применение векторов для решения задач», СПб, СМИО Пресс 2002г.
- 2. В.Н. Литвиненко «Сборник задач по стереометрии с методами решений» М., изд. «Просвещение», 1998г
- 3. Н.М. Рогановский, А.А. Столяр «Векторное построение стереометрии» изд. «Народная асвета»,1974г.
- 4. Ионин Ю.И., Некрасов В.Б. «Векторы в геометрических задачах»
- 5. Болтянский В.Г., Ягиом И.Н. «Векторы и их применение в геометрии в книге: Энциклопедия элементарной математики», том 4 М., Главное издательство физмат литературы, 1963г.
- 6. Журнал «Математика», №39, 2001г.
- 7. Зив Б.Г. «Задачи к урокам геометрии 7-11»СПб, МПО «Мир и семья – 95», изд. ООО «Акация», 1996г.
- 8. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др. учебник «Геометрия 9-10»Изд. «Просвещение», 1982г.