Погрешности измерений.

Определение погрешности измерений.

Классификация погрешностей.

Случайные погрешности.

Систематические погрешности.

Методы исключения систематических погрешностей.

Грубые погрешности и методы их искл

Погрешности косвенных измерени

Погрешность возникает при одновременном воздействии многих источников, каждый из которых сам по себе оказывает незаметное влияние на результат измерения, но суммарное воздействие всех источников может оказаться достаточно сильным.

Случайная ошибка может принимать различные по абсолютной величине значения, предсказать которые для данного акта измерения невозможно. Эта ошибка в равной степени может быть как положительной, так и отрицательной. Случайные ошибки всегда присутствуют в эксперименте. При отсутствии систематических ошибок они служат причиной разброса повторных измерений относительно истинного значения (*рис.1*).

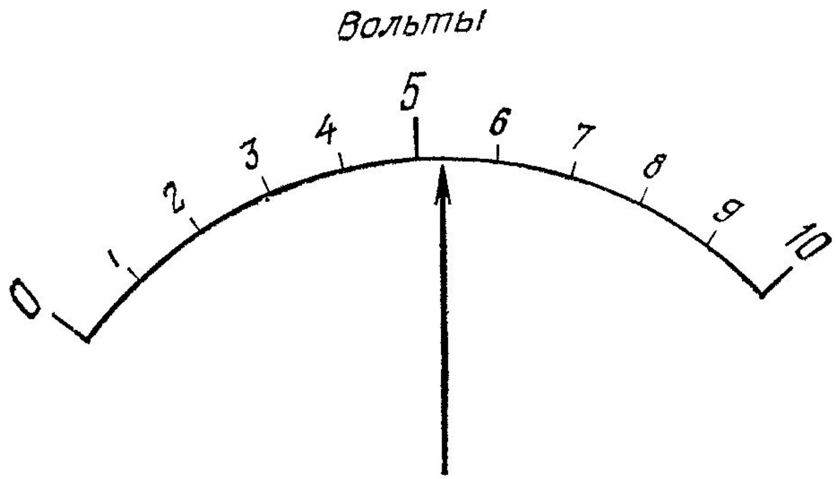
Если, кроме того, имеется и систематическая ошибка, то результаты измерений будут разбросаны относительно не истинного, а смещенного значения (*рис.2*).

Рис. 1

Рис. 2

Измерение длины линейкой.

наилучшая оценка длины = 36 мм,
вероятный интервал 35,5—36,5 мм



Считывание со шкалы вольтметра.

наилучшая оценка напряжения = 5,3 В,
вероятный интервал 5,2—5,4 В.

Процесс определения положений между метками шкалы называется *интерполяцией.* Этот важный навык совершенствуется с практикой.

Оценка погрешностей в случае многократных измерений

2,3; 2,4; 2,5; 2,4,

наилучшая оценка = среднее = 2,4 с,
вероятный интервал 2,3—2,5 с.

измеренное значение времени = 2,4 ± 0,1 с.

$$\boxed{(\text{измеренная величина } x) = x_{\text{нанл}} \pm \delta x.}$$

Значащие цифры

Правило приведения погрешностей

Экспериментальные погрешности ОБЫЧНО должны округляться до одной значащей цифры

(измеренное значение g) $= 9{,}82 \pm 0{,}02385$ м/с^2.

(измеренное значение g) $= 9{,}82 \pm 0{,}02$ м/с^2.

Правило приведения результатов

Последняя значащая цифра в любом приводимом результате обычно должна быть того же порядка величины (находиться в той же десятичной позиции), что и погрешность.

измеренная скорость $= 6051{,}78 \pm 30$ м/с

измеренная скорость $= 6050 \pm 30$ м/с.

92,8±0,3
93±3
90±30

Однако используемые в расчетах числа должны, как правило, содержать *на одну значащую цифру больше*, чем это оправдано. Это уменьшит неточности, возникающие при округлении чисел. В конце расчета окончательный ответ следует округлить и избавиться от этой добавочной (и незначащей) цифры[1]).

1 и 2

Приблизительное соответствие между значащими цифрами и относительной погрешностью

Число значащих цифр	Соответствующая относительная погрешность	
	лежит между	или очень приближенно равна
1	5 и 50%	10%
2	0,5 и 5%	1%
3	0,05 и 0,5%	0,1%

К сожалению, это полезное соответствие является лишь приблизительным. Число 110, данное с двумя значащими цифрами, означает

$$110 \pm 5, \quad \text{или} \quad 110 \pm 5\,\%,$$

в то время как число 910 (тоже с двумя значащими цифрами) означает

$$910 \pm 5, \quad \text{или} \quad 910 \pm 0{,}5\,\%.$$

Погрешность в суммах и разностях

Предположим, что $x, \ldots, w$ измерены с погрешностями $\delta x, \ldots, \delta w$ и что измеренные значения используются для вычисления

$$q = x + \ldots + z - (u + \ldots + w).$$

Если известно, что погрешности в $x, \ldots, w$ *независимы и случайны*, то погрешность в q равна квадратичной сумме

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \ldots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \ldots + (\delta w)^2}$$

исходных погрешностей. В любом случае δq никогда не больше, чем их обычная сумма

$$\delta q \leqslant \delta x + \ldots + \delta z + \delta u + \ldots + \delta w.$$

Погрешности в произведениях и частиых

Предположим, что $x, \ldots, w$ измерены с погрешностями $\delta x, \ldots, \delta w$ и что измеренные значения используются для вычисления

$$q = \frac{x \times \ldots \times z}{u \times \ldots \times w}.$$

Если погрешности в $x, \ldots, w$ *независимы и случайны*, то относительная погрешность в q равна квадратичной сумме исходных относительных погрешностей

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2}.$$

В любом случае она никогда не больше, чем их обычная сумма

$$\frac{\delta q}{|q|} \leqslant \frac{\delta x}{|x|} + \ldots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \ldots + \frac{\delta w}{|w|}.$$

Погрешности в суммах и разностях

Если несколько величин $x, \ldots, w$ измерены с погрешностями $\delta x, \ldots, \delta w$ и используются для вычисления

$$q = x + \ldots + z - (u + \ldots + w),$$

то погрешность в рассчитанной величине q есть сумма

$$\delta q \approx \delta x + \ldots + \delta z + \delta u + \ldots + \delta w$$

всех исходных погрешностей.

Погрешность в произведениях и частных

Если несколько величин $x, \ldots, w$ измерены с малыми погрешностями $\delta x, \ldots, \delta w$ и измеренные значения используются для расчета

$$q = \frac{x \times \ldots \times z}{u \times \ldots \times w},$$

то относительная погрешность рассчитанной величины q равна сумме

$$\frac{\delta q}{|q|} \approx \frac{\delta x}{|x|} + \ldots + \frac{\delta z}{|z|} + \frac{\delta u}{|u|} + \ldots + \frac{\delta w}{|w|}$$

относительных погрешностей в $x, \ldots, w$.

Измеренная величина умножается на точное число

Если величина x измеряется с погрешностью δx и используется для вычисления произведения

$$q = Bx,$$

в котором B не имеет погрешности, то погрешность в q равна $|B|$, умноженному на погрешность в x:

$$\delta q = |B|\,\delta x.$$

Погрешность при возведении в степень

Если величина x измеряется с погрешностью δx и измеренное значение используется для вычисления степени этого числа

$$q = x^n,$$

то относительная погрешность в q в n раз больше относительной погрешности в x,

$$\frac{\delta q}{|q|} = n\frac{\delta x}{|x|}.$$

Погрешность в произвольной функции одной переменной

Если величина x измерена с погрешностью δx и используется для вычисления функции $q(x)$, то погрешность δq равна

$$\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|\delta x.$$

Погрешность в степенной функции

Если величина x измерена с погрешностью δx и используется для вычисления степенной функции $q = x^n$ (где n — фиксированное известное число), то относительная погрешность в q в $|n|$ раз больше, чем в x:

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n|\,\frac{\delta x}{|x|}.$$

Погрешность функции нескольких переменных

Предположим, что $x, \ldots, z$ измерены с погрешностями $\delta x, \ldots, \delta z$ и что измеренные значения используются для вычисления функции $q(x, \ldots, z)$. Если погрешности в $x, \ldots, z$ независимы и случайны, то погрешность в q равна

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\,\delta x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\,\delta z\right)^2}.$$

В любом случае она никогда не больше, чем обычная сумма

$$\delta q \leqslant \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\delta x + \ldots + \left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\delta z\,.$$

2.1 (разд 2.1). В гл. 1 плотннк представил результаты своего измерения высоты дверного проема в виде утвержения, что его наилучшая оценка высоты равна 210 см и что, по его убеждению, высота может составлять величину, лежащую где-то между 205 и 215 см. Перепишите этот результат в стандартной форме $x_{наил} \pm \delta x$. Проделайте то же для измерений, отраженных соотношениями (1.1) и (1.2) и (1.4).

***2.2** (разд. 2.2). Перепишите следующие ответы в наиболее наглядном виде с нужным числом значащих цифр:

а) измеренная высота $= 5{,}03 \pm 0{,}04329$ м;
б) измеренное время $= 19{,}5432 \pm 1$ с;
в) измеренный заряд $= -3{,}21 \cdot 10^{-19} \pm 2{,}67 \cdot 10^{-20}$ Кл;
г) измеренная длина волны $= 0{,}000000563 \pm 0{,}00000007$ м;
д) измеренный импульс $= 3{,}267 \cdot 10^3 \pm 42$ г·см/с.

***2.3** (разд. 2.3).

а. Студент измеряет плотность жидкости пять раз и получает результаты (в г/см³): 1,8; 2,0; 2,0; 1,9; 1,8. Что вы могли бы предположить о наилучшей оценке и погрешности, основываясь на его измерениях?

б. Ему сказали, что принятое значение равно 1,85 г/см³. Каково различие (между его наилучшей оценкой и принятым значеннем)? Считаеге ли вы его значимым?

2.4 (разд. 2.5). Время десяти оборотов диска проигрывателя измеряется путем фиксирования моментов времени начала и конца вращения при помощи второсортных ручных часов с последующим вычитанием одной величины из другой. Если время начала и время конца вращения имеют погрешность по ± 1 с, то какова погрешность времени десяти оборотов?

***2.5** (разд. 2.5). В эксперименте по проверке закона сохранения момента импульса студент получил для начального и конечного моментов импульса (L и L') вращающейся системы результаты, представленные в табл. 2.5. Добавьте к табл. 2 5 дополнительный столбец для разности $L - L'$ и ее погрешности. Согласуются ли результаты студента с законом сохранения момента импульса?

2.6 (разд. 2.5). Экспернментатор измеряет массы M и m автомобиля и прицепа. Он приводит свои результаты в стандартной форме $M_{наил} \pm \delta M$ и $m_{наил} \pm \delta m$. Какова будет его наилучшая оценка для полной массы $M + m$? Рассматривая наибольшее и наименьшее вероятные значения полной массы, покажите, что его оценка погрешности полной массы равна

Таблица 2.5. **Момент импульса (в кг·м²/с)**

Начальный L	Конечный L'	Начальный L	Конечный L'
$3{,}0 \pm 0{,}3$	$2{,}7 \pm 0{,}6$	25 ± 2	24 ± 2
$7{,}4 \pm 0{,}5$	$8{,}0 \pm 1$	32 ± 2	31 ± 2
$14{,}3 \pm 1$	$16{,}5 \pm 1$	37 ± 2	41 ± 2

Таблица 2.6. **Значения высоты и скорости**

h, м ($\pm 0{,}05$)	v^2, м²/с²	h, м ($\pm 0{,}05$)	v^2, м²/с²
0,4	7 ± 3	2,6	45 ± 5
0,8	17 ± 3	3,4	62 ± 5
1,4	25 ± 3	3,8	72 ± 6
2,0	38 ± 4		

сумме δM и δm. Приводите свои результаты последовательно и аргументированно, а не просто записывайте ответ.

2.7 (разд. 2.6). Используя данные задачи 2.5, постройте график зависимости конечного момента импульса L' от начального L для описанного там эксперимента. Нарисуйте вертикальные и горизонтальные черточки ошибок. (Как и при составлении всех графиков, отчетливо разметьте ваши оси, указывая названия величин и единицы измерения. Используйте соответствующую миллиметровую бумагу. Выберите масштаб таким образом, чтобы график заполнял разумную долю площади бумаги и включал начало координат)

На какую кривую, по-вашему, будут ложиться все точки? Лежат ли точки на ожидаемой кривой (с учетом экспериментальных погрешностей)?

***2.8** (разд. 2.7). Если камень бросить вверх со скоростью v, он должен подняться до высоты h, определяемой уравнением $v^2 = 2gh$. В частности, величина v^2 должна быть пропорциональна h. Чтобы проверить это, студент измеряет v^2 и h для семи различных бросков и получает результаты, приведенные в табл. 2.6.

а. Постройте график зависимости v^2 от h, включая вертикальные и горизонтальные черточки ошибок. (Как обычно, разметьте оси координат, используйте миллиметровую бумагу и разумно выберите масштаб.) Согласуется ли ваш график с предсказанием, что $v^2 \sim h$?

б. Наклон вашего графика должен быть равен $2g$. Чтобы найти наклон, проведите наилучшую, по вашему мнению, прямую через начало координат и все остальные точки и затем определите ее наклон. Чтобы найти погрешность в определении наклона, проведите наиболее крутую и наименее крутую прямые, которые еще разумно совпадают с точками. Наклоны этих прямых дадут наибольшее и наименьшее вероятные значения наклона. Согласуются ли ваши результаты с принятым значением $2g = 19{,}6$ м/с²?

***2.9** (разд. 2 6).

а. В эксперименте с математическим маятником студент решает проверить, действительно ли период T не зависит от амплитуды A (определенной как наибольший угол, на который отклоняется маятник от вертикали во время его колебаний). Он получает результаты, представленные в табл. 2.7. Постройте график зависимости T от A.

Таблица 2.7. **Амплитуда и период колебаний маятника**

Амплитуда A, град	Период T, с	Амплитуда A, град	Период T, с
5 ± 2	$1{,}932\pm 0{,}005$	40 ± 4	$2{,}01\pm 0{,}01$
17 ± 2	$1{,}94\pm 0{,}01$	53 ± 4	$2{,}04\pm 0{,}01$
25 ± 2	$1{,}96\pm 0{,}01$	67 ± 6	$2{,}12\pm 0{,}02$

Обратите внимание на выбор масштаба. Если почувствуете затруднения, постройте два графика: один, включающий начало координат $A = 0$, $T = 0$, и второй, на котором показаны только значения T между 1,9 и 2,2 с. Должен ли студент сделать вывод, что период не зависит от амплитуды?

б. Рассмотрите, как изменились бы результаты «а», если бы все измеренные значения T имели погрешность $\pm 0{,}3$ с.

2.10 (разд 2.7). Рассчитайте погрешности в процентах для пяти измерений, приведенных в задаче 2.2 (не забудьте округлить до разумного числа значащих цифр).

2.11 (разд. 2.7). С помощью деревянной линейки можно произвести отсчет с точностью до миллиметра, а с помощью измерительного микроскопа — до 0,1 мм. Предположим, вы хотите измерить длину 2 см с точностью 1 %. Можно ли это сделать с помощью деревянной линейки? А с помощью микроскопа?

***2.12** (разд. 2.7). Чтобы рассчитать ускорение тележки, студент измеряет ее начальную и конечную скорости v_i и v_f и вычисляет разность $(v_f - v_i)$. Его данные для двух независимых испытаний (в см/с) приведены в табл. 2 8. Все четыре результата измерения характеризуются погрешностью 1 %.

а. Вычислите абсолютные погрешности всех четырех измерений, найдите разность $(v_f - v_i)$ и ее погрешность для каждого испытания.

б. Вычислите погрешность в процентах для каждого из двух значений $(v_f - v_i)$. (Ваши ответы в этом задании, особенно в случае второго испытания, иллюстрируют отрицательные последствия методики измерения малых чисел с помощью разности двух гораздо больших чисел.)

2.13 (разд. 2.8).

а. Калькулятор студента показывает результат 123,123. Если студент решил, что это число в действительности имеет только три значащие цифры, оцените, каковы его абсолютная и относительная погрешности.

б. Сделайте то же для числа 0,123123.

в. Сделайте то же для числа 321,321.

г. Лежит ли относительная погрешность в интервале, ожидаемом для случая трех значащих цифр?

***2.14** (разд. 2 9).

а. Студент измеряет две величины a и b и получает $a = 11{,}5 \pm 0{,}2$ см и $b = 25{,}4 \pm 0{,}2$ см. Затем он вычисляет произведение $q = ab$. Получите его ответ и приведите абсолютное значение его погрешности, а также погрешность в процентах.

б. Повторите действия задания «а» для измерений $a = 10 \pm 1$ см и $b = 27{,}2 \pm 0{,}1$ с

в. Повторите задание «а» для $a = 0{,}8$ м ± 8 % и $b = 1{,}5$ кг ± 2 %.

***2.15** (разд. 2 9).

а. Студент измеряет два числа x и y и находит $x = 10 \pm 1$, $y = 20 \pm 1$. Какова его наилучшая оценка для произведения $q = xy$? Используя наибольшие вероятные значения для x и y (11 и 21), вычислите

Таблица 2.8. **Начальные и конечные скорости**

	v_i	v_f
Первое испытание	14,0	18,0
Второе испытание	19,0	19,6

наибольшее вероятное значение для q. Аналогично найдите наименьшее вероятное значение q и, следовательно, интервал, в котором, вероятно, лежит q. Сравните ваш результат с тем, что дает правило (2.27).

б. Сделайте то же для измерений $x = 10 \pm 8$, $y = 20 \pm 15$.

Напоминаем: правило (2.27) было получено в предположении, что относительные погрешности намного меньше единицы.

2.16 (разд. 2.9). Согласно известному правилу, при перемножении двух чисел результат будет более надежным, если его округлить до количества значащих цифр в наименее точном из двух исходных чисел.

а. Используя правило (2.27) и тот факт, что значащие цифры определяют относительную погрешность, докажите, что это «известное правило» *приближенно* верно. (Для определенности рассмотрите случай, когда наименее точное число имеет две значащие цифры.)

б Покажите на примере, что ответ в действительности несколько менее точен, чем дает «известное правило». (Это особенно справедливо при перемножении одинаковых чисел.)

Погрешность разности

Если величины x и y измерены с погрешностями δx и δy и если измеренные значения x и y используются для расчета разности $q = x - y$, то *погрешность в q есть сумма погрешностей в x и y*:

$$\delta q \approx \delta x + \delta y.$$

Погрешность в произведении

Если величины x и y измерены с малыми относительными погрешностями $\delta x / |x_{\text{наил}}|$ и $\delta y / |y_{\text{наил}}|$ и если измеренные величины x и y используются для вычисления произведения $q = xy$, то *относительная погрешность q равна сумме относительных погрешностей x и y*:

$$\frac{\delta q}{|q_{\text{наил}}|} \approx \frac{\delta x}{|x_{\text{наил}}|} + \frac{\delta y}{|y_{\text{наил}}|}.$$

***3.1** (разд. 3.1). Двум студентам предложили измерить скорость эмиссии α-частиц из некоторого радиоактивного образца. Студент А считал в течение двух минут и насчитал 32 α-частицы; студент Б считал в течение часа и насчитал 786 α-частиц. (Образец распадается настолько медленно, что ожидаемую скорость эмиссии можно считать постоянной за время измерений.)

а. Используйте формулу (3.2) для вычисления погрешности в результате студента А, равном 32 частицам, испущенным за две минуты.

б. Какова погрешность результата студента Б, составляющего 786 частиц, испущенных за один час?

в. Каждый студент делит свое число отсчетов на число минут, чтобы найти *скорость* распада, т. е. число распадов в минуту. Каковы их результаты и погрешности? (Хотя погрешность в общем числе отсчетов студента Б больше, чем у студента А, погрешность в скорости, полученная студентом Б, намного меньше, чем у студента А, т. е., делая отсчеты в течение более длительного времени, можно получить более точный результат для темпа отсчетов, как можно было ожидать.)

3.2 (разд. 3.2). Студент получил следующие результаты измерения:

$$a = 5 \pm 1 \text{ см};$$
$$b = 18 \pm 2 \text{ см};$$
$$c = 12 \pm 1 \text{ см};$$
$$t = 3{,}0 \pm 0{,}5 \text{ с};$$
$$m = 18 \pm 1 \text{ г}.$$

Используя правила (3.4) и (3.8), вычислите следующие величины, их погрешности и относительные погрешности в процентах: $a + b + c$; $a + b - c$; ct; $4a$; $b/2$ (где цифры 4 и 2 не содержат погрешности) и mb/t.

***3.3** (разд. 3.2). Используя правила (3.4) и (3 8), вычислите следующие выражения:

а) $(5 \pm 1) + (8 \pm 2) - (10 \pm 4)$;
б) $(5 \pm 1) \times (8 \pm 2)$;
в) $(10 \pm 1)/(20 \pm 2)$;
г) $2\pi(10 \pm 1)$.

Числа 2 и π (см. п. г) не содержат погрешности.

***3.4** (разд. 3.2). С помощью хорошего секундомера после некоторой практики можно измерять времена примерно от одной секунды до многих минут с погрешностью порядка 0,1 с. Предположим, что мы хотим найти период τ маятника, который приблизительно равен 0,5 с. Если измерить время одного колебания, то погрешность составит около 20 %, но, измеряя время нескольких последовательных колебаний, мы можем добиться лучшего, как показывают следующие вопросы.

а. Если мы измеряем время пяти последовательных колебаний и получаем $2{,}4 \pm 0{,}1$ с, то каков будет наш результат для τ, его абсолютной и процентной погрешности? [Помните правило (3.9).]

б. Каков будет ответ на вопросы п. «а», если измерено время 20 колебаний и получено $9{,}4 \pm 0{,}1$ с?

в. Может ли быть бесконечно улучшена точность измерения τ, если измерять время все большего числа периодов?

3.5 (разд. 3.2). Если для t найдено, что $t = 8{,}0 \pm 0{,}5$ с, то каковы значения и погрешности t^2, $1/t$ и $1/t^3$?

***3.6** (разд. 3.2). Посетитель средневекового замка решает определить глубину колодца, измеряя время падения брошенного в него камня. Он определяет, что время падения равно $t = 3{,}0 \pm 0{,}5$ с. Какой вывод он сделает о глубине колодца?

3.7 (разд. 3.2). Согласно биномиальной теореме, для любого числа n и любого x, удовлетворяющего условию $|x| < 1$, имеет место разложение

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots.$$

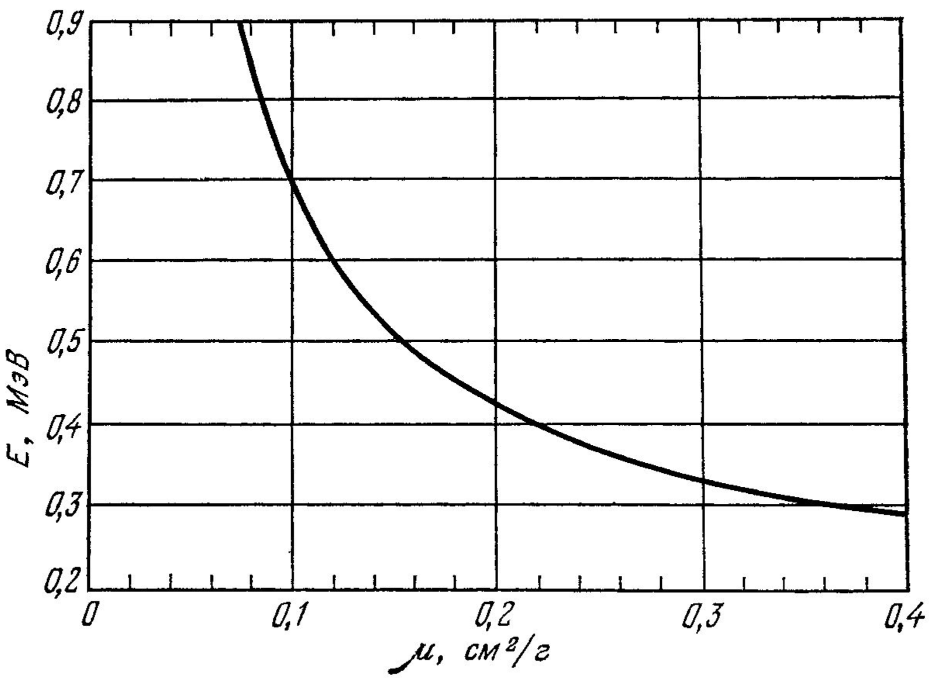


Рис. 3.7. Зависимость энергии E от коэффициента поглощения μ фотонов в свинце.

а. Покажите, что если n — целое положительное число, то этот бесконечный ряд обрывается (т.е. содержит только конечное число членов). Напишите его явное выражение для случаев $n = 2$ и $n = 3$.

б. Напишите биномиальный ряд для случая $n = -1$. Это приведет к бесконечному ряду для $1/(1+x)$; когда величина x мала, два первых члена этого бесконечного ряда дают хорошее приближение

$$1/(1+x) \approx 1 - x,$$

как уже упоминалось при записи (3.6). Вычислите значения этих двух выражений для каждого из значений $x = 0{,}5$; $0{,}1$; $0{,}01$ и в каждом случае рассчитайте процентную погрешность, на которую приближение $1 - x$ отличается от точного значения $1/(1+x)$.

***3.8** (разд. 3.3). Студент измеряет четыре длины: $a = 50 \pm 5$, $b = 30 \pm 3$, $c = 40 \pm 1$, $d = 7{,}8 \pm 0{,}3$ (все в сантиметрах) и вычисляет три суммы $a + b$, $a + c$, $a + d$. Найдите погрешности для этих сумм в случае, когда исходные погрешности могут *не* быть независимыми [«ошибки складываются», как в (3.14)], а также когда известно, что эти ошибки независимы и случайны [«ошибки складываются квадратично», как в (3.13)]. Предполагая, что погрешности надо знать только с одной значащей цифрой, в каком случае из трех погрешность во втором слагаемом (т. е. в b, c или d) можно полностью игнорировать?

3.9 (разд. 3.4). Решите снова задачу 3.2, предполагая, что все погрешности независимы и случайны, т. е. используя квадратичное сложение, как в правилах (3.16) и (3.18) расчета ошибок для косвенных измерений [1]).

---

[1]) Квадратичное сложение часто можно выполнить в уме с достаточной точностью. Если вы используете калькулятор, то заметьте, что при переходе от прямоугольных к полярным координатам автоматически вычисляется величина $\sqrt{x^2 + y^2}$ для любых данных x и y.

***3.10** (разд. 3 5) В ядерной физике энергия субатомных частиц может быть измерена разными способами. Один из них состоит в измерении поглощения частиц в веществе, например таком, как свинец, и последующем сравнении с известными графиками зависимости энергии от скорости поглощения. На рис 3.7 изображен такой график для фотонов (частиц света) в свинце. По оси ординат отложена энергия фотонов E в МэВ (миллионах электронвольт), а по оси абсцисс — соответствующий коэффициент поглощения μ в см^2/г. (Точное определение этого коэффициента не должно нас сейчас беспокоить; μ есть просто подходящая мера скорости поглощения фотонов в свинце) Из этого графика легко найти энергию E фотона, если известен его коэффициент поглощения μ.

а. Студент производит опыты с пучком фотонов(одинаковой энергии) и находит, что в свинце их коэффициент поглощения равен $\mu = 0{,}10 \pm 0{,}01$ см^2/г. Найдите по графику энергию фотонов E и ее погрешность δE (Может быть, вы сочтете полезным представить на графике линии, соединяющие разные точки, представляющие интерес, как было сделано на рис. 3.3).

б. Какой вывод сделал бы студент, если бы получил $\mu = 0{,}22 \pm 0{,}01$ см^2/г?

***3.11** (разд. 3 5)

а. Угол θ измерен как 125 ± 2 град, и это значение используется для вычисления $\sin\theta$. Используя правило (3.23), рассчитайте $\sin\theta$ и его погрешность.

б. Если величина a измерена как $a_{\text{наил}} \pm \delta a$ и это значение используется для вычисления $f(a) = e^a$, то каковы $f_{\text{наил}}$ и δf? Если $a = 3{,}0 \pm 0{,}1$, то чему равны e^a и ее погрешность?

в. Повторите все задание «б» для функции $f(a) = \ln a$.

3.12 (разд. 3.6). Вычислите значения следующих выражений методом «шаг за шагом», как описано в разд. 3 6 (Предположите, что все ошибки независимы и случайны)

а. $(12 \pm 1) \times [(25 \pm 3) - (10 \pm 1)]$,

б. $\sqrt{16 \pm 4} + (3{,}0 \pm 0{,}1)^3\,(2{,}0 \pm 0{,}1)$,

в. $(20 \pm 2)\,e^{-(1{,}0 \pm 0{,}1)}$.

3.13 (разд. 3.7). Продолжите рассмотрение задачи о математическом маятнике из разд 3.7. В условиях реального эксперимента необходимо измерять период T для разных значений длин l, и поэтому получатся разные значения g, которые можно сравнивать. Немного подумав, можно представить все данные и результаты расчетов в виде одной удобной таблицы типа табл 3.2 Используя табл. 3.2 (или другую запись, которая вам понравится), вычислите величину g и ее погрешность δg для приведенных четырех пар данных. Объясните изменения δg с уменьшением l. (Результаты, представленные в первой строке, позволят проверить ваш метод расчета.)

***3.14** (разд. 3.7). Продолжите рассмотрение задачи об измерении показателя преломления стекла из разд. 3.7. Используя таблицу, подобную 3.1, вычислите показатель преломления n и его относительную погрешность для данных из табл. 3.3. Объясните изменение погрешности. (Все углы измерены в градусах; i — угол падения, r — угол преломления.)

Таблица 3.2. **Определение величины g с помощью маятника**

l, см ($\pm 0{,}1$)	T, с ($\pm 0{,}001$)	g, см/с^2	$\delta l/l$, %	$\delta T/T$, %	$\delta g/g$, %	Результат $g \pm \delta g$
93,8	1,944	980	0,1	0,05	0,14	980±1,4
70,3	1,681					
45,7	1,358					
21,2	0,922					

Таблица 3.3. **Данные для определения показателя преломления (в градусах)**

i (± 1)	10	20	30	50	70
r (± 1)	6	13	19	29	38

3.15 (разд. 3.8). Продолжите рассмотрение эксперимента из разд. 3.8, в котором тележка скатывается вниз по наклонной плоскости с углом наклона θ.

а. Если колеса у тележки гладкие и легкие, то ожидаемое ускорение равно $g \sin\theta$. Если угол θ измерен как $\theta = 5{,}4 \pm 0{,}1$ град, то каковы ожидаемое ускорение и его погрешность?

б. Если эксперимент повторяется для разных начальных толчков, сообщаемых тележке на вершине склона, то, как обычно, данные и все расчеты удобно поместить в одну таблицу, как показано в табл. 3.4. Используя формулу (3.33) для ускорения (и то же значение $l^2/2s = 0{,}125$ см ± 2 %, как прежде), вычислите a и δa для приведенных там данных. Находятся ли результаты в согласии с ожидаемым постоянством величины a и с ожидаемым значением $g \sin\theta$, вычисленным в задании «а»? Следует ли толкать тележку сильнее, чтобы проверять постоянство величины a при еще больших скоростях? Объясните.

***3.16** (разд. 3.9). Частная производная $\partial q/\partial x$ от $q(x, y)$ получается дифференцированием функции q по x, когда y считается постоянным. Найдите частные производные $\partial q/\partial x$ и $\partial q/\partial y$ для трех функций:

а) $q(x, y) = x + y$,

б) $q(x, y) = xy$,

в) $q(x, y) = x^2 y^3$.

*3.17 (разд. 3.9). Основное приближение, использованное в разд 3.9, связывает значение функции q в точке $(x+u,\ y+v)$ с аналогичной величиной в соседней точке $(x,\ y)$

$$q(x+u,\ y+v) \approx q(x,\ y) + \frac{\partial q}{\partial x} u + \frac{\partial q}{\partial y} v \qquad (3.49)$$

для случая, когда u и v малы. Проверьте в явном виде, что для трех функций из задачи 3.16 это — хорошее приближение, т. е. для каждой из

Таблица 3.4. **Эксперимент по определению ускорения** [1]

t_1, с (± 0,001)	t_2, с (± 0,001)	$\frac{1}{t_1^2}$	$\frac{1}{t_2^2}$	$\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}$	a, см/с^2
0,054±2%	0,031±3%	343±14	1040±62	698±64	87±8
0,038	0,027				
0,025	0,020				

[1]) Первая строка данных уже была использована в разд. 3.8. Два первых столбца содержат измеренные времена t_1 и t_2. Погрешность во всех значениях времени равна 0,001 с; для каждого значения времени ее можно выразить как процентную погрешность.

этих трех функций запишите точные выражения для обеих частей равенства (3.49) и покажите, что они приблизительно равны, когда u и v малы. Например, если $q(x, y) = xy$, то левая часть равенства (3.49) равна

$$(x+u)(y+v) = xy + uy + xv + uv.$$

Как вы покажете, правая часть (3.49) есть

$$xy + yu + xv.$$

Если u и v малы, то величиной uv в первом выражении можно пренебречь и тогда два выражения будут приближенно равны.

3.18 (разд. 3.9).

а. Для функции $q(x, y) = xy$ запишите частные производные $\partial q/\partial x$ и $\partial q/\partial y$. Предположим, что мы измеряем x и y с погрешностями δx и δy и затем вычисляем $q(x\ y)$. Используя общие правила (3.47) и (3.48), найдите погрешность δq для двух случаев, когда δx и δy независимы и случайны и когда это не так. Разделите левую и правую части этих выражений для δq на $|q| = |xy|$ и покажите, что вы получаете простые правила (3.18) и (3.19) для относительной погрешности произведения.

б. Выполните задание «а» для функции $q(x, y) = x^n y^m$, где n и m — известные фиксированные числа.

в. Какой вид примут формулы (3.47) и (3.48) в случае, когда $q(x)$ зависит только от одной переменной?

***3.19** (разд. 3.9). Если мы измеряем три независимые величины x, y, z и затем вычисляем функцию, подобную $q = (x+y)/(x+z)$, то, как мы уже указывали в начале разд. 3.9, расчеты погрешности в q методом «шаг за шагом» могут дать ее завышенное значение.

а. Рассмотрите случай, когда измеренные величины равны $x = 20 \pm 1$, $y = 2$; $z = 0$, и для простоты предположите, что δy и δz пренебрежимо малы. Вычислите погрешность δq строго, используя общее правило (3.47), и сравните полученный результат с тем, который вы получили бы, если бы рассчитывали δq методом «шаг за шагом».

б. Сделайте то же для значений $x = 20 \pm 1$; $y = -40$; $z = 0$. Объясните разницу в результатах для заданий «а» и «б».