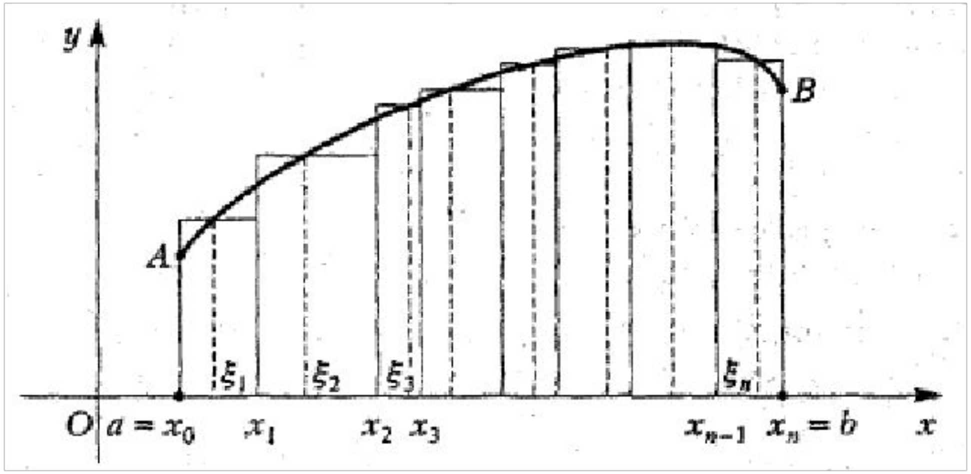
Определённый интеграл

Понятие определённого интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Разделим $[a;b]$ на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.



Обозначим длины частичных отрезков $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

На каждом частичном отрезке выберем произвольно по одной точке: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

В каждой из этих точек найдём значения функции $f(x)$, умножим эти значения на длину соответствующего частичного отрезка и сложим эти произведения. Полученное выражение

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$.

$\lambda = \max\{\Delta x_i\}$.

О. Если существует конечный предел интегральной суммы σ при стремлении наибольшего частичного отрезка λ к нулю, если этот предел не зависит ни от разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные, ни от выбора точек ξ_i на частичных отрезках, то этот предел называется определённым интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$.

Функция $f(x)$ называется при этом интегрируемой на отрезке $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

a – нижний предел интегрирования,

b – верхний предел интегрирования.

<u>*Необходимое условие интегрируемости.*</u> Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то она ограниченна на этом отрезке.

Доказательство.

Предположим, что функция не ограничена на $[a;b]$, тогда при каждом разбиении отрезка $[a;b]$ на частичные функция будет не ограничена хотя бы в одном частичном отрезке. Тогда за счёт выбора точек ξ_i на этом частичном отрезке значение функции $f(\xi_i)$, а вместе с ним и произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ может быть сделано по модулю больше любого наперёд заданного числа, а в таком случае интегральная сумма не может иметь конечного предела при λ, стремящемся к нулю, а, значит, функция $f(x)$ не будет интегрируема на $[a;b]$, что противоречит условию. Противоречие доказывает теорему.

Замечание. Обратное утверждение не верно: из ограниченности функции на $[a;b]$ не следует её интегрируемость.

Пример: функция Дирихле.

О. Число I называется пределом интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, если для любого положительного числа ε существует положительное число $\delta(\varepsilon)$, такое, что при любом разбиении $[a, b]$ на частичные, при котором $\lambda < \delta$, и при любом выборе точек ξ_i выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I.$$

Достаточное условие существования определённого интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Разделим $[a;b]$ на n частичных отрезков точками

$$⊠ = ⊠_0 < ⊠_1 < ⊠_2 < \dots < ⊠_{⊠} = ⊠$$

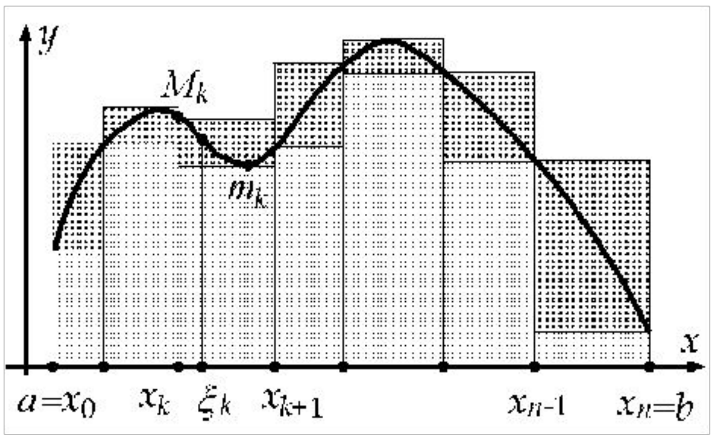
и обозначим это разбиение T. Обозначим длины частичных отрезков Δx_1, Δx_2, …, Δx_n. $\Delta ⊠_{⊠} = ⊠_{⊠} - ⊠_{⊠-1}$. На каждом частичном отрезке выберем произвольно по одной точке: ξ_1, ξ_2, …, ξ_n и составим интегральную сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

По определению определённого интеграла нужно показать, что существует конечный предел интегральной суммы.

Верхняя и нижняя суммы Дарбу

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда она непрерывна и на каждом частичном отрезке из разбиения Т. Тогда по теореме Вейерштрасса на каждом частичном отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{1,n})$ функция $f(x)$ имеет наибольшее значение M_k и наименьшее значение m_k.



Суммы

$$\overline{S} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k \text{ и}$$

$$\underline{s} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$$

называются соответственно верхней и нижней суммами Дарбу функции $f(x)$ для данного разбиения Т на отрезке $[a;b]$.

Свойства сумм Дарбу.

1. Для данного разбиения T $\underline{S} \le \overline{S}$, при этом любая интегральная сумма σ для этого же разбиения удовлетворяет неравенству $\underline{S} \le \sigma \le \overline{S}$.

2. Если разбиение T' получено из разбиения T путём добавления новых точек, то $\underline{S} \le \underline{S}'$, $\overline{S}' \le \overline{S}$, где $\underline{S}$, $\overline{S}$ нижняя и верхняя суммы для разбиения T, $\underline{S}'$, $\overline{S}'$ - нижняя и верхняя суммы для разбиения T'.

3. Любая нижняя сумма не превосходит любой верхней суммы.

4. Существует число I, такое, что $\underline{S} \le I \le \overline{S}$ для любых нижних и верхних сумм из разных разбиений.

Понятие определённого интеграла было введено при условии, что $a<b$

O$_1$. Если a = b, то $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

O$_2$. Если a > b, то интегралом $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется выражение $-\int\limits_b^a f(x)dx$, при условии, что $\int\limits_b^a f(x)dx$ существует.

Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b 0dx = 0$.

2. $\int_a^b dx = b - a$.

3. Из определения 2 следует $\int_a^a f(x)dx = 0$.

4. При любых □ и b имеет место равенство $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ при условии, что хотя бы один из интегралов существует.

5. При любом расположении точек □, □, □ имеет место равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

6. Свойство аддитивности. Интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же сумме интегралов от этих функций. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, при условии, что интегралы справа существуют.

7. Если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $kf(x)$ также интегрируема на $[a;b]$, причём $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $a < b$, и $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

9. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, $a < b$, и $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

10. Об оценке интеграла. Если функция $f(x)$ интегрируема на [a,b] и при этом $m \leq f(x) \leq M$, тогда

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

11. Об оценке модуля интеграла.

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

При условии, что оба интеграла существуют и $a < b$

12. Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то на $[a, b]$ существует хотя бы одна точка c, такая что

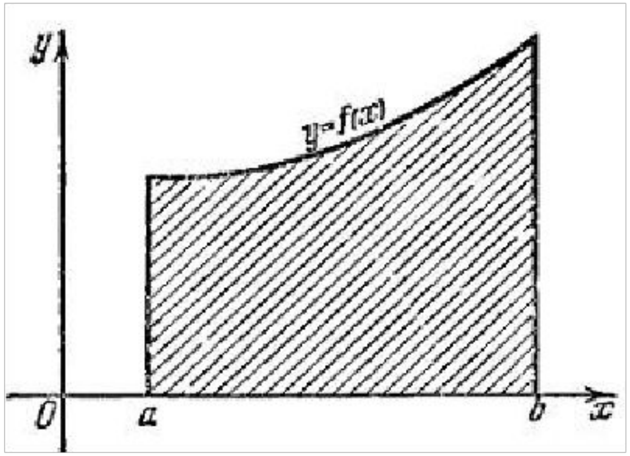
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

13. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Геометрический смысл определённого интеграла

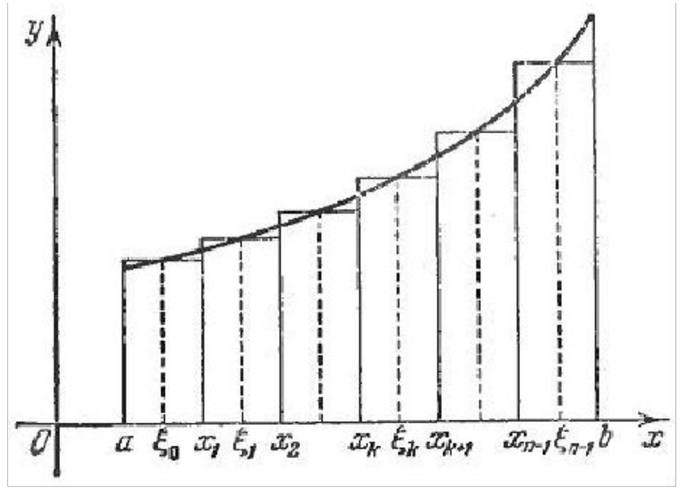
Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;b]$.

О. <u>Криволинейной трапецией</u> называется фигура, ограниченная сверху кривой $y=f(x)$, снизу – осью Ox, слева прямой $x=a$, справа – прямой $x=b$.



Геометрический смысл определённого интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y=f(x)$, снизу $[a;b]$ оси Ox, с боков прямыми $x=a$, $x=b$.

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$



Разделим $[a;b]$ на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ и проведём через эти точки прямые, параллельные оси у. На каждом частичном отрезке выберем произвольно по одной точке: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Найдём в этих точках значение функции и на каждом частичном отрезке строим прямоугольник с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ –длина частичного отрезка.

Площадь каждого построенного прямоугольника $f(\xi_i)\Delta x_i$.

Найдём площадь ступенчатой фигуры как сумму площадей прямоугольников

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

О. Площадью криволинейной трапеции называется конечный предел площади ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$ при стремлении длины наибольшего частичного отрезка к нулю.

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n \quad (1)$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, по достаточному условию интегрируемости, она интегрируема на этом отрезке, то есть существует определённый интеграл, который по определнию равен

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda \to 0} S_n \quad (2)$$

Из (1), (2) следует, что

$$S = \int_a^b f(x).$$

Геометрический смысл определённого интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу $[a;b]$ оси Ox, с боков прямыми $x = a$, $x = b$.

Определённый интеграл как функция переменного верхнего предела интегрирования

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. По свойству 13

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Рассмотрим $[a, x]$, где $x \in [a, b]$.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Свойства интеграла с переменным верхним пределом.

1. О непрерывности. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ является непрерывной на $[a, b]$.

2. О дифференцируемости. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема на $[a, b]$, при этом $\Phi'(x) = f(x)$.

Теорема существования неопределённого интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную, а, значит, существует неопределённый интеграл этой функции.

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по свойству дифференцируемости $\Phi(x)$ имеет производную, причём $\Phi'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Значит, $\Phi(x)$ – первообразная для $f(x)$, а, значит, существует неопределённый интеграл $\int f(x)dx = \Phi(x) + C$.

Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, где

$F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;b]$.

Доказательство.

Φ[illegible] = [illegible] (1)

Пусть [illegible]([illegible]) – какая-нибудь другая первообразная для [illegible]([illegible]). Тогда
Φ[illegible] = [illegible] + [illegible] (2) для всех [illegible].

Φ[illegible] = [illegible] + [illegible] [illegible]3[illegible]

Φ[illegible] = [illegible] = 0.

Из (3) [illegible] = − [illegible]

Φ[illegible] = [illegible] − [illegible]4[illegible]

Φ[illegible] = [illegible] − [illegible] (5)

Φ[illegible] = [illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible] − [illegible]([illegible])

Замена переменной в определённом интеграле

Если: 1. $f(x)$ непрерывна на $\left[a;b\right]$;

2. Функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на $\left[\alpha;\beta\right]$;

3. функция $\varphi(t)$ отображает $\left[\alpha;\beta\right]$ на $\left[a;b\right]$ так, чтобы $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi\left(\beta\right)=b$.

Тогда имеет место формула $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство.

Так как $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она имеет первообразную $F(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x) \quad (2) \qquad \text{для всех } x \in [a; b].$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (3)$$

По теореме о непрерывности сложной функции функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Тогда эта функция тоже имеет первообразную на $[\alpha, \beta]$. Докажем, что первообразной для этой функции будет $F(\varphi(t))$

$$\left(F(\varphi(t))\right)' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \quad (4)$$

Замечание. При замене переменной в определённом интеграле в отличие от неопределённого не надо возвращаться к старым переменным, но при этом нужно не забыть заменить старые пределы интегрирования a, b на новые α, β.

Формула интегрирования по частям в определённом интеграле

Теорема. Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a;b]$, тогда $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

Вычисление интегралов вида

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \text{ и } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } n - \text{ чётное;} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ если } n - \text{ нечётное.} \end{cases}$$

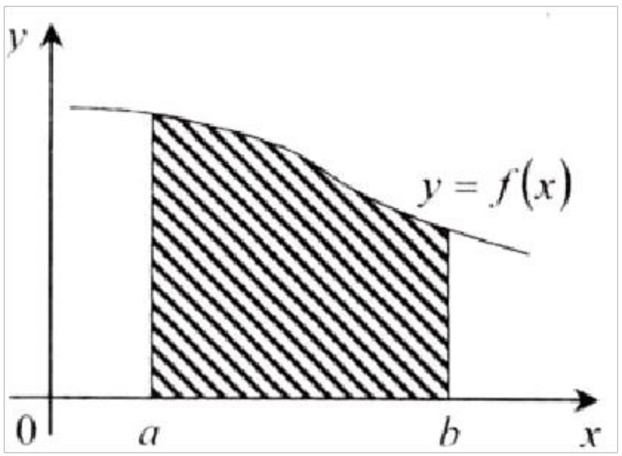
Интеграл от чётной и нечётной функции по симметричному промежутку

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ если } f(x) - \text{ нечётная функция;} \\ 2\int_0^{a} f(x)\,dx, \text{ если } f(x) - \text{ чётная функция.} \end{cases}$$

Геометрические приложения определённого интеграла

I. Вычисление площадей плоских фигур

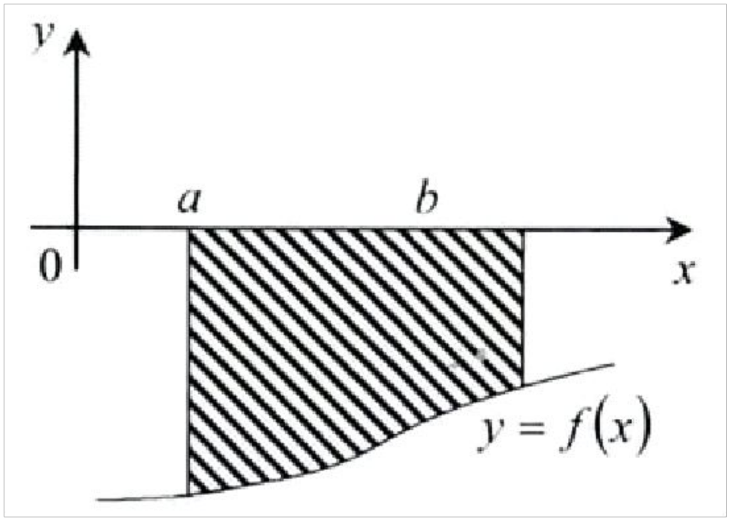
а) Пусть фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу – осью Ox, слева прямой $x = a$, справа – прямой $x = b$. При этом функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$.



По геометрическому смыслу определённого интеграла

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

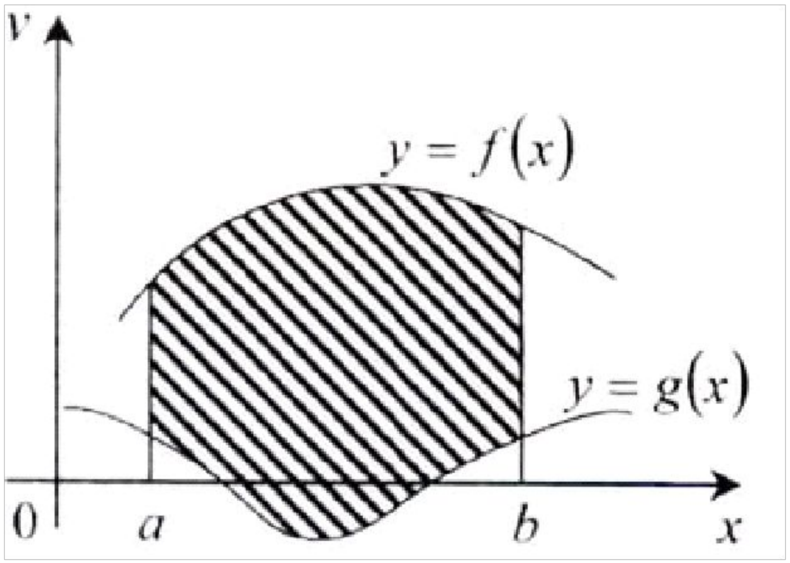
б) Пусть криволинейная трапеция лежит ниже оси Ox, т.е. $f(x) \le 0$ на $[a, b]$.



$$S = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

в) Если фигура не является криволинейной трапецией, то её разбивают на сумму или на разность криволинейных трапеций.

г) Пусть фигура ограничена сверху кривой $y = f(x)$, снизу – кривой $y = g(x)$



$$S = \int_{a}^{b} \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

д) Пусть основание криволинейной трапеции – $[\square, \square]$ оси $\square\square$, при этом она ограничена справа кривой $\square = \square(\square)$.

$$\square = \int_{\square}^{\square} \square(\square)\,\square\square.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически

Пусть кривая $y = f(x)$ задана в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

В этом случае

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Площадь криволинейного сектора

Криволинейным сектором называется фигура, заключённая между двумя полярными радиусами, образующими с полярной осью углы α и β и кривой, уравнение которой в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, заключённой между указанными лучами, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Объём тел

<u>*Вычисление объёма тела по известной площади поперечного сечения.*</u> Если площадь сечения плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, может быть выражена как функция от x в виде $S = S(x)$, $a \le x \le b$, то объём части тела, заключенной между перпендикулярными к оси Ox плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx \quad .$$

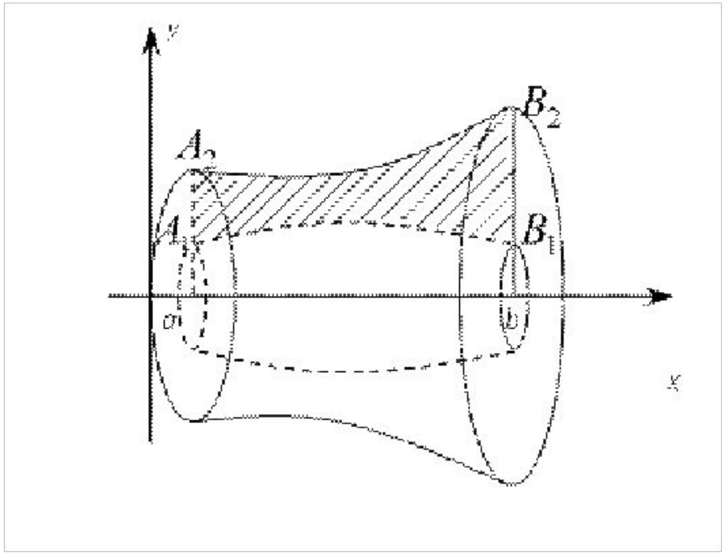
<u>*Вычисление объёма тела вращения.*</u> Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объём тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \; .$$

Если фигура, ограниченная кривой $x=\varphi(y)$ и прямыми $y=c$ и $y=d$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy$$

Если фигура, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объём тела вращения вычисляется по формуле:



$$V_x = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x) \right) dx$$

Если фигура, ограниченная кривыми $x_1 = \varphi_1(y)$ и $x_2 = \varphi_2(y)$, и прямыми $y = c$ и $y = d$, вращается вокруг оси Oy, то объём тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int_c^d \left(x_2^2 - x_1^2 \right) dy$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси Oy, то объём тела вращения вычисляется по формуле:

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy\,dx.$$

Длина дуги кривой

Длиной дуги AB называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев этой ломаной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена стремится к нулю.

Если указанный предел существует и конечен, то дуга AB называется ***спрямляемой***.

Вычисление длины спрямляемой дуги производится по формуле

$$l = \int_{l_1}^{l_2} dl .$$

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$; функция $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то

$$dl = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,\ l_1 = a,\ l_2 = b.$$

Если дуга кривой задана уравнением $x = g(y)$, $c \le y \le d$; функция $g'(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$, то

$$dl = \sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy,\ l_1 = c,\ l_2 = d.$$

Если дуга кривой задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$; функции $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, то

$$dl = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt,\ l_1 = \alpha,\ l_2 = \beta.$$

Если дуга кривой задана в полярных координатах уравнением $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$; функция $f'(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$, то

$$dl = \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\,d\varphi,\ l_1 = \alpha,\ l_2 = \beta.$$

Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$

Площадь поверхности вращения

Определение. Площадью поверхности T, образованной вращением дуги вокруг оси, называется предел площади поверхности, полученной от вращения вокруг той же оси ломаной, вписанной в эту дугу, при условии что длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю (если этот предел существует и конечен).

Вычисление площади поверхности, полученной при вращении дуги кривой вокруг оси Ox (Oy) осуществляется по формуле

$$T_x = 2\pi \int_{l_1}^{l_2} y\, dl \quad \left(T_y = 2\pi \int_{l_1}^{l_2} x\, dl \right),$$

где dl вычисляется в зависимости от способа задания кривой.

Механические приложения определённого интеграла

Вычисление *статических моментов дуг плоских кривых относительно осей координат* осуществляется по следующим формулам:

$$K_x = \int_{l_1}^{l_2} \rho\, y\, dl, \qquad K_y = \int_{l_1}^{l_2} \rho\, x\, dl,$$

где ρ – линейная плотность дуги, dl - дифференциал дуги.

Вычисление *координат центра тяжести дуг плоских кривых* осуществляется по следующим формулам:

$$x_c = \frac{\int_{l_1}^{l_2} \rho\, x\, dl}{\int_{l_1}^{l_2} \rho\, dl}, \qquad y_c = \frac{\int_{l_1}^{l_2} \rho\, y\, dl}{\int_{l_1}^{l_2} \rho\, dl},$$

где ρ – линейная плотность дуги, dl - дифференциал дуги.

Статические моменты плоской фигуры, ограниченной снизу графиком непрерывной функции $y=g(x)$, сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, параллельными оси ординат, вычисляются по формулам:

$$K_x=\frac{1}{2}\int_a^b \rho\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx,\ K_y=\int_a^b \rho\, x\left(f(x)-g(x)\right)dx,$$

где ρ – поверхностная плотность фигуры.

Координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной снизу графиком непрерывной функции $y=g(x)$, сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, параллельными оси ординат, вычисляются по формулам:

$$x_c=\frac{\int_a^b \rho x\left(f(x)-g(x)\right)dx}{\int_a^b \rho\left(f(x)-g(x)\right)dx},\qquad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b \rho\left(f^2(x)-g^2(x)\right)dx}{\int_a^b \rho\left(f(x)-g(x)\right)dx},$$

где ρ – поверхностная плотность фигуры.

Несобственные интегралы

Несобственные интегралы первого рода

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,+\infty)$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $(-\infty, b]$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на R, c– любое действительное число.

Несобственные интегралы второго рода

1. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a,b)$ и неограниченна в точке $x=b$.

2. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$, если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $(a,b]$ и неограниченна в точке $x=a$.

3. Если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервалах $[a,c)$ и $(c,b]$ и неограниченна в точке $x=c$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.