

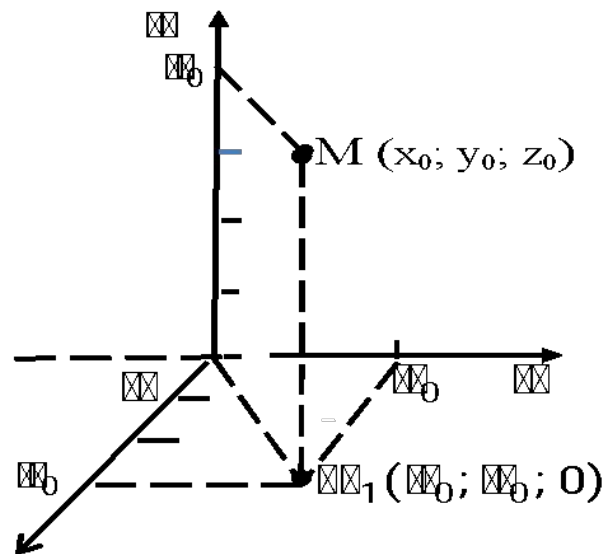
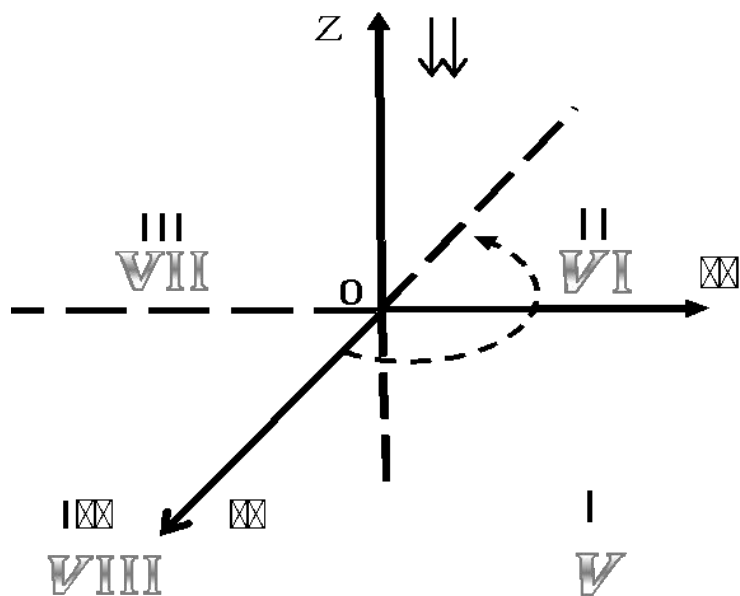
Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве

Две
Декартова система координат в евклидовом пространстве

$$R^3 = \{x; y; z\} :$$

x – абсцисса, y – ордината, z – аппликата

октаны I – VIII



З а м е ч а н и е. Единица масштаба по оси OX по длине составляет примерно 0.8 от одинаковых единиц масштаба по осям OY и OZ .

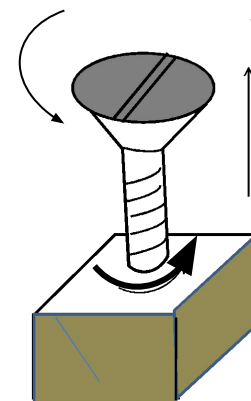
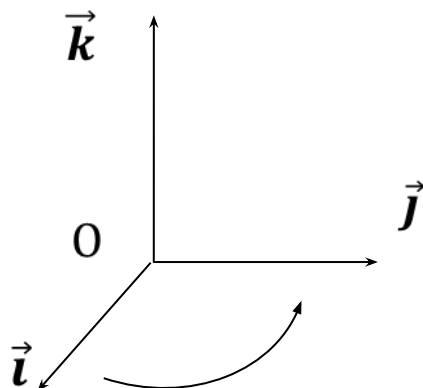
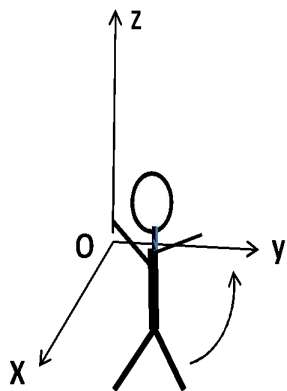
Правая тройка векторов

Направление обхода
-
против часовой
стрелки

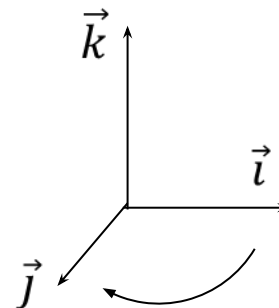
Базисные орты

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

Правило буравчика
(правило правого
винта)



* **Левая тройка векторов**
=>



РАЗДЕЛ 1. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

- **Общее уравнение плоскости в пространстве**

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ называется **нормальным вектором плоскости**.
Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и M_3 , не лежащие на одной прямой, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- **Угол (двугранный) между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется с помощью формулы**

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

РАЗДЕЛ 2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- **Каноническое уравнение прямой**, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) параллельно направляющему вектору $\vec{a} = (a, b, c)$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

- **Уравнение прямой через две заданные точки** (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

- **Угол между прямыми** с направляющими векторами (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) определяется по формуле:

$$\cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- **Условия параллельности прямых**

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- **Условия перпендикулярности прямых**

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

РАЗДЕЛ 3. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Угол φ между плоскостью $P: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой $L: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ определяется по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

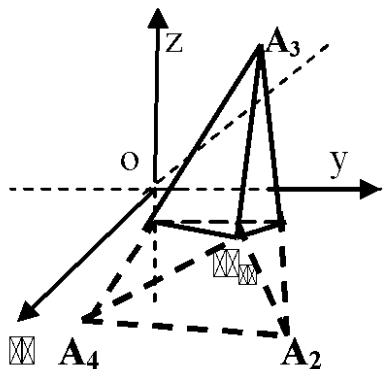
- Условие параллельности прямой L и плоскости P : $Aa + Bb + Cc = 0$.
- Условие перпендикулярности прямой L и плоскости P : $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$, (если $a, b, c \neq 0$)
- Каноническое уравнение прямой L , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно плоскости P

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}, \quad \text{если } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

- Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно прямой L

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
 $A_1(2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; -1)$, $A_3(1; 2; 2)$, $A_4(2; -1; -2)$. Найти:
 длину ребра A_1A_2 ; Сделать чертеж
 Решение.



Длину ребра A_1A_2 найдем как длину
 Вектора $\vec{A_1A_2}$ по формуле (8)

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 1 + (-1)^2} = \sqrt{3} \approx 1.73 \text{ ед. дл.}$$

О т в е т: $|A_1A_2| = \sqrt{3} \approx 1.73 \text{ ед. дл.}$



Карл Фридрих Гаусс - родился 30 апреля 1777 года в
 Германии.

Считается "королем математики".

Занимался исследованиями в таких областях как:
 алгебра, дифференциальная и неевклидова геометрия,
 математический анализ, теории функций комплексного
 переменного, теория вероятностей.

Задача2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; -1)$, $A_3(1; 2; 2)$, $A_4(2 - 1 - 2)$. Найти:

1) уравнение прямой $A_1 A_2$; 2) угол между ребрами $A_1 A_2$ и $A_1 A_4$

Решение

1) Уравнение прямой $\overline{A_1 A_2}$, проходящей через две точки $\overline{A_1}(2; 1; 0)$ и $\overline{A_2}(3; 2; -1)$, найдём по формуле

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{z - 0}{-1 - 0}$$

О т в е т: $\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{-1}$

2) Угол между рёбрами $\overline{A_1 A_2}$ и $\overline{A_1 A_4}$ найдем как угол φ между векторами

$\overline{A_1 A_2} = (1; 1; -1)$ и $\overline{A_1 A_4} = (0; -2; -2)$ с модулями $|\overline{A_1 A_2}| = \sqrt{1 + 1 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

и $|\overline{A_1 A_4}| = \sqrt{0 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ из соотношения (12)

$$\cos \varphi = \frac{\overline{A_1 A_2} \cdot \overline{A_1 A_4}}{|\overline{A_1 A_2}| \cdot |\overline{A_1 A_4}|} = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}} = \frac{0}{2\sqrt{6}} = 0$$

О т в е т: $\angle \overline{A_1 A_2} \overline{A_1 A_4} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

Задача 3. Даны координаты вершин пирамиды

$A_1 A_2 A_3 A_4$:

$A_1(2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; -1)$, $A_3(1; 2; 2)$, $A_4(2 - 1 - 2)$.

Найти: уравнение плоскости $A_1 A_2 A_3$;

Решени

1⁹ Для того чтобы составить уравнение плоскости $\pi_1 \pi_2 \pi_3$, возьмем текущую точку $M(x, y, z)$ плоскости. Векторы $\overline{A_1 M} = (x-2; y-1; z)$, $\overline{A_1 A_2} = (1; 1; -1)$, $\overline{A_1 A_3} = (-1; 1; 2)$ лежат в этой плоскости, т.е. они являются компланарными.

Воспользуемся условием компланарности трех векторов

$$\begin{aligned} \overline{A_1 M} \times \overline{A_1 A_2} \times \overline{A_1 A_3} &= \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} z & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} z & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3x - 2 - z - 1 + 2z = 3x - z + 2z - 5. \end{aligned}$$

О т в е т: уравнение плоскости $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ имеет вид $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Задача 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
 $A_1(2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; -1)$, $A_3(1; 2; 2)$, $A_4(2; -1; -2)$. Найти:
 угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$
 Решение

Угол между ребром A_1A_4 - вектором $\vec{A_1A_4} = (0; -2; -2)$ длиной $|\vec{A_1A_4}| = \sqrt{8}$ и
 гранью $A_1A_2A_3$ - плоскостью $3x - y + 2z - 5 = 0$, найдем по формуле

$$\sin \angle(\vec{A_1A_4}, \pi_{A_1A_2A_3}) = \frac{|\vec{A_1A_4} \cdot \vec{n}|}{|\vec{A_1A_4}| \cdot |\vec{n}|}$$

где $\vec{n} = (3; -1; 2)$ нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$,

$$\sin \angle(\vec{A_1A_4}, \pi_{A_1A_2A_3}) = \frac{|0 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{14}} = \frac{|0 + 2 - 4|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \approx 0.1889$$

$$\angle(\vec{A_1A_4}, \pi_{A_1A_2A_3}) \approx \arcsin 0.1889 \approx 0.1912(\text{рад.}) \approx 11^\circ 27'$$

О т в е т: угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ приближённо
 составляет $11^\circ 27'$ или 0.19 радиан.

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:
 $A_1(2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; -1)$, $A_3(1; 2; 2)$, $A_4(2; -1; -2)$.

Найти: площадь грани $A_1A_2A_3$

Решение

Площадь грани $A_1A_2A_3$ вычислим с помощью векторного произведения векторов $\vec{A_1A_2} = (1; 1; -1)$ и $\vec{A_1A_3} = (-1; 1; 2)$.

Найдём площадь треугольника $A_1A_2A_3$ как половину площади параллелограмма по формуле: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{A_1A_2} \times \vec{A_1A_3}|$. Применяя символический определитель найдём

$$\vec{A_1A_2} \times \vec{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{A_1A_2} \times \vec{A_1A_3}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

О т в е т: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{14} \approx 1,87$ (ед. пл.)

Задача 6. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(2; 1; 0)$, $A_2(3; 2; -1)$, $A_3(1; 2; 2)$, $A_4(2; -1; -2)$.

Найти: объем пирамиды.

Решение

Объем пирамиды $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$ вычислим как одну шестую объема параллелепипеда с помощью смешанного произведения векторов $\vec{a}_1 = (1; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; 2)$ и $\vec{a}_3 = (0; -2; -2)$, на которых построена пирамида, по формулам

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 2 + 0 - 2 + 4 = -2 \Rightarrow$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = \frac{1}{6} (-2) = -\frac{1}{3}$$

Ответ: $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ (ед. объема)

РАЗДЕЛ 4. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхности второго порядка – это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка.

- **Цилиндрические поверхности.**

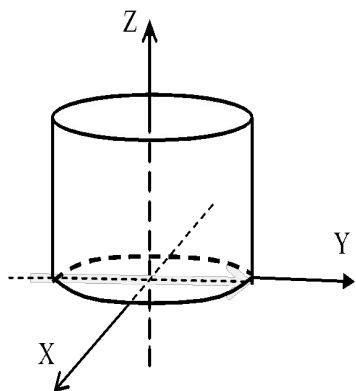
Цилиндрическими поверхностями называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой-либо фиксированной прямой.

Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z , т.е. направляющие параллельны оси Oz . Тип линии на плоскости XOY (эта линия называется направляющей поверхности) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим некоторые частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

Цилиндрические поверхности

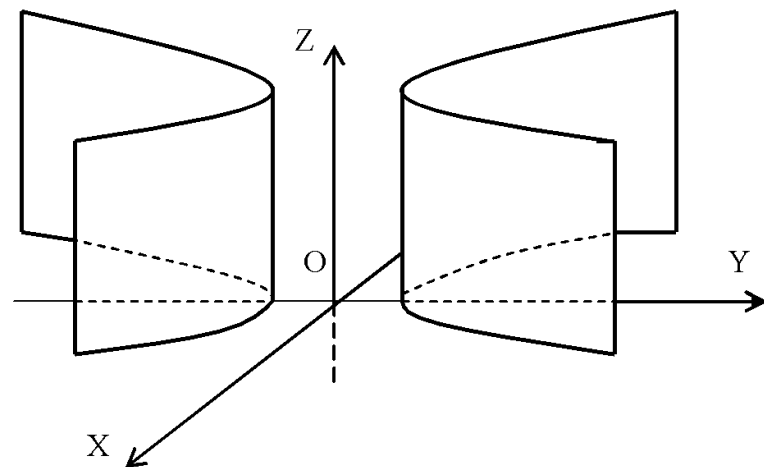
1) Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



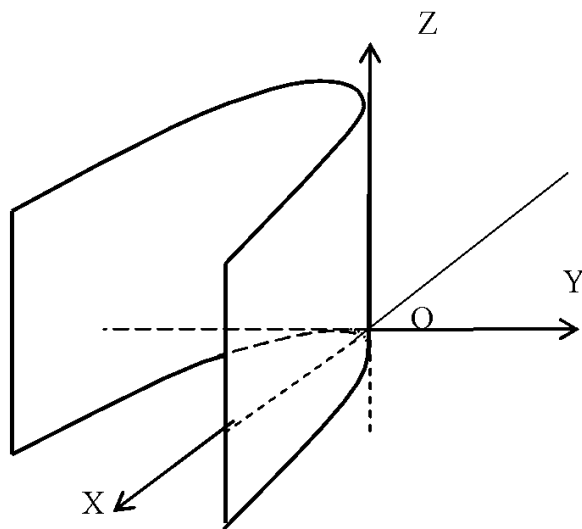
2) Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



3) Параболический цилиндр

$$x^2 = 2py$$



Поверхности вращения

Поверхность, описываемая некоторой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d , называется **поверхностью вращения** с осью вращения d .

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе координат имеет вид: $F(x^2 + y^2, z) = 0$, то эта поверхность – поверхность вращения с осью вращения Oz .

Аналогично: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Oy ,

$F(z^2 + y^2, x) = 0$ – поверхность вращения с осью вращения Ox .

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - **эллипсоид вращения**

2) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - **однополостный гиперболоид вращения**

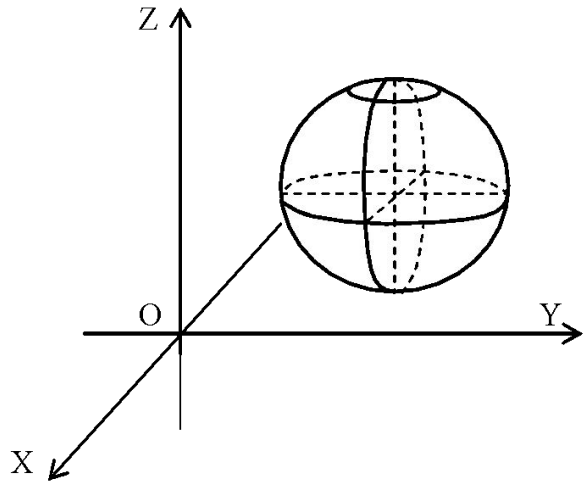
3) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - **двуполостный гиперболоид вращения**

4) $\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$ - **параболоид вращения**

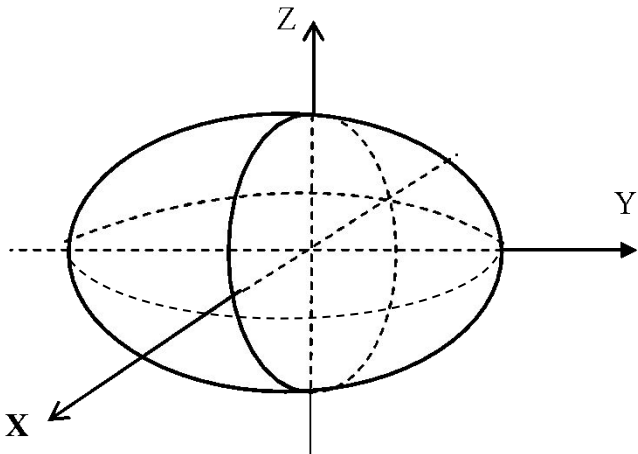
Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения являются оси Ox или Oy .

Однако, перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями поверхностей второго порядка общего вида, некоторые типы которых рассмотрены ниже:

1) Сфера: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

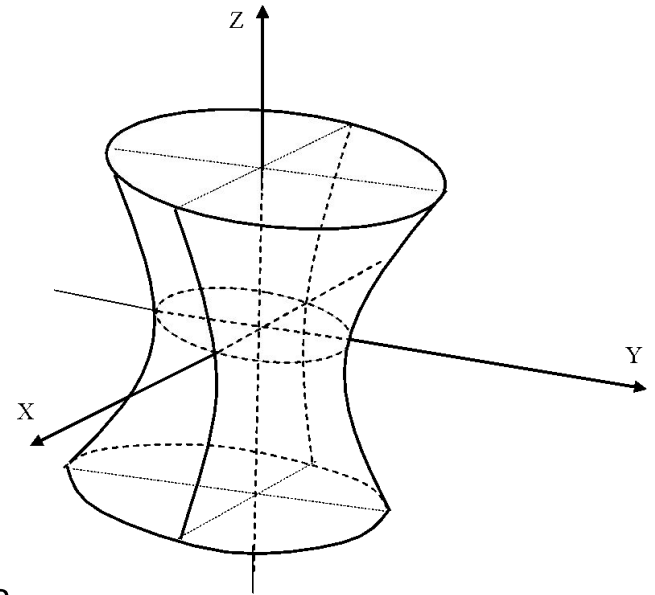


2) Трехосный эллипсоид:



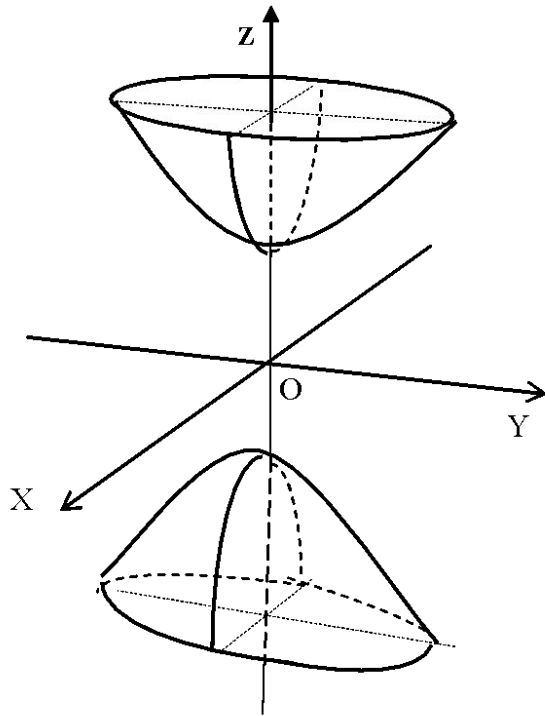
3) Однополостный гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



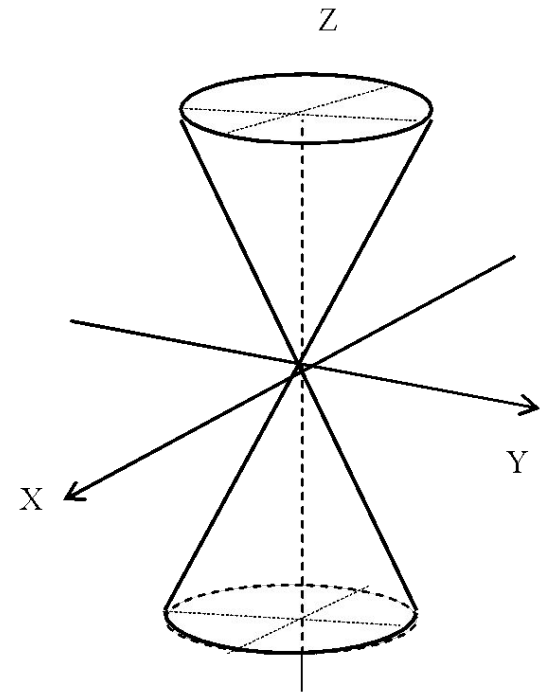
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Двуполостный гиперболоид:



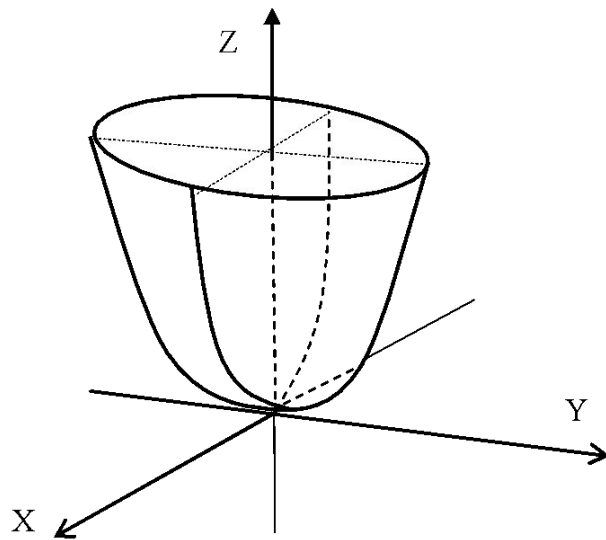
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Конус второго порядка:



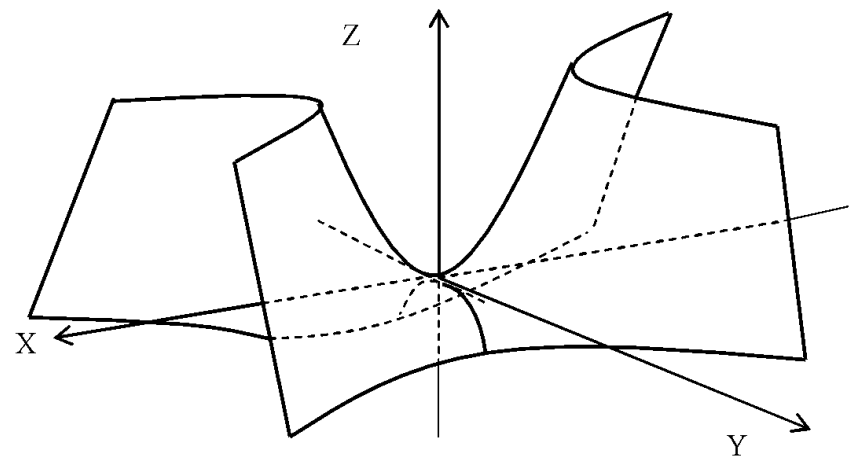
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Эллиптический параболоид:



$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{где } p > 0, q > 0$$

Гиперболический параболоид:



$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$