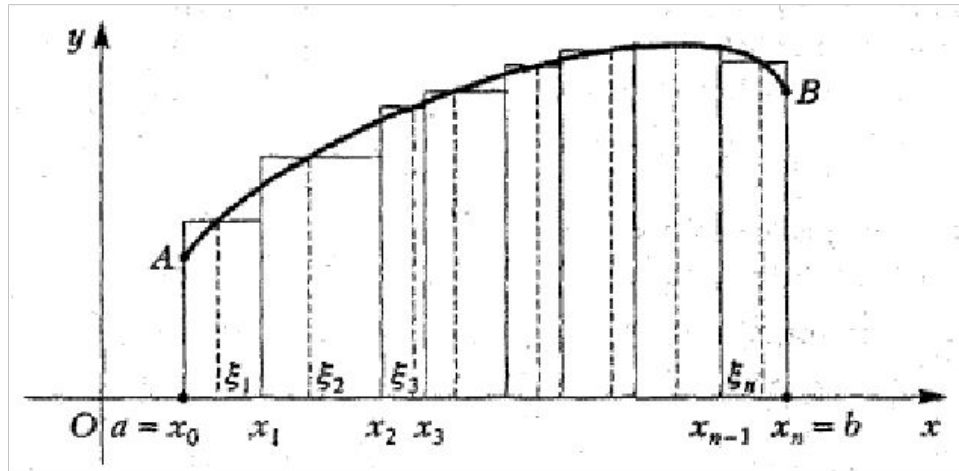


# Определённый интеграл

## Понятие определённого интеграла

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Разделим  $[a, b]$  на  $n$  частичных отрезков точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ .



Обозначим длины частичных отрезков  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ .

На каждом частичном отрезке выберем произвольно по одной точке:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

В каждой из этих точек найдём значения функции  $f(x)$ , умножим эти значения на длину соответствующего частичного отрезка и сложим эти произведения. Полученное выражение

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой функции  $f(x)$  по отрезку  $[a, b]$ .

$$\lambda = \max \{ \Delta x_i \}.$$

**О.** Если существует конечный предел интегральной суммы  $\sigma$  при стремлении наибольшего частичного отрезка  $\lambda$  к нулю, если этот предел не зависит ни от разбиения отрезка  $[a; b]$  на частичные, ни от выбора точек  $\xi_i$  на частичных отрезках, то этот предел называется определённым интегралом функции  $f(x)$  по отрезку  $[a; b]$ .

Функция  $f(x)$  называется при этом интегрируемой на отрезке  $[a; b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

$f(x)$  – подынтегральная функция,

$f(x) dx$  – подынтегральное выражение,

$a$  – нижний предел интегрирования,

$b$  – верхний предел интегрирования.

Необходимое условие интегрируемости. Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a;b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

Предположим, что функция не ограничена на  $[a;b]$ , тогда при каждом разбиении отрезка  $[a;b]$  на частичные функция будет не ограничена хотя бы в одном частичном отрезке. Тогда за счёт выбора точек  $\xi_k$  на этом частичном отрезке значение функции  $f(\xi_k)$ , а вместе с ним и произведение  $f(\xi_k)\Delta x_k$  может быть сделано по модулю больше любого наперёд заданного числа, а в таком случае интегральная сумма не может иметь конечного предела при  $\lambda$ , стремящемся к нулю, а, значит, функция  $f(x)$  не будет интегрируема на  $[a;b]$ , что противоречит условию. Противоречие доказывает теорему.

Замечание. Обратное утверждение не верно: из ограниченности функции на  $[a;b]$  не следует её интегрируемость.

Пример: функция Дирихле.

О. Число  $I$  называется пределом интегральной суммы  $S_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , если для любого положительного числа  $\epsilon$  существует положительное число  $\delta(\epsilon)$ , такое, что при любом разбиении  $[a, b]$  на частичные, при котором  $\Delta x < \delta$ , и при любом выборе точек  $\xi_k$  выполняется неравенство  $|S_n - I| < \epsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I$$

Достаточное условие существования определённого интеграла.

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она интегрируема на этом отрезке.

Разделим  $[a;b]$  на  $n$  частичных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

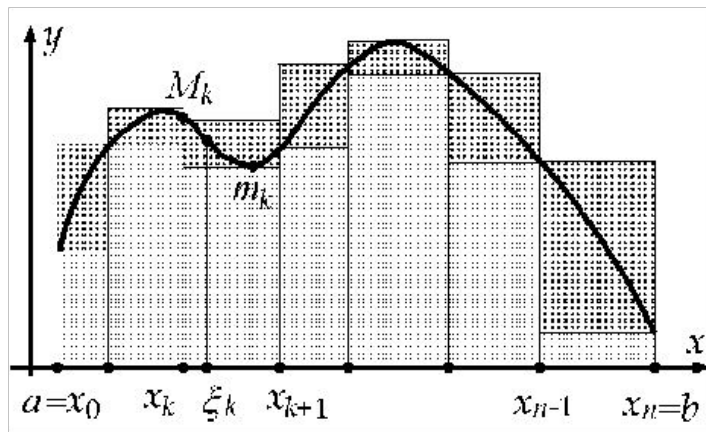
и обозначим это разбиение  $T$ . Обозначим длины частичных отрезков  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ .  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . На каждом частичном отрезке выберем произвольно по одной точке:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и составим интегральную сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

По определению определённого интеграла нужно показать, что существует конечный предел интегральной суммы.

## Верхняя и нижняя суммы Дарбу

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда она непрерывна и на каждом частичном отрезке из разбиения  $T$ . Тогда по теореме Вейерштрасса на каждом частичном отрезке  $[\xi_k, \xi_{k+1}]$  ( $k = \overline{1, n}$ ) функция  $f(x)$  имеет наибольшее значение  $M_k$  и наименьшее значение  $m_k$ .



Суммы

$$\bar{S} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \text{ и}$$

$$\underline{s} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

называются соответственно верхней и нижней суммами Дарбу функции  $f(x)$  для данного разбиения  $T$  на отрезке  $[a, b]$ .

## Свойства сумм Дарбу.

1. Для данного разбиения  $T$   $\underline{S} \leq \overline{S}$  при этом любая интегральная сумма  $S$  для этого же разбиения удовлетворяет неравенству  $\underline{S} \leq S \leq \overline{S}$

2. Если разбиение  $T_1$  получено из разбиения  $T$  путём добавления новых точек, то  $\underline{S} \leq \underline{S}_1$ ,  $\overline{S}_1 \leq \overline{S}$ , где  $\underline{S}$ ,  $\overline{S}$  - нижняя и верхняя суммы для разбиения  $T$ ,  $\underline{S}_1$ ,  $\overline{S}_1$  - нижняя и верхняя суммы для разбиения  $T_1$

3. Любая нижняя сумма не превосходит любой верхней суммы.

4. Существует число  $I$ , такое, что  $\underline{S} \leq I \leq \overline{S}$  для любых нижних и верхних сумм из разных разбиений.



Понятие определённого интеграла было введено при условии, что  $a < b$

**О<sub>1</sub>**. Если  $a = b$ , то  $\int_a^a f(x)dx = 0$ .

**О<sub>2</sub>**. Если  $a > b$ , то интегралом  $\int_a^b f(x)dx$  называется выражение  $-\int_b^a f(x)dx$ , при условии, что  $\int_b^a f(x)dx$  существует.

## Свойства определённого интеграла

$$1. \int_a^b 0 dx = 0.$$

$$2. \int_a^b dx = b - a.$$

$$3. \text{Из определения 2 следует } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$4. \text{При любых } a \text{ и } b \text{ имеет место равенство } \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \text{ при}$$

условии, что хотя бы один из интегралов существует.

5. При любом расположении точек  $a, c, b$  имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6. Свойство аддитивности. Интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же сумме интегралов от этих функций.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx, \text{ при условии, что интегралы справа существуют.}$$

7. Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то  $kf(x)$  также интегрируема на  $[a, b]$ , причём  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ .

8. Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ ,  $a < b$  и  $f(x) \geq 0$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

9. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ ,  $a < b$  и  $f(x) \geq g(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

10. Об оценке интеграла. Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и при этом  $m \leq f(x) \leq M$ , тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

11. Об оценке модуля интеграла.

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b |M| dx = |M|(b-a)$$

При условии, что оба интеграла существуют и  $a < b$

12. Теорема о среднем. Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то на  $[a, b]$  существует хотя бы одна точка  $\xi$ , такая что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

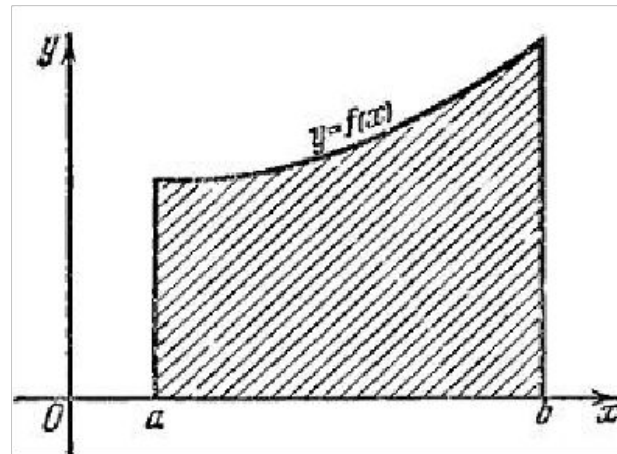
13. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

## Геометрический смысл определённого интеграла

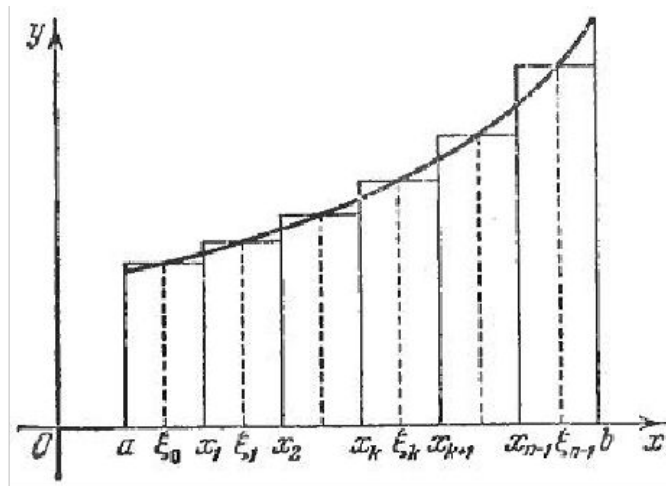
Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на  $[a;b]$ .

О. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху кривой  $y=f(x)$ , снизу – осью  $Ox$ , слева прямой  $x=a$ , справа – прямой  $x=b$ .



*Геометрический смысл определённого интеграла.* Если функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на  $[a;b]$ , то  $\int_a^b f(x)dx$  численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $y=f(x)$ , снизу  $[a;b]$  оси  $Ox$ , с боков прямыми  $x=a$ ,  $x=b$ .

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



Разделим  $[a; b]$  на  $n$  частичных отрезков точками  $x = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = x$  и проведём через эти точки прямые, параллельные оси  $y$ . На каждом частичном отрезке выберем произвольно по одной точке:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

Найдём в этих точках значение функции и на каждом частичном отрезке строим прямоугольник с основанием  $\Delta x_i$  и высотой  $f(\xi_i)$ .  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина частичного отрезка.

Площадь каждого построенного прямоугольника  $f(\xi_i) \Delta x_i$ .

Найдём площадь ступенчатой фигуры как сумму площадей прямоугольников

$$f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

О. Площадью криволинейной трапеции называется конечный предел площади ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников с основанием  $\Delta_{\xi}$  и высотой  $\xi f(\xi)$  при стремлении длины наибольшего частичного отрезка к нулю.

$$S = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_{\Delta} \quad (1)$$

Так как функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то, по достаточному условию интегрируемости, она интегрируема на этом отрезке, то есть существует определённый интеграл, который по определению равен

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} S_{\Delta} \quad (2)$$

Из (1), (2) следует, что

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

*Геометрический смысл определённого интеграла.* Если функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx$  численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой  $y=f(x)$ , снизу  $[a, b]$  оси  $Ox$ , с боков прямыми  $x=a$ ,  $x=b$ .

## Определённый интеграл как функция переменного верхнего предела интегрирования

Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ . По свойству 13

$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_x^b f(x) dx$$

Рассмотрим  $[a, x]$ , где  $x \in [a, b]$ .

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

Свойства интеграла с переменным верхним пределом.

1. О непрерывности. Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то функция  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  является непрерывной на  $[a, b]$ .

2. О дифференцируемости. Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то функция  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  дифференцируема на  $[a, b]$ , при этом  $F'(x) = f(x)$ .

## Теорема существования неопределённого интеграла.

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она имеет на этом отрезке первообразную, а, значит, существует неопределённый интеграл этой функции.

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Так как функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то по свойству дифференцируемости  $\Phi(x)$  имеет производную, причём  $\Phi'(x) = f(x)$  для всех  $x \in [a, b]$ . Значит,  $\Phi(x)$  – первообразная для  $f(x)$ , а, значит, существует неопределённый интеграл  $\int f(x) dx = \Phi(x) + C$ .



## Формула Ньютона-Лейбница

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ , где

$F(x)$  – первообразная для  $f(x)$  на  $[a; b]$ .

Доказательство.

$$F'(x) = f(x) \quad (1)$$

Пусть  $G(x)$  – какая-нибудь другая первообразная для  $f(x)$ . Тогда

$$F(x) = G(x) + C \quad (2) \text{ для всех } x \in [a; b].$$

$$F(b) = G(b) + C \quad (3) \quad F(a) = G(a) + C = 0.$$

$$\text{Из (3) } C = -G(a)$$

$$F(b) = G(b) - G(a) \quad F(a) = G(a) - G(a) = 0 \quad (5)$$

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

□

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

□

## Замена переменной в определённом интеграле

Если: 1.  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ;

2. Функция  $x = \varphi(t)$  имеет непрерывную производную на  $[\alpha; \beta]$ ;

3. функция  $\varphi(t)$  отображает  $[\alpha; \beta]$  на  $[a, b]$  так, чтобы  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ .

Тогда имеет место формула  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ .

Доказательство.

Так как  $f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то она имеет первообразную  $F(x)$ , т.е.

$$F'(x) = f(x) \quad (2) \quad \text{для всех } x \in [a; b].$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (3)$$

По теореме о непрерывности сложной функции функция  $f(\varphi(x)) \varphi'(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ . Тогда эта функция тоже имеет первообразную на  $[a; b]$ . Докажем, что первообразной для этой функции будет  $F(\varphi(x))$

$$\frac{d}{dx} F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x)) \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x).$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) \Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(b) - F(a) \quad (4)$$

Замечание. При замене переменной в определённом интеграле в отличие от неопределённого не надо возвращаться к старым переменным, но при этом нужно не забыть заменить старые пределы интегрирования  $a, b$  на новые  $\alpha, \beta$ .

## Формула интегрирования по частям в определённом интеграле

Теорема. Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  имеют непрерывные производные на  $[a, b]$ , тогда  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ .

## Вычисление интегралов вида

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & \text{если } n - \text{ чётное;} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{если } n - \text{ нечётное.} \end{cases}$$

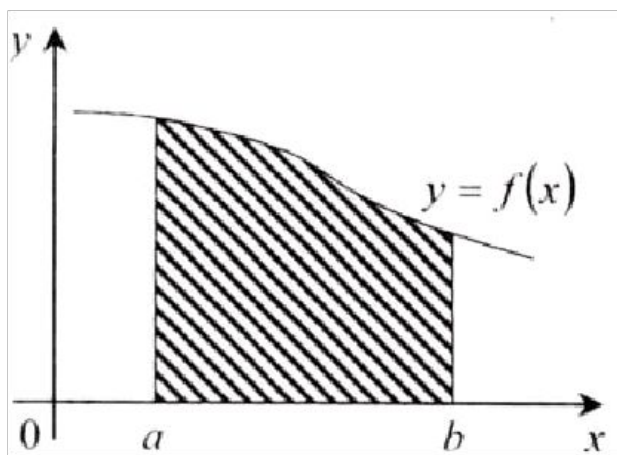
## Интеграл от чётной и нечётной функции по симметричному промежутку

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) - \text{ нечётная функция;} \\ 2 \int_0^a f(x) \, dx, & \text{если } f(x) - \text{ чётная функция.} \end{cases}$$

# Геометрические приложения определённого интеграла

## I. Вычисление площадей плоских фигур

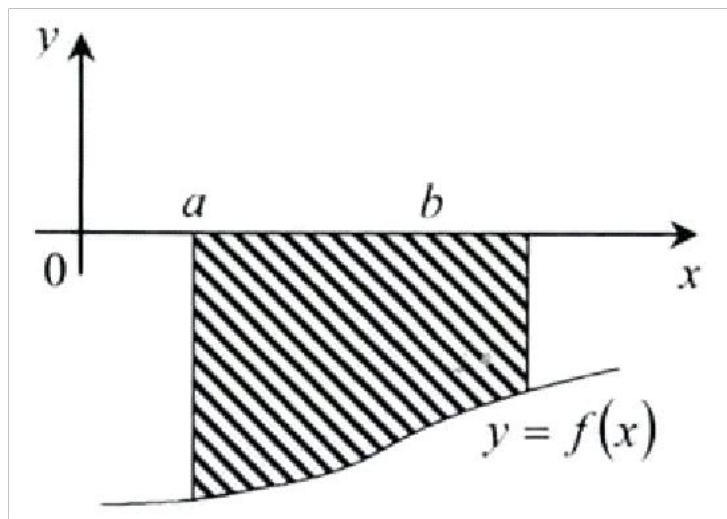
а) Пусть фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху кривой  $y = f(x)$ , снизу – осью  $Ox$ , слева прямой  $x = a$ , справа – прямой  $x = b$ . При этом функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на  $[a; b]$ .



По геометрическому смыслу определённого интеграла

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

б) Пусть криволинейная трапеция лежит ниже оси  $Ox$ , т.е.  $f(x) \leq 0$  на  $[a, b]$



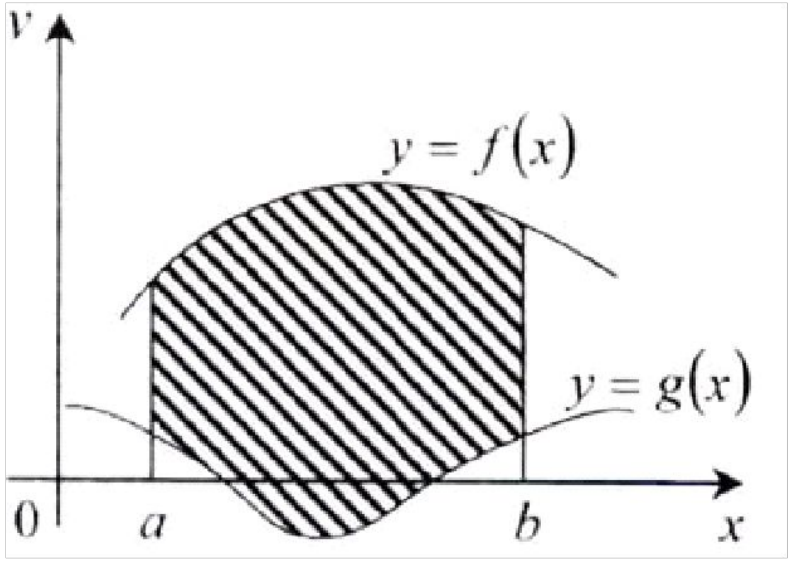
$$S = - \int_a^b f(x) dx$$

в) Если фигура не является криволинейной трапецией, то её разбивают на сумму или на разность криволинейных трапеций.





г) Пусть фигура ограничена сверху кривой  $y = f(x)$ ,  
 снизу – кривой  $y = g(x)$



$S$

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$S$

д) Пусть основание криволинейной трапеции –  $xy$  оси  $xy$ , при этом она ограничена справа кривой  $x = x(y)$ .



$y$

$$x = x(y)$$

$y$

## Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически

Пусть кривая  $\Gamma = \Gamma(t)$  задана в параметрической форме

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= \dot{\Gamma}(t), \\ \ddot{\Gamma} &= \ddot{\Gamma}(t). \end{aligned}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} & \Gamma \\ \Gamma &= \int \Gamma(t) \dot{\Gamma}'(t) dt \\ & \Gamma \end{aligned}$$

## Площадь криволинейного сектора

Криволинейным сектором называется фигура, заключённая между двумя полярными радиусами, образующими с полярной осью углы  $\alpha$  и  $\beta$  и кривой, уравнение которой в полярных координатах  $\rho = \rho(\varphi)$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $\rho = \rho(\varphi)$ , заключённой между указанными лучами, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

## Объём тел

Вычисление объёма тела по известной площади поперечного сечения. Если площадь сечения плоскостью, перпендикулярной к оси  $Ox$ , может быть выражена как функция от  $x$  в виде  $S = S(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , то объём части тела, заключенной между перпендикулярными к оси  $Ox$  плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ , находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx .$$

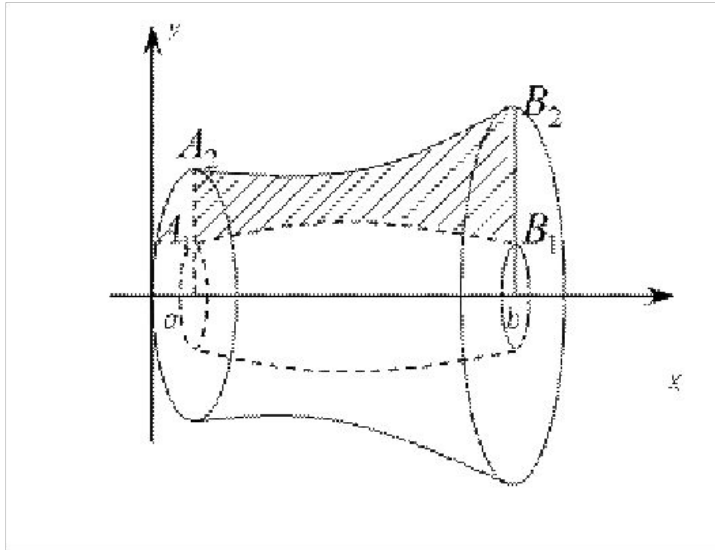
Вычисление объёма тела вращения. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой  $y = f(x)$  и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , вращается вокруг оси  $Ox$ , то объём тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx .$$

Если фигура, ограниченная кривой  $x=\varphi(y)$  и прямыми  $y=c$  и  $y=d$ , вращается вокруг оси  $Oy$ , то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Если фигура, ограниченная кривыми  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , вращается вокруг оси  $Ox$ , то объём тела вращения вычисляется по формуле:



$$V_x = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx$$

Если фигура, ограниченная кривыми  $x_1 = \varphi_1(y)$  и  $x_2 = \varphi_2(y)$ , и прямыми  $y = c$  и  $y = d$ , вращается вокруг оси  $Oy$ , то объём тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy$$



Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой  $y=f(x)$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$ , вращается вокруг оси  $Oy$ , то объём тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x y dx .$$

## Длина дуги кривой

*Длиной дуги  $AB$*  называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев этой ломаной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена стремится к нулю.

Если указанный предел существует и конечен, то дуга  $AB$  называется *спрямляемой*.

Вычисление длины спрямляемой дуги производится по формуле

$$l = \int_{l_1}^{l_2} dl .$$

Если дуга кривой задана уравнением  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ; функция  $f'(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то

$$dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, l_1 = a, l_2 = b.$$

Если дуга кривой задана уравнением  $x = g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ ; функция  $g'(y)$  непрерывна на отрезке  $[c, d]$ , то

$$dl = \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy, l_1 = c, l_2 = d.$$

Если дуга кривой задана параметрически уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ ; функции  $\varphi'(t)$  и  $\psi'(t)$  непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt, l_1 = \alpha, l_2 = \beta.$$

Если дуга кривой задана в полярных координатах уравнением  $\rho = f(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ; функция  $f'(\varphi)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , то

$$dl = \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2} d\varphi, l_1 = \alpha, l_2 = \beta.$$

Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$

## Площадь поверхности вращения

**Определение.** Площадью поверхности  $T$ , образованной вращением дуги вокруг оси, называется предел площади поверхности, полученной от вращения вокруг той же оси ломаной, вписанной в эту дугу, при условии что длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю (если этот предел существует и конечен).

Вычисление площади поверхности, полученной при вращении дуги кривой вокруг оси  $Ox$  ( $Oy$ ) осуществляется по формуле

$$T_x = 2\pi \int_{l_1}^{l_2} y dl \quad \left( T_y = 2\pi \int_{l_1}^{l_2} x dl \right),$$

где  $dl$  вычисляется в зависимости от способа задания кривой.

## Механические приложения определённого интеграла

Вычисление *статических моментов дуг плоских кривых относительно осей координат* осуществляется по следующим формулам:

$$K_x = \int_{l_1}^{l_2} \rho y dl, \quad K_y = \int_{l_1}^{l_2} \rho x dl,$$

где  $\rho$  – линейная плотность дуги,  $dl$  - дифференциал дуги.

Вычисление *координат центра тяжести дуг плоских кривых* осуществляется по следующим формулам:

$$x_c = \frac{\int_{l_1}^{l_2} \rho x dl}{\int_{l_1}^{l_2} \rho dl}, \quad y_c = \frac{\int_{l_1}^{l_2} \rho y dl}{\int_{l_1}^{l_2} \rho dl},$$

где  $\rho$  – линейная плотность дуги,  $dl$  - дифференциал дуги.

*Статические моменты плоской фигуры*, ограниченной снизу графиком непрерывной функции  $y = g(x)$ , сверху графиком непрерывной функции  $y = f(x)$ , слева и справа прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , параллельными оси ординат, вычисляются по формулам:

$$K_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho (f^2(x) - g^2(x)) dx, \quad K_y = \int_a^b \rho x (f(x) - g(x)) dx,$$

где  $\rho$  – поверхностная плотность фигуры.

*Координаты центра тяжести плоской фигуры*, ограниченной снизу графиком непрерывной функции  $y = g(x)$ , сверху графиком непрерывной функции  $y = f(x)$ , слева и справа прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , параллельными оси ординат, вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\int_a^b \rho x (f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b \rho (f(x) - g(x)) dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \rho (f^2(x) - g^2(x)) dx}{\int_a^b \rho (f(x) - g(x)) dx},$$

где  $\rho$  – поверхностная плотность фигуры.

## Несобственные интегралы

### Несобственные интегралы первого рода

1.  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ , если подынтегральная функция  $f(x)$  непрерывна на полуинтервале  $[a, +\infty)$ .

2.  $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$ , если подынтегральная функция  $f(x)$  непрерывна на полуинтервале  $(-\infty, b]$ .

3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$ , если подынтегральная функция  $f(x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ ,  $c$  – любое действительное число.

### Несобственные интегралы второго рода

**1.**  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ , если подынтегральная функция  $f(x)$  непрерывна

на полуинтервале  $[a, b)$  и неограниченна в точке  $x = b$ .

**2.**  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx$ , если подынтегральная функция  $f(x)$

непрерывна на полуинтервале  $(a, b]$  и неограниченна в точке  $x = a$ .

**3.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на полуинтервалах  $[a, c)$  и  $(c, b]$  и

неограниченна в точке  $x = c$ , то  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ .