

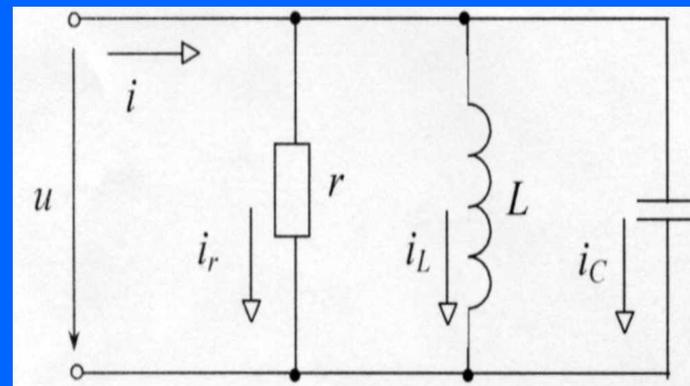
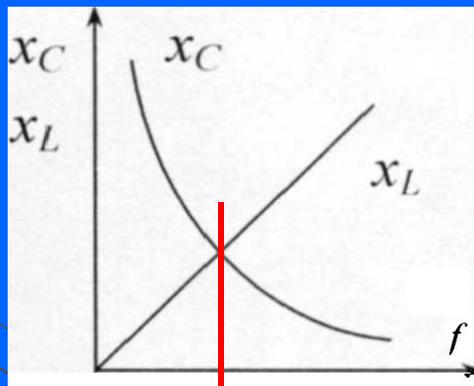
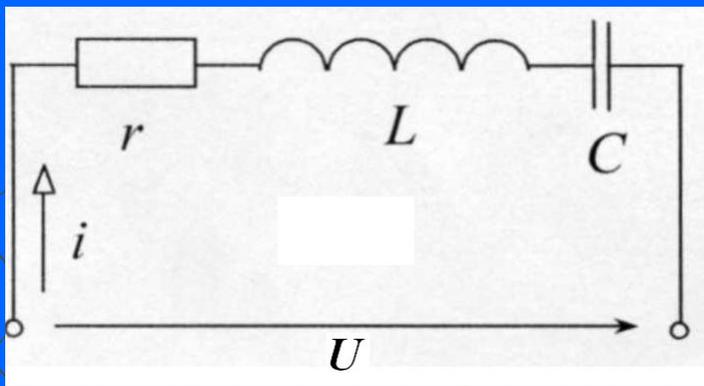
*Иркутский филиал*  
**Московского государственного технического  
университета гражданской авиации**



Количество пассажиров – до 330  
Дальность – до 15 699 км  
Длина – 68.9 м  
Высота – 16.5 м  
Диаметр фюзеляжа – 5.77 м  
Запас топлива – 145 000 л

**Boeing 787**  
*Dreamliner*

Первый полет в декабре 2009 г.,  
Заказано 868 шт., стоимость  
свыше 200 млн. \$



$$Z = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Y = \frac{1}{r} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C$$

$$U_{Lp} = U \cdot \Theta,$$

$$I_{Lp} = I \cdot \Theta,$$

$$I_{Cp} = I \cdot \Theta,$$

$$U_{Cp} = U \cdot \Theta$$

$$I_{Lp} = -I_{Cp}$$

# Тема 2. Анализ переходных процессов классическим методом

Лекция 3 (2 часа)

## Изучаемые вопросы:

- 3.1. Законы коммутации
- 3.2. Начальные условия, порядок определения независимых и зависимых начальных условий
- 3.3. Принужденные (установившиеся) и свободные составляющие переходного процесса
- 3.4. Классический метод анализа переходных процессов в цепях с одним реактивным элементом.  
Постоянная времени цепи

---

Лектор – к.ф.м.н., доцент Кобзарь В.А.

## 3.1. Законы коммутации

**Переходным процессом** называется электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи при переходе ее от одного установившегося режима к другому. Переходные процессы возникают только в тех цепях, где имеются накопители энергии: конденсаторы и катушки индуктивности. Переходные процессы появляются в результате **коммутаций**.

$$W_{\text{Э}} = C \frac{u_C^2}{2},$$

$$W_{\text{М}} = L \frac{i_L^2}{2}$$

**Коммутация** - это включения, отключения, переключения, мгновенное изменение параметров и т.д.

### **Первый закон коммутации**

В ветви с индуктивной катушкой ток и магнитный поток в момент коммутации не могут измениться скачком, а сохраняют те значения, которые они имели перед коммутацией, и дальше начинают изменяться с этих значений.

$t = 0$  - момент времени, в который происходит коммутация,

$t = 0_-$  - момент времени непосредственно перед коммутацией,

$t = 0_+$  - момент времени после коммутации.

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+)$$

## *Второй закон коммутации*

В ветви с конденсатором напряжения и заряд на нем не могут изменяться скачком в момент коммутации, а сохраняют те значения, которые имели до коммутации и изменяются в этих значениях

$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+)$$

Переходные процессы описываются при помощи интегро-дифференциальных уравнений. Для их решения используются следующие методы:

- классический;
- операторный;
- суперпозиционный с помощью интеграла Дюамеля.

При этом для интегрирования уравнений необходимо знать начальные условия.

Метод «классический» отражает использование в нем решений дифференциальных уравнений с постоянными параметрами методами классической математики. Данный метод обладает физической наглядностью и удобен для расчета простых цепей.

**Этапы расчета переходного процесса в цепи классическим методом:**

1. Найти независимые начальные условия, то есть, напряжения на ёмкостях и токи на индуктивностях в момент начала переходного процесса.
2. Составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, электромагнитной индукции и т.д., описывающих состояние цепи после коммутации. Для простых цепей получается дифференциальное уравнение первого или второго порядка, в котором в качестве искомой величины выбирают либо ток в индуктивном элементе, либо напряжение на емкостном элементе.
3. Составить общее решение неоднородного дифференциального уравнения цепи в виде суммы частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения.
4. В общем решении найти постоянные интегрирования из начальных условий, т. е. условий в цепи в начальный момент времени после коммутации.

**Операторный метод** — это метод расчёта переходных процессов в электрических цепях, основанный на переносе расчёта переходного процесса из области функций действительной переменной (времени  $t$ ) в область функций комплексного переменного (либо операторной переменной), в которой дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические.

Преобразование функций действительного переменного в операторную функцию производится с помощью методов операционного исчисления.

### **Последовательность расчёта операторным методом:**

1. Определяются независимые начальные условия.
2. Вычерчивается операторная схема замещения, при этом электрические сопротивления заменяются эквивалентными операторными сопротивлениями, источники тока и источники ЭДС заменяются соответствующими операторными ЭДС, при этом следует учесть, что на месте реактивных сопротивлений помимо операторных сопротивлений появляются дополнительные операторные ЭДС.
3. Находятся операторные функции токов и напряжений в цепи одним из методов расчёта электрической цепи с помощью решения обыкновенных алгебраических уравнений и их систем.
4. Производится преобразование найденных операторных функций токов и напряжений в функцию действительного переменного с помощью методов операционного исчисления.

*Операторный метод позволяет производить расчёт сложных схем менее трудоёмко, чем классический метод.*

## 3.2. Начальные условия, порядок определения независимых и зависимых начальных условий

Начальные условия - это значения токов и напряжений при  $t = 0$ , т.е. в момент коммутации.

Следует различать **независимые и зависимые** начальные условия. Значение тока в катушке  $i_L(0)$  и напряжение на конденсаторе  $u_C(0)$  в момент коммутации называют **независимыми начальными условиями (Н.Н.У. при  $t = 0$ )**. Они определяются из законов коммутации, т.е. из до коммутационных установившихся режимов.

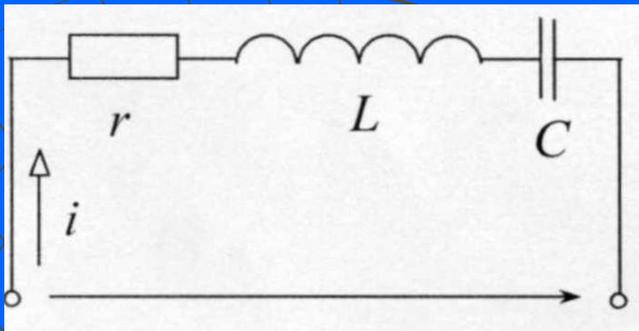
Значения всех остальных токов и напряжений в начальный момент времени, т.е. при  $t = 0$ , называют **зависимыми начальными условиями (З.Н.У. при  $t = 0$ )**.

Их определяют по ранее найденным значениям независимых начальных условий из законов Кирхгофа, составленных для после коммутационных режимов).

Если к началу переходного процесса все токи и напряжения на пассивных элементах схемы равны нулю, в схеме имеют место **нулевые начальные условия**.

$$\left. \begin{array}{l} i_L(0_-) = i_L(0) \\ u_C(0_-) = u_C(0) \end{array} \right\}$$

### 3.3. Принужденные (установившиеся) и свободные составляющие переходного процесса



$$i \cdot r + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t) \quad \text{после дифференцирования}$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

Известно, что общий интеграл такого уравнения равен сумме частного решения и общего решения неоднородного уравнения

Частное решение выражает установившийся режим, задаваемый источником, а общее решение определяет поведение цепи при отсутствии внешних источников электрической энергии (свободные составляющие токов и напряжений).

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0, \quad \text{соответствующее}$$

характеристическое уравнение

$$Lp^2 + rp + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow i_{cb}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Физически это означает, что приложенное напряжение к цепи равно нулю. Ток в такой цепи поддерживается за счет запасов энергии в катушке индуктивности и конденсаторе, так как эти запасы ограничены, а в цепи всегда присутствует сопротивление, на котором происходит рассеяние энергии, то с течением времени этот ток становится равным нулю.

Полный переходный ток в цепи равен сумме установившегося тока и свободного

$$i(t) = i_{уст}(t) + i_{CB}(t)$$

## 3.4. Анализ переходных процессов в цепях с одним реактивным элементом классическим методом.

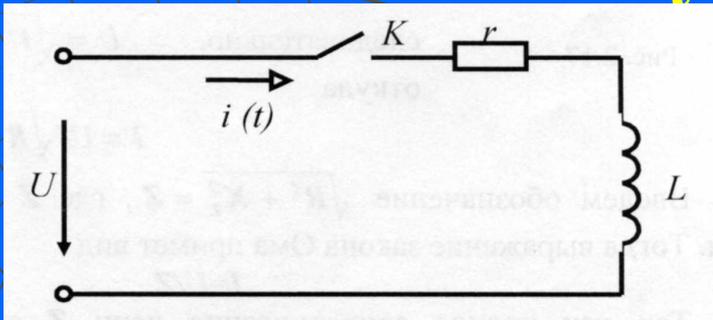
### Постоянная времени цепи

Исследование переходных процессов в линейных цепях ведется с помощью линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. *Классический метод*, заключающийся в непосредственном интегрировании интегро-дифференциальных уравнений состоит из этапов:

- Составляется система уравнений для схемы после коммутации на основании первого и второго законов Кирхгофа.
- Выполняется решение уравнений относительно одной переменной (целесообразно переменную выбрать так, чтобы остальные переменные определялись через нее последовательным дифференцированием, а не интегрированием).

Из курса математики известно, что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения

# 3.4.1. Переходный процесс в активно-индуктивной цепи



$$i(t) = i_{\text{уст}}(t) + i_{\text{св}}(t) \quad (1)$$

$$i_{\text{уст}}(t) = \frac{U}{r}, \quad (2)$$

$i_{\text{св}}(t) = A e^{pt}$ , где  $A$  – постоянная интегрирования,  $p$  – корень характеристического уравнения

$$u_r(t) + u_L(t) = U \quad \text{или}$$

$$r \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} = U \quad (3), \quad \frac{d}{dt} \approx p$$

$Lp + r = 0$  характеристическое уравнение

$$\Rightarrow p = -\frac{r}{L}, \quad \text{обозначим} \quad \frac{L}{r} = \tau$$

Уравнение (3) описывает переходный процесс, возникающий в цепи  $r, L$  в результате замыкания рубильника  $K$ .  
Решение уравнения запишем в виде

$$i_{\text{св}}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

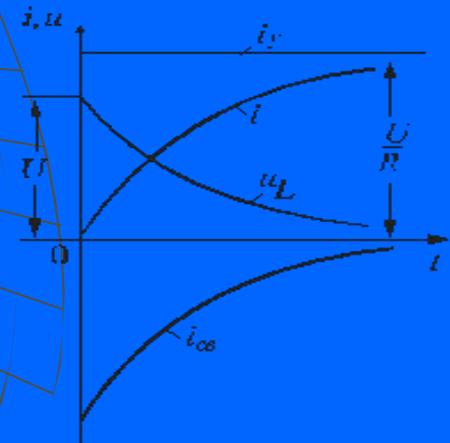
$\tau$  – постоянная времени цепи, характеризует время уменьшения начального значения свободной составляющей процесса в 2.72 раза. Полагают, что за  $(3-5)\tau$ -переходный процесс заканчивается.

$$i(t) = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{r} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = I_{\text{уст}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

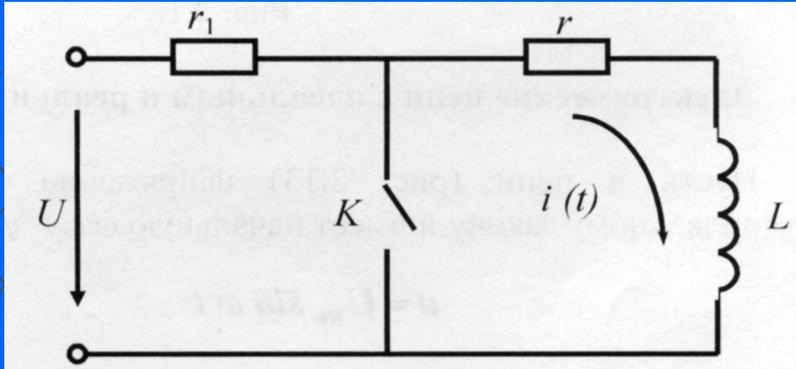
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = U (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Во время переходного процесса накапливается энергия магнитного поля в индуктивной катушке и тепловые потери в резисторе



## 3.4.2. Короткое замыкание цепи $r, L$



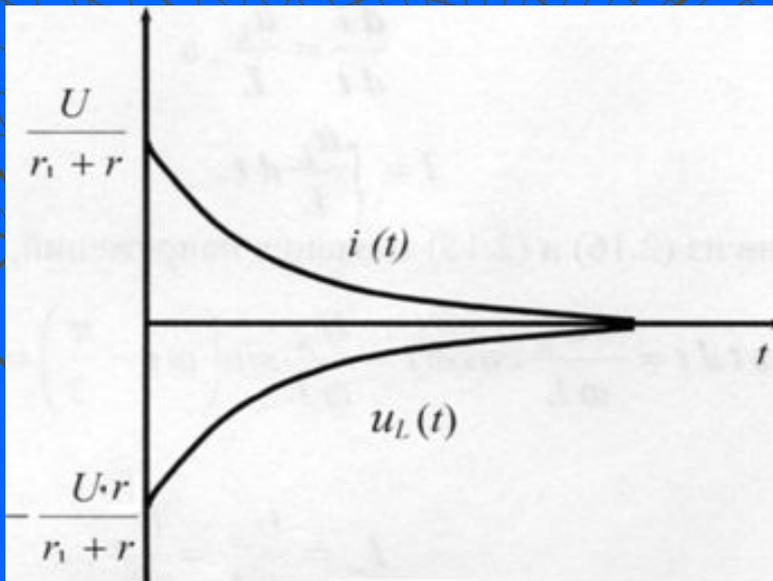
В контуре  $r, L$  начнется переходный процесс, который можно описать дифференциальным уравнением

$$r \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} = 0, \text{ ищем решение}$$

$$i(t) = i_{\text{уст}}(t) + A \cdot e^{-\frac{r}{L}t},$$

умнож  $i(t) = \frac{U}{r_1 + r} \cdot e^{-\frac{r}{L}t},$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{U \cdot r}{r_1 + r} \cdot e^{-\frac{r}{L}t}$$

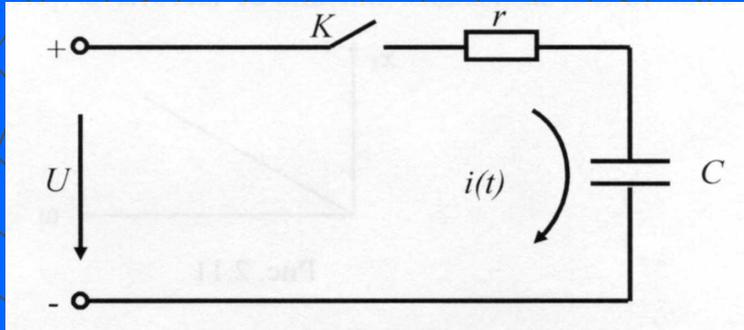


Во время переходного процесса (при коротком замыкании) вся энергия магнитного поля в катушке переходит в тепло на резисторе  $r$

### 3.4.3. Переходный процесс в активно-емкостной цепи. Заряд конденсатора

Пусть конденсатор до включения не был заряжен, т.е.  $u_c(0) = 0$ . После коммутации уравнение второго закона Кирхгофа для контура имеет вид:

$$u_r(t) + u_c(t) = U$$



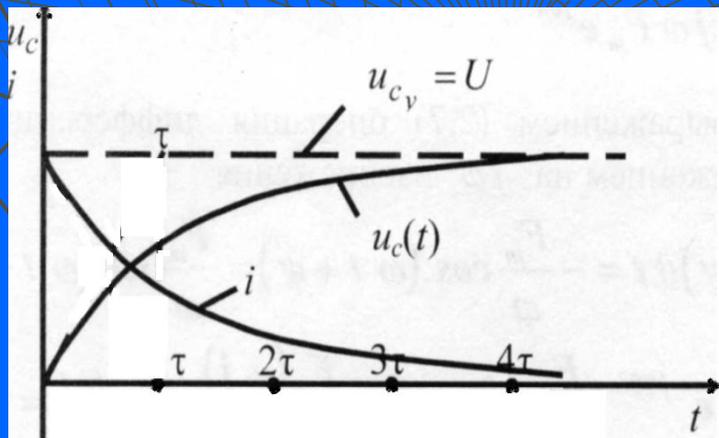
$$r \cdot C \frac{du}{dt} + u_c(t) = U, \text{ или } \tau \frac{du}{dt} + u_c(t) = U$$

$$u_c(t) = u_{c_{\text{уст}}} + u_{c_{\text{св}}}(t),$$

$$u_c(t) = U - U e^{-\frac{t}{\tau}} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

$$i_c(t) = C \frac{du_c}{dt} = -\frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} = I e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = U e^{-\frac{t}{\tau}}$$

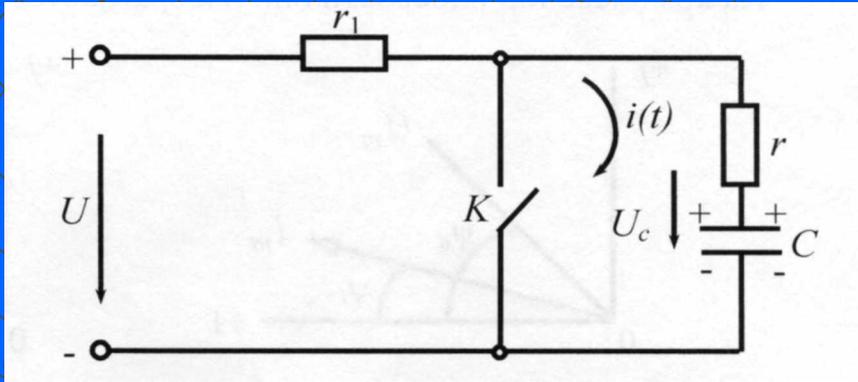


Напряжение на зажимах  $C$  и его заряд нарастают по тому же закону, что и ток в цепи  $r, L$  при включении ее под постоянное напряжение.

Ток же при включении сразу получает значение  $U/r$ , т.к. момент  $t=0$  напряжение на зажимах конденсатора равно нулю, и ток в цепи определяется лишь напряжением  $U$  и сопротивлением  $r$ . В дальнейшем напряжение  $u_c$  постепенно возрастает, и ток в цепи убывает по экспоненциальному закону

## 3.4.4. Разряд конденсатора

Предположим, что конденсатор был заряжен от источника постоянного напряжения. В цепи в установившемся режиме до замыкания ключа  $K$  ток не протекает, и напряжение на конденсаторе равно напряжению источника  $U$ .



Пусть в какой-то момент времени замыкается ключ  $K$ , электрическая связь между контуром источника и контуром  $r$ ,  $C$  теряется и в последнем начнется переходный процесс, т.е. конденсатор будет разряжаться на сопротивление  $r$

$$u_r(t) + u_C(t) = 0 \quad \text{где}$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t), \quad i_C(t) = C \frac{du_C}{dt},$$

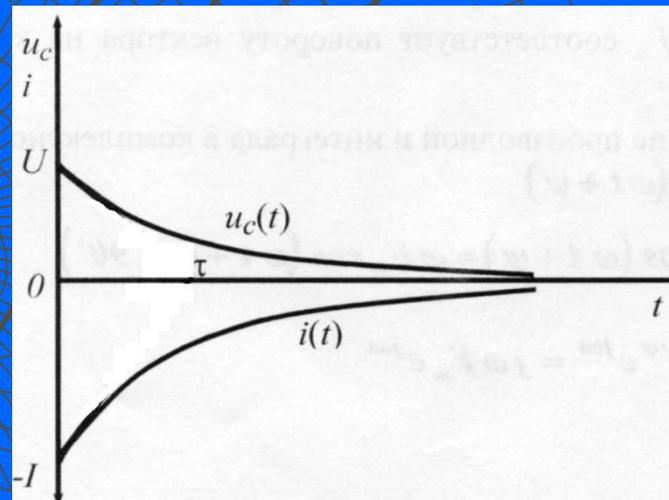
$$\text{учитывая } \tau = r \cdot C,$$

$$\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\text{и тогда } u_C(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = -I e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Электрические процессы при разряде конденсатора заключаются в том, что энергия электрического поля за время переходного процесса

преобразуется в тепло на активном сопротивлении

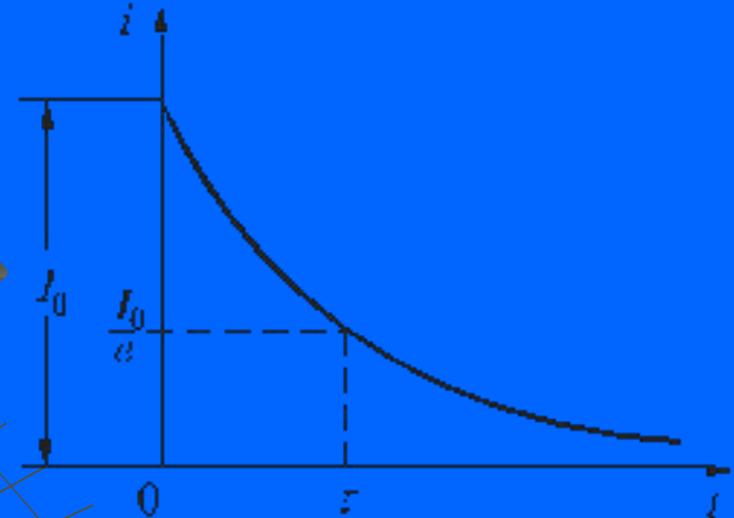
## 3.4.5. Постоянная времени цепи

Постоянная времени  $\tau$  – это время, в течение которого свободная составляющая процесса уменьшается в  $e = 2,72$  раза по сравнению с начальным значением

Постоянная времени  $\tau$  определяет время переходного процесса  $t_{ин}$ :

$\tau_{ин} = (3...5)\tau$ . Постоянная времени  $\tau$  находится по формулам:

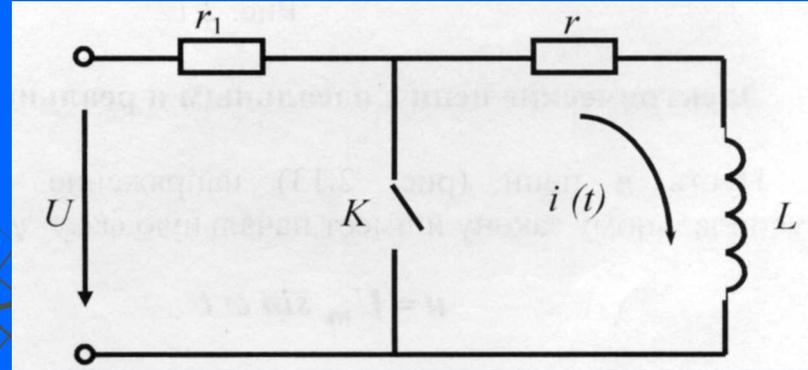
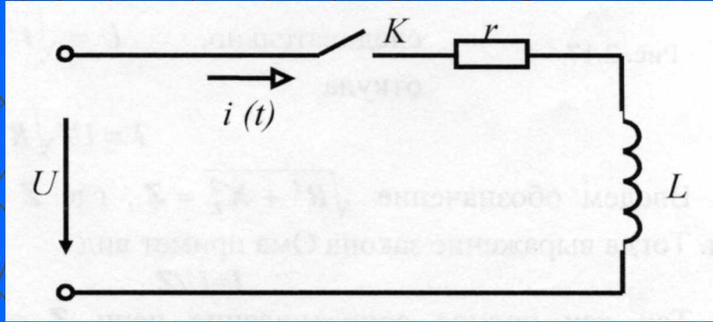
$$\tau = r \cdot C \quad \text{или} \quad \tau = L/r$$



**Пример:** если конденсатор с емкостью  $C = 100$  мкФ разряжается через сопротивление  $r = 100$  Ом, то  $\tau = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 0.01$  с

Если тот же конденсатор оставить заряженным и отключенным от остальной цепи, то он будет медленно разряжаться через свое сопротивление утечки. Пусть это сопротивление составляет  $10^8$  Ом. Тогда  $\tau = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 10^8 = 104$  с = 27,8 час, т.е. конденсатор с такой хорошей изоляцией сохранит через сутки примерно одну треть своего начального заряда

$$i(t) = i_{ycm}(t) + i_{CB}(t)$$



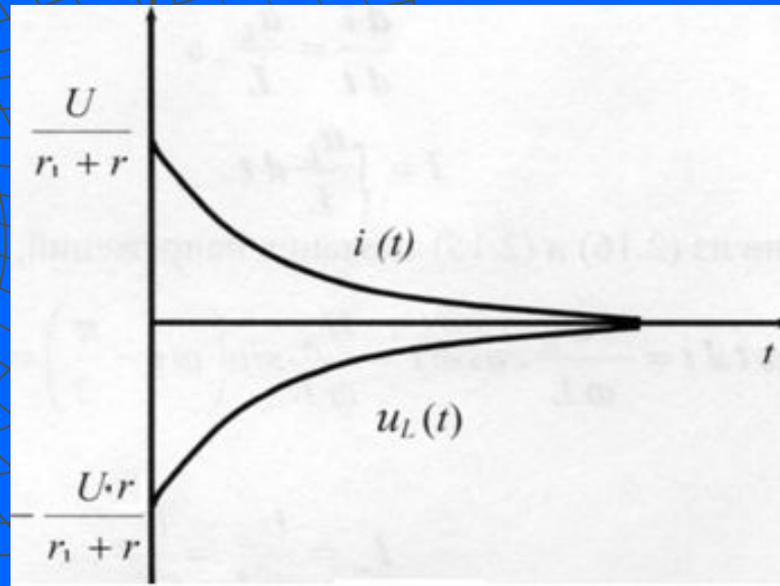
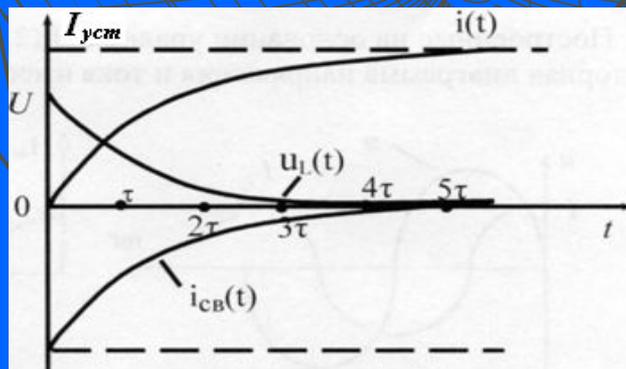
$$i(t) = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} \cdot \frac{r}{L} = \frac{U}{r} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) = I(1 - \frac{t}{\tau}),$$

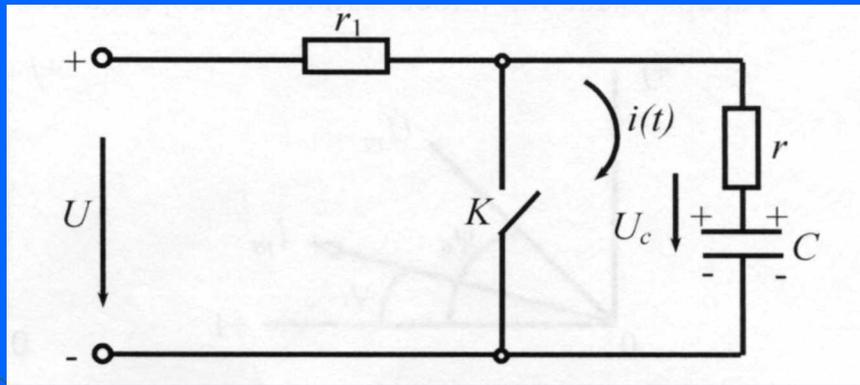
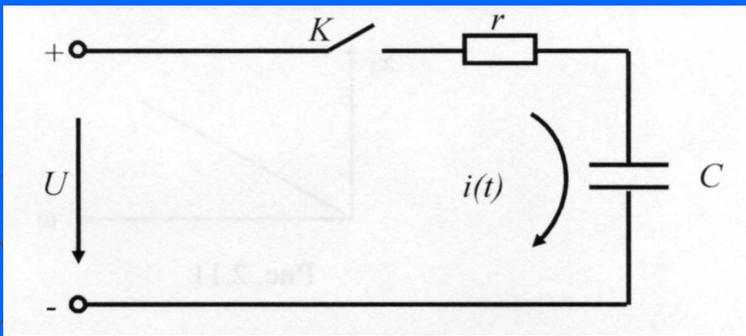
$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U \frac{t}{\tau},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = U(1 - \frac{t}{\tau})$$

$$i(t) = \frac{U}{r_1 + r} \cdot e^{-\frac{r}{L}t},$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{U \cdot r}{r_1 + r} \cdot e^{-\frac{r}{L}t}$$





$$u_C(t) = U - U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

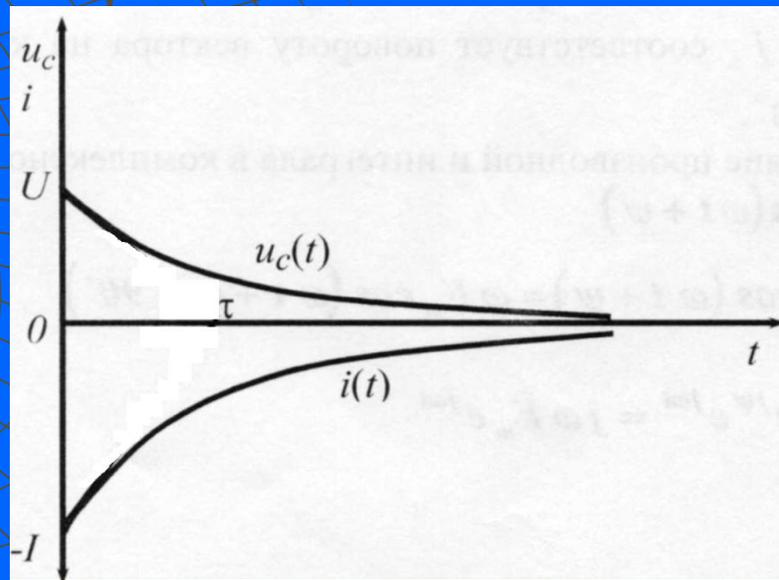
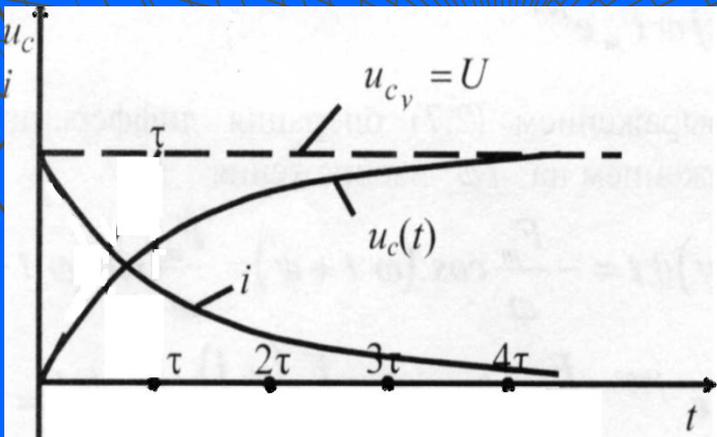
$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} = I e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = U e^{-\frac{t}{\tau}}$$

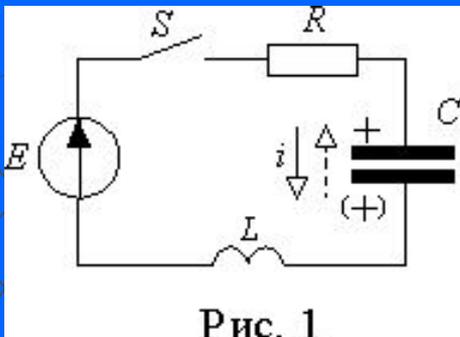
$$u_C(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = -I e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



# Переходные процессы в R-L-C цепи



Уравнение Кирхгофа для этой цепи после замыкания ключа S

$$u_L + u_R + u_C = e$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e$$

Возьмем производную по времени от обеих частей уравнения

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения,

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow p^2 + \delta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

Где

$$\delta = \frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}} = \frac{R}{\rho}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

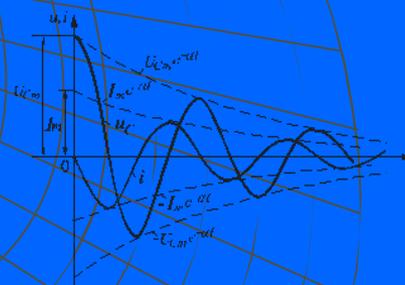
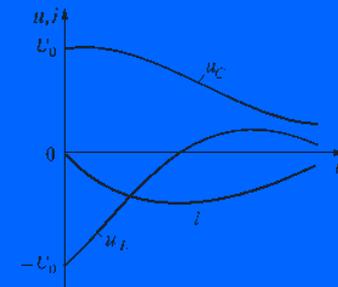
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

--- угловая частота, на которой в цепи рис. 1 возникает резонанс

Корнями этого характеристического уравнения являются

$$p_{1,2} = \omega_0 \left( \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4}}{2} \right)$$

корни характеристического уравнения являются функцией **затухания**  $\delta$  и **резонансной частоты**  $\omega_0$ , значения которых, в свою очередь, определяются параметрами цепи  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Они определяют характер изменения токов и напряжений в цепи (апериодический или периодическое затухание)



## Содержание отчета.

В отчете по лабораторной работе отразить:

- тему и цель лабораторной работы;
- схему электрической цепи с обозначенными на ней контурами, узлами, направлениями обходов и т.д.;
- результаты расчета токов в ветвях с необходимыми математическими преобразованиями;
- результаты измерений токов в ветвях;
- выводы по работе.