

Применение векторов при решении задач и доказательстве теорем



Разработал студент группы А-11
Мельников Лев

Содержание

□	ВВЕДЕНИЕ	<u>3</u>	
□	1 КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА		<u>4</u>
□	2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ		<u>5</u>
□	2.2. ВЕКТОРЫ	<u>5</u>	
□	3 КООРДИНАТЫ		<u>7</u>
□	4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРОВ И СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ		<u>8</u>
□	4.2 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ		<u>8</u>
□	4.3 НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ		<u>9</u>
□	5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ		<u>10</u>
□	5.2 ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЯ	<u>10</u>	
□	5.3 ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССТОЯНИЙ И УГЛОВ		<u>12</u>
□	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	<u>14</u>	
□	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	<u>15</u>	

ВВЕДЕНИЕ

- Учёные всегда стремились упростить себе жизнь – придумывали новые, простые методы решения, универсальные для множества задач, позволяющие быстро решить даже самую трудную задачу. Именно таким методом и является векторно-координатный.
- «Векторный» путь построения геометрии предложил в 1918 году известный немецкий математик Герман Вейль. Векторы можно использовать как для решения планиметрических задач, так и для стереометрических.
- Векторно-координатный метод решения задач позволяет с лёгкостью решать даже самые большие и сложные задачи, избегать долгих доказательств теорем. С помощью векторов можно вычислять расстояния и углы, доказывать теоремы, строить перпендикулярные и параллельные прямые и отрезки, строить сечения, доказывать равенство геометрических фигур и многое другое.
- В настоящее время векторно-координатный метод используется в алгебре, геометрии, физике, механике; понятие векторного пространства используется в теории вероятностей, математической экономике, биологии, лингвистике и т.д.

КРАТКАЯ ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА

- Интерес к векторам и векторному исчислению пробудился у математиков в XIX веке в связи с потребностями механики и физики. Однако истоки исчисления с направленными отрезками возникли в далеком прошлом. В Древней Греции пифагорейцы, открыв иррациональные числа, которые нельзя выразить дробями (например: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$), не решились ввести более широкое толкование числа. Математики того времени попытались свести вопросы арифметики и алгебры к решению задач геометрическим путем. Таким образом, было положено начало геометрической теории отношений Евдокса (408-355 гг. до н.э.), а позднее «геометрической алгебре». В геометрическом исчислении, изложенном, а труде Евклида «Начала», сложения и вычитания сводились к сложению и вычитанию отрезков, а умножение - к построению прямоугольников на отрезках, соответствующих по длине множителям.
- Термин «вектор» происходит от латинского слова vector, что означает несущий или ведущий, влекущий, переносящий
- В современной математике раздел, в котором излагается учение о действиях над векторами, называют векторной алгеброй, так как эти действия имеют

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

□ 2.2. ВЕКТОРЫ

- Вектор-это отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом. Направление вектора на рисунке (от начала к концу) отмечается стрелкой.(рисунок 1)

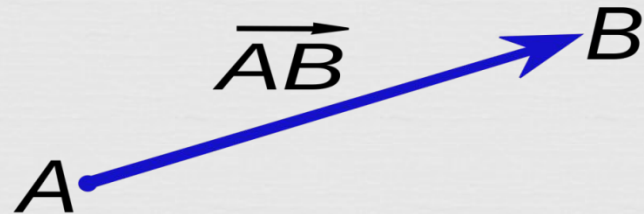


Рисунок 1 - Изображение вектора

Любая точка пространства также может считаться вектором. В таком случае вектор называется нулевым. Начало и конец этого вектора совпадают.

□

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

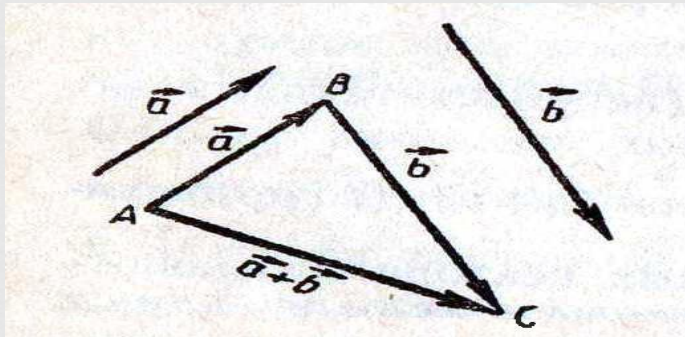


Рисунок 2 - Изображение правила треугольника

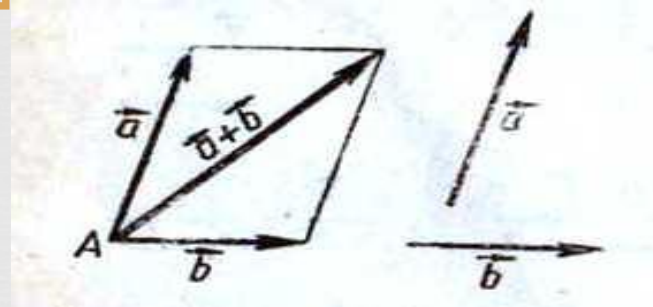


Рисунок 3 - Изображение правила параллелограмма

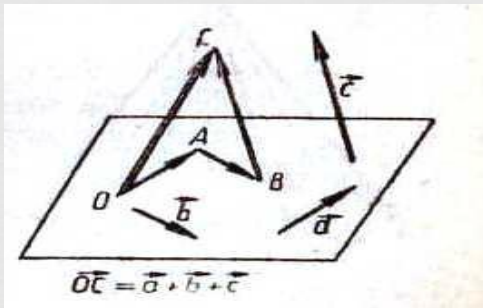


Рисунок 4 - Изображение правила многоугольника

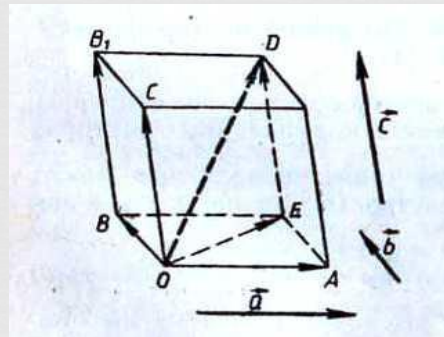


Рисунок 5 - Изображения правила параллелепипеда

КООРДИНАТЫ



- Если через некоторую точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что выбрана прямоугольная система координат в пространстве. Прямые с выбранными направлениями называются осями координат, а их общая точка – началом координат. Она обычно обозначается буквой O . Оси обозначаются так: Ox , Oy , Oz – и имеют названия: «ось абсцисс», «ось ординат», «ось аппликат». Вся система координат называется $Oxyz$. Три плоскости, проходящие через оси координат называются координатными плоскостями. Точка O разделяет каждую из осей координат на на два дополнительных луча. Луч, направление которого совпадает с направлением оси, называется положительной полуосью, а дополнительный к нему луч – отрицательной полуосью.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРОВ

4.2 Доказательство некоторых теорем

- Пусть точки A, B, C и P такие, что $OP = mOA + nOB + pOC$ (OA, OB и OC линейно независимы). Тогда необходимое и достаточное условие их принадлежности одной прямой состоит в следующем: $m+n+p=1$. (рис 7)

Пусть точки A, B, C и P лежат в одной плоскости, тогда векторы $AP = OP - OA, AB = OB - OA, AC = OC - OA$ будут линейно зависимыми, следовательно

$$OP - OA = n(OB - OA) + p(OC - OA),$$

$OP = (1 - n - p)OA + nOB + pOC$. И в силу единственности разложения вектора OP по векторам OA, OB, OC получим

$$m = 1 - n - p \text{ или } m + n + p = 1$$

Доказательство достаточности:

Пусть $m+n+p=1$, тогда

$$OP - OA = mOA + nOB + pOC - OA = mOA + nOB + pOC - (m+n+p) \cdot OA = n(OB - OA) + p(OC - OA)$$

Отсюда $AP = nAB + pAC$ и по определению P принадлежит плоскости ABC .

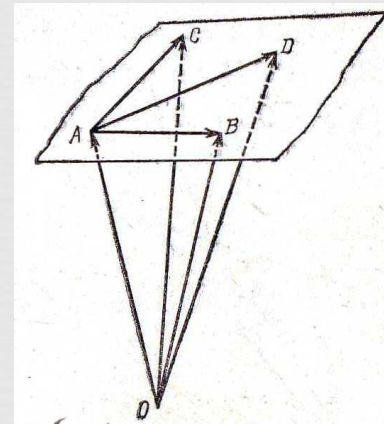


Рисунок 7 -
Изображение
фигуры

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРОВ

- 4.3 Нахождение расстояний и углов
- На рёбрах DA, DB, AC тетраэдра $DABC$ взяты соответственно точки L, N, F так, что $DL=1/2DA, DN=1/3DB, AF=1/4AC$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки L, N, F делит ребро BC ? (рис 8)

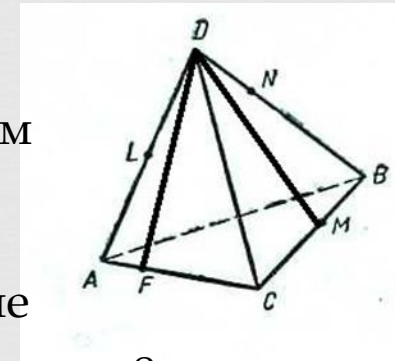


Рисунок 8 - Изображение фигур

Решение:

Пусть M - точка пересечения рассматриваемой плоскости с ребром BC и

$$DA=a, \quad DB=b, \quad DC=c.$$

Так как точки M, N, L, F лежат в одной плоскости, причём последние три точки не лежат на одной прямой, то по формуле

$$DM=kDL+lDN+(1-k-l)DF=ka/2+l b/3+(1-k-l)(3/4a+1/4c).$$

С другой стороны, по формуле (1)

где m - отношение $BM:BC$. Так как векторы a, b, c не компланарны, то на

основании утверждения о разложении вектора по трём некопланарным, мы получим систему:

$$k/2+(1-k-l)3/4=0, \quad 1/3=1-m,$$

$$(1-k-l)1/4=m.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ

5.2 Задачи на построения

- Вершина В прямоугольного параллелепипеда ABCDA₁B₁C₁D₁ с отношением рёбер АВ:DA:AA₁=1:2:3 принята за начало прямоугольной системы координат, а
- векторы ВА, 1/2BC и 1/3BB₁ приняты соответственно за единичные векторы i, j, k .

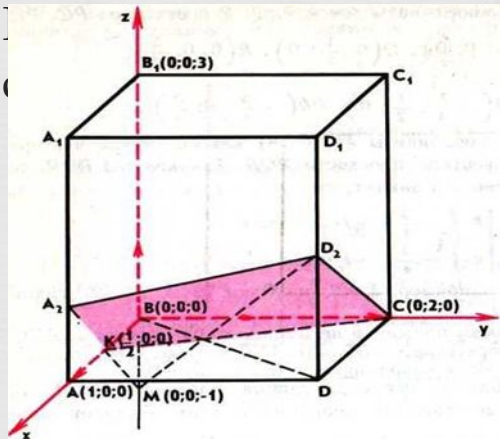


Рисунок 9 -

Изображение фигуры

параллелепипеда плоскостью α , заданной в этой системе координат уравнением $4x + y - 2z - 2 = 0$. (рис 9)

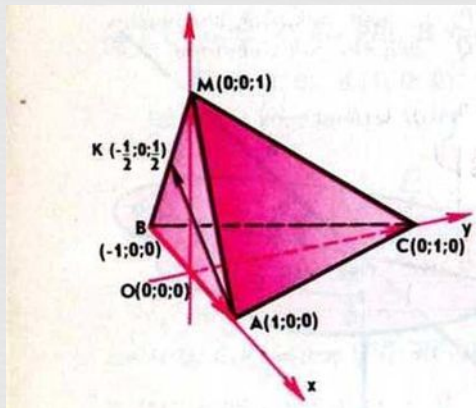
Для построения данного сечения найдем три точки, принадлежащие плоскости α , но не лежащие на одной прямой, например, точки пересечения плоскости α с осями координат. Так, если плоскость α пересекает ось Bx в точке K , то точка K имеет координаты $(k;0;0)$. Подставляя эти координаты в уравнение плоскости α , получим $k=1/2$. Таким образом, плоскость α пересекает ось Bx в точке $K(1/2;0;0)$. Построим эту точку.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ

- Аналогично если плоскость α пересекает ось Vy в точке L , то точка L имеет координаты $(0;1;0)$. Подставляя эти координаты в уравнение плоскости α , найдем, что $L(0;2;0)$. Построим точку L (она совпала с точкой C).
- Точно так же находим, что плоскость α пересекает ось Vz в точке $M(0;0;-$ построим эту точку и затем построим сечение призмы плоскостью α , проходящей через точки K,L,M . Получаем четырёхугольник KCD_2A_2 .

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ

- 5.3 Задачи на вычисления расстояний и углов
- В основании пирамиды $MAVC$ лежит равнобедренный треугольник с прямым углом при вершине C . каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45° . На ребре MB взята точка K – середина этого ребра. Найдём угол между прямой AK и плоскостью MBC . (рис 10)



Установив, что медианно MO грани MAV является высотой пирамиды, т.е. $MO \perp AV$ и $MO \perp OC$, и что $OA = OC = OM$, зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$, как показано на рисунке. $OA = i$; $OC = j$; $OM = k$

В этой системе координат $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $M(0,0,1)$

Находим далее координаты точек B и K , вектора AK , коллинеарного прямой AK , и

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КООРДИНАТ

- векторов BC и BM . Получаем $B(-1;0;0)$, $K(-1/2;0;1/2)$, $AK(-3/2;0;1/2)$, $BC(1;1;0)$, $BM(1;0;1)$.
- Если вектор $n(k;l;m)$ перпендикулярен плоскости MBC , то $n \perp BC$ и $n \perp BM$, или в координатах:
 - $k \cdot 1 + l \cdot 1 + m \cdot 0 = 0$
 - $k \cdot 1 + l \cdot 0 + m \cdot 1 = 0$
- откуда, полагая, например, что $k=1$, находим, что $l=-1$, $m=-1$, т.е. $n(1;-1;-1)$.
- Пусть φ – это искомый угол. Тогда

$$\sin \varphi = |\cos(\widehat{n, AK})| = \frac{|1 \cdot (-\frac{3}{2}) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{1}{2}|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}$$

Рисунок 11 - продолжение решения

- Таким образом, угол между прямой AK и плоскостью MBC равен $\arcsin(2\sqrt{30})/15$

[Содержание](#)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ



- Обобщая вышеизложенные доводы, мы удостоверились, что использование векторно-координатного метода позволяет с лёгкостью решать множество задач самых разных видов, избегать больших доказательств теорем. Решение таким методом задачи, помогает сэкономить время и силы. Такое решение задач хорошо тем, что человек не механически действует по образцу решения задач данного типа, повторяя одни и те же действия, а творчески подходит к работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1. В.Б. Некрасов, Б.М. Беккер, «Применение векторов для решения задач», СПб, СММО Пресс 2002г.
- 2. В.Н. Литвиненко «Сборник задач по стереометрии с методами решений» М., изд. «Просвещение», 1998г
- 3. Н.М. Рогановский, А.А. Столяр «Векторное построение стереометрии» изд. «Народная асвета»,1974г.
- 4. Ионин Ю.И., Некрасов В.Б. «Векторы в геометрических задачах»
- 5. Болтянский В.Г., Ягиом И.Н. «Векторы и их применение в геометрии в книге: Энциклопедия элементарной математики», том 4 М., Главное издательство физмат литературы, 1963г.
- 6. Журнал «Математика», №39, 2001г.
- 7. Зив Б.Г. «Задачи к урокам геометрии 7-11»СПб, МПО «Мир и семья – 95», изд. ООО «Акация», 1996г.
- 8. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др. учебник «Геометрия 9-10»Изд. «Просвещение», 1982г.