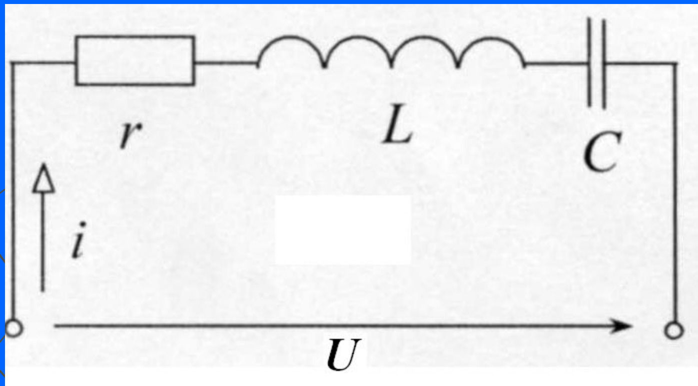
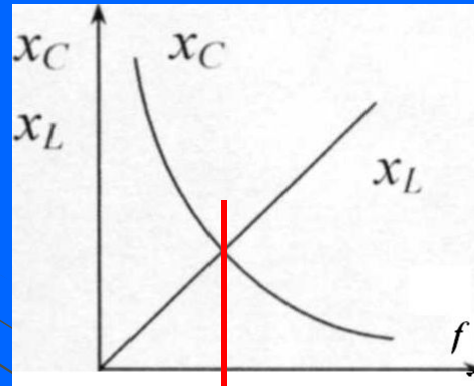
Иркутский филиал
Московского государственного технического университета гражданской авиации

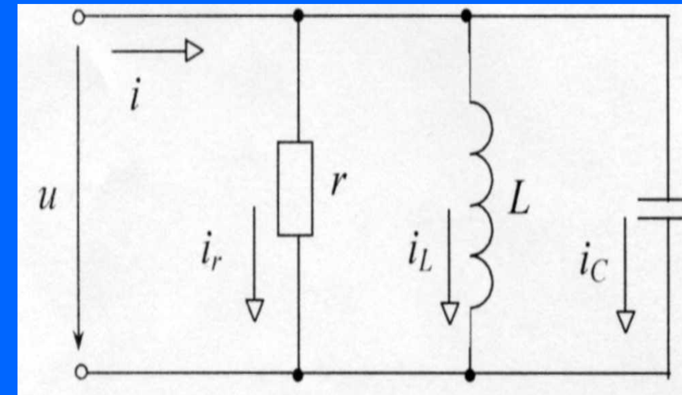
Количество пассажиров – до 330
Дальность – до 15 699 км
Длина – 68.9 м
Высота – 16.5 м
Диаметр фюзеляжа – 5.77 м
Запас топлива – 145 000 л

Boeing 787
Dreamliner

Первый полет в декабре 2009 г.,
Заказано 868 шт., стоимость
свыше 200 млн. $







fp

$$Z = r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$Y = \frac{1}{r} - j(\frac{1}{\omega L} - \omega C)$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}.$$

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C$$

$$U_{Lp} = U \cdot \Theta,$$

$$U_{Cp} = U \cdot \Theta$$

$$I_{Lp} = I \cdot \Theta,$$

$$I_{Cp} = I \cdot \Theta,$$

$$I_{Lp} = -I_{Cp}$$

Тема 2. Анализ переходных процессов классическим методом

Лекция 3 (*2 часа*)

Изучаемые вопросы:

3.1. Законы коммутации

3.2. Начальные условия, порядок определения независимых и зависимых начальных условий

3.3. Принужденные (установившиеся) и свободные составляющие переходного процесса

3.4. Классический метод анализа переходных процессов в цепях с одним реактивным элементом. Постоянная времени цепи

Лектор – к.ф.м.н., доцент Кобзарь В.А.

3.1. Законы коммутации

Переходным процессом называется электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи при переходе ее от одного установившегося режима к другому. Переходные процессы возникают только в тех цепях, где имеются накопители энергии: конденсаторы и катушки индуктивности. Переходные процессы появляются в результате **коммутаций**.

$$W_Э = C\frac{u_C^2}{2},$$

$$W_M = L\frac{i_L^2}{2}$$

Коммутация - это включения, отключения, переключения, мгновенное изменение параметров и т.д.

Первый закон коммутации

В ветви с индуктивной катушкой ток и магнитный поток в момент коммутации не могут измениться скачком, а сохраняют те значения, которые они имели перед коммутацией, и дальше начинают изменяться с этих значений.

$t = 0$ - момент времени, в который происходит коммутация,

$t = 0_-$ - момент времени непосредственно перед коммутацией,

$t = 0_+$ - момент времени после коммутации.

$$i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+)$$

Второй закон коммутации

В ветви с конденсатором напряжения и заряд на нем не могут изменяться скачком в момент коммутации, а сохраняют те значения, которые имели до коммутации и изменяются в этих значениях

$$u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+)$$

Переходные процессы описываются при помощи интегро-дифференциальных уравнений. Для их решения используются следующие методы:

- **классический;**
- **операторный;**
- **суперпозиционный с помощью интеграла Дюамеля.**

При этом для интегрирования уравнений необходимо знать начальные условия.

Метод «классический» отражает использование в нем решений дифференциальных уравнений с постоянными параметрами методами классической математики. Данный метод обладает физической наглядностью и удобен для расчета простых цепей.

Этапы расчета переходного процесса в цепи классическим методом:

1. Найти независимые начальные условия, то есть, напряжения на ёмкостях и токи на индуктивностях в момент начала переходного процесса.
2. Составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, электромагнитной индукции и т.д., описывающих состояние цепи после коммутации Для простых цепей получается дифференциальное уравнение первого или второго порядка, в котором в качестве искомой величины выбирают либо ток в индуктивном элементе, либо напряжение на емкостном элементе.
3. Составить общее решение неоднородного дифференциального уравнения цепи в виде суммы частного решения неоднородного дифференциального уравнения и общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения.
4. В общем решении найти постоянные интегрирования из начальных условий, т. е. условий в цепи в начальный момент времени после коммутации.

Операторный метод — это метод расчёта переходных процессов в электрических цепях, основанный на переносе расчёта переходного процесса из области функций действительной переменной (времени *t*) в область функций комплексного переменного (либо операторной переменной), в которой дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические.
Преобразование функций действительного переменного в операторную функцию производится с помощью методов операционного исчисления.

Последовательность расчёта операторным методом:

1. Определяются независимые начальные условия.
2. Вычерчивается операторная схема замещения, при этом электрические сопротивления заменяются эквивалентными операторными сопротивлениями, источники тока и источники ЭДС заменяются соответствующими операторными ЭДС, при этом следует учесть, что на месте реактивных сопротивлений помимо операторных сопротивлений появляются дополнительные операторные ЭДС.
3. Находятся операторные функции токов и напряжений в цепи одним из методов расчёта электрической цепи с помощью решения обыкновенных алгебраических уравнений и их систем.
4. Производится преобразование найденных операторных функций токов и напряжений в функцию действительного переменного с помощью методов операционного исчисления.

Операторный метод позволяет производить расчёт сложных схем менее трудоёмко, чем классический метод.

3.2. Начальные условия, порядок определения независимых и зависимых начальных условий

Начальные условия - это **значения токов и напряжений** при t = 0, т.е. в момент коммутации.

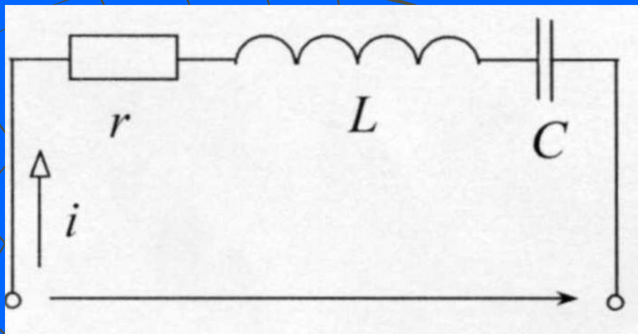
Следует различать **независимые и зависимые** начальные условия. Значение **тока в катушке** $i_L(o)$ и **напряжение на конденсаторе** $u_c(o)$ в момент коммутации называют ***независимыми начальными условиями*** (Н.Н.У. при $t = 0$). **Они определяются из законов коммутации**, т.е. из до коммутационных установившихся режимов.

Значения всех остальных токов и напряжений в начальный момент времени, т.е. при t = 0, называют ***зависимыми начальными условиями*** (З.Н.У. при $t = 0$). Их определяют по ранее найденным значениям независимых начальных условий из законов Кирхгофа, составленных для после коммутационных режимов).

Если к началу переходного процесса **все токи и напряжения на пассивных элементах схемы равны нулю**, в схеме имеют место ***нулевые начальные условия.***

$$\left.\begin{aligned} i_L(0\_) &= i_L(0) \\ u_C(0\_) &= u_C(0) \end{aligned}\right\}$$

3.3. Принужденные (установившиеся) и свободные составляющие переходного процесса



$$i \cdot r + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = e(t)$$ *после дифференцирования*

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

Известно, что общий интеграл такого уравнения равен сумме частного решения и общего решения неоднородного уравнения

Частное решение выражает <u>установившийся режим,</u> задаваемый источником, а общее решение определяет поведение цепи при отсутствии внешних источников электрической энергии (<u>свободные составляющие</u> токов и напряжений).

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0,$$ *соответствующее характеристическое уравнение*

$$Lp^2 + rp + \frac{i}{C} = 0 \Rightarrow i_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Физически это означает, что приложенное напряжение к цепи равно нулю. Ток в такой цепи поддерживается за счет запасов энергии в катушке индуктивности и конденсаторе, так как эти запасы ограничены, а в цепи всегда присутствует сопротивление, на котором происходит рассеяние энергии, то с течением времени этот ток становится равным нулю.

<u>Полный переходный ток в цепи</u> равен сумме установившегося тока и свободного

$$i(t) = i_{уст}(t) + i_{CB}(t)$$

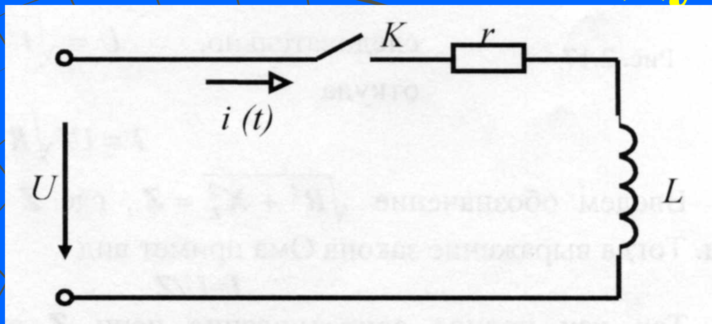
3.4. Анализ переходных процессов в цепях с одним реактивным элементом классическим методом. Постоянная времени цепи

Исследование переходных процессов в линейных цепях ведется с помощью линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. *Классический метод,* заключающийся в непосредственном интегрировании интегро-дифференциальных уравнений состоит из этапов:

- Составляется система уравнений для схемы после коммутации на основании первого и второго законов Кирхгофа.
- Выполняется решение уравнений относительно одной переменной (целесообразно переменную выбрать так, чтобы остальные переменные определялись через нее последовательным дифференцированием, а не интегрированием).

Из курса математики известно, что общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения *и* общего решения однородного уравнения

3.4.1. Переходный процесс в активно-индуктивной цепи



$i(t) = i_{уст}(t) + i_{СВ}(t) \qquad (1)$

$i_{уст}(t) = \dfrac{U}{r}, \qquad (2)$

$i_{СВ}(t) = Ae^{pt}$, *где* $A -$ *постоянная интегрирования*, $p -$ *корень характеристического уравнения*

$u_r(t) + u_L(t) = U$ *или*

$r \cdot i(t) + L\dfrac{di}{dt} = U \qquad (3), \qquad \dfrac{d}{dt} \approx p$

$Lp + r = 0$ *характеристическое уравнение*

$\Rightarrow p = -\dfrac{r}{L}$, *обозначим* $\dfrac{L}{r} = \tau$

Уравнение (3) описывает переходный процесс, возникающий в цепи *r, L* в результате замыкания рубильника *К*. Решение уравнения запишем в виде

$$i_{CB}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

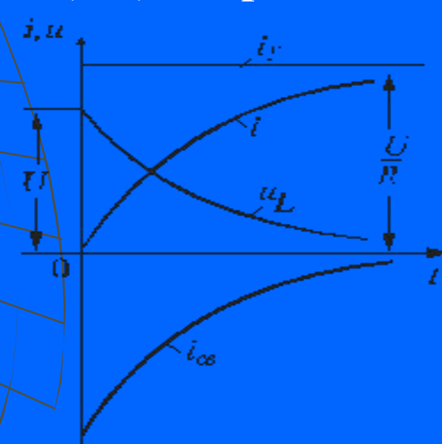
τ **- <u>постоянная времени цепи</u>, характеризует время уменьшения начального значения свободной составляющей процесса в 2.72 раза. Полагают, что за (3-5)τ-переходный процесс заканчивается.**

$$i(t) = \frac{U}{r} - \frac{U}{r}e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = I_{уст}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

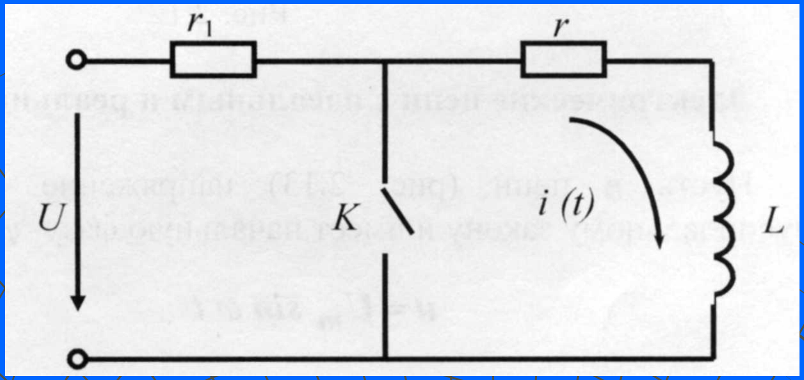
$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = Ue^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Во время переходного процесса накапливается энергия магнитного поля в индуктивной катушке и тепловые потери в резисторе



3.4.2. Короткое замыкание цепи r, *L*



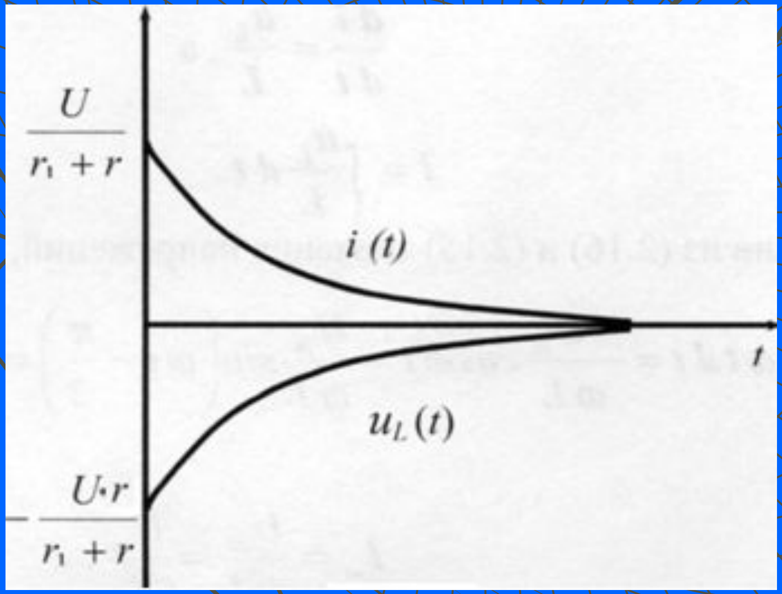
В контуре r, *L* начнется переходный процесс, который можно описать дифференциальным уравнением

$$r \cdot i(t) + L\frac{di}{dt} = 0, \textit{ищем} \quad \textit{решение}$$

$$i(t) = i_{уст}(t) + A e^{-\frac{r}{L}t},$$

$$\textit{итог} \qquad i(t) = \frac{U}{r_1 + r} e^{-\frac{r}{L}t},$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -\frac{U \cdot r}{r_1 + r} e^{-\frac{r}{L}t}$$

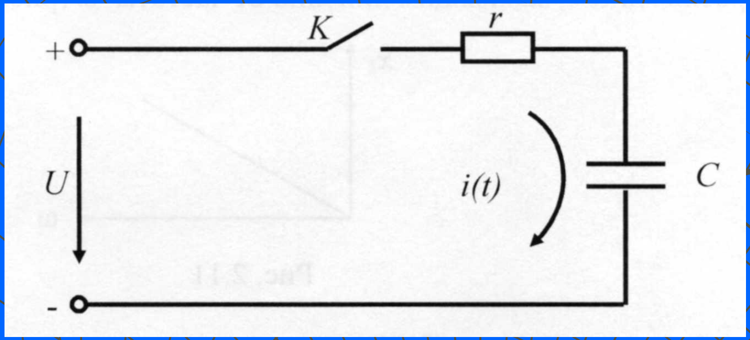


Во время переходного процесса (при коротком замыкании) вся энергия магнитного поля в катушке переходит в тепло на резисторе r

3.4.3. Переходный процесс в активно-емкостной цепи. Заряд конденсатора

Пусть конденсатор до включения не был заряжен, т.е. $u_c(o) = 0$. После коммутации уравнение второго закона Кирхгофа для контура имеет вид:

$$u_r(t)+u_c(t) = U$$



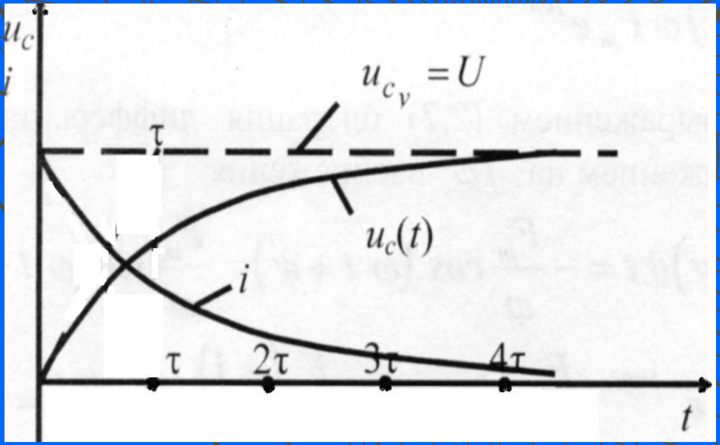
$$r\cdot C\frac{du}{dt}+u_C(t)=U, \text{или} \qquad \tau\frac{du}{dt}+u_C(t)=U$$

$$u_C(t)=u_{C\,уст}(t)+u_{C\,св}(t),$$

$$\text{итог} \qquad u_C(t)=U-Ue^{-\frac{t}{\tau}}=U(1-e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=-\frac{U}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}=Ie^{-\frac{t}{\tau}},$$

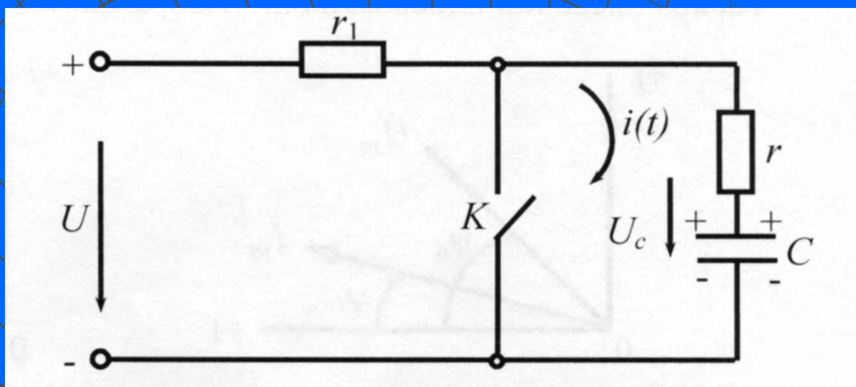
$$u_r(t)=r\cdot i(t)=Ue^{-\frac{t}{\tau}}$$



Напряжение на зажимах C и его заряд нарастают по тому же закону, что и ток в цепи r, *L* при включении ее под постоянное напряжение.
Ток же при включении сразу получает значение U/r, т.к. момент t=0 напряжение на зажимах конденсатора равно нулю, и ток в цепи определяется лишь напряжением *U* и сопротивлением r. В дальнейшем напряжение u_c постепенно возрастает, и ток в цепи убывает по экспоненциальному закону

3.4.4. Разряд конденсатора

Предположим, что конденсатор был заряжен от источника постоянного напряжения. В цепи в установившемся режиме до замыкания ключа *К* ток не протекает, и напряжение на конденсаторе равно напряжению источника *U*.



Пусть в какой-то момент времени замыкается ключ *К*, электрическая связь между контуром источника и контуром r, *C* теряется и в последнем начнется переходный процесс, т.е. конденсатор будет разряжаться на сопротивление r

$$u_r(t) + u_C(t) = 0 \quad \textit{где}$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t), \quad i_C(t) = C\frac{du_C}{dt},$$

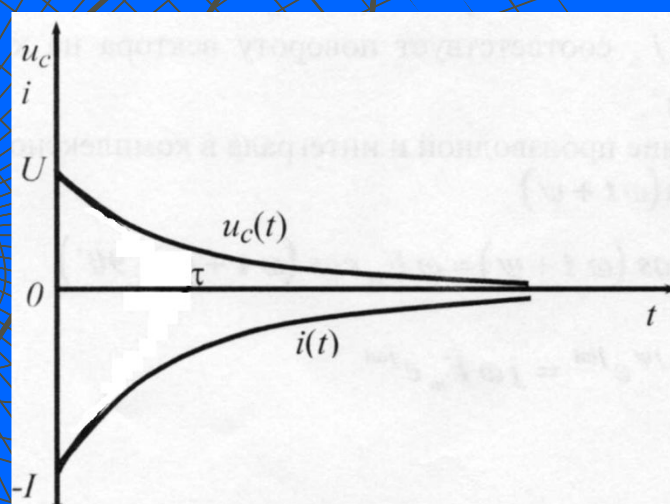
$$\textit{учитывая} \quad \tau = r \cdot C,$$

$$\tau \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\textit{итог} \quad u_C(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = -I e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Электрические процессы при разряде конденсатора заключаются в том, что энергия электрического поля за время переходного процесса преобразуется в тепло на активном сопротивлении

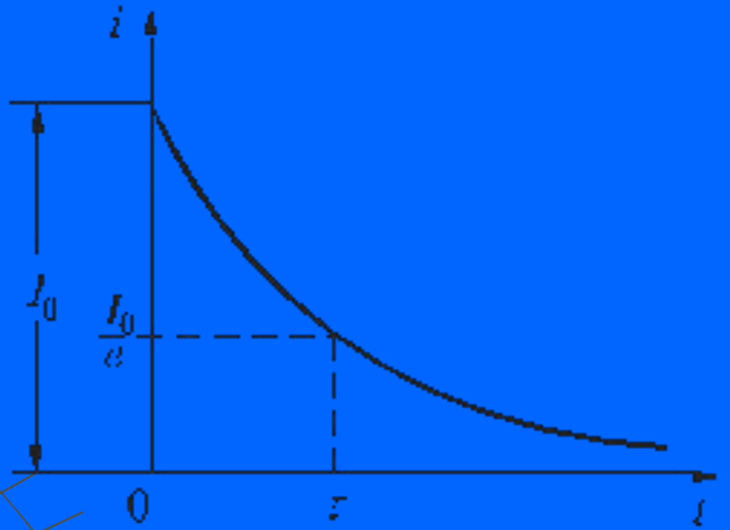
3.4.5. Постоянная времени цепи

<u>**Постоянная времени**</u> ***τ*** **– это время, в течение которого свободная составляющая процесса уменьшается в е = 2,72 раза по сравнению с начальным значением**

Постоянная времени τ определяет время переходного процесса $t_{пп,}$ **:**

$\tau_{пп}$=(3...5)τ. **Постоянная времени τ находится по формулам:**

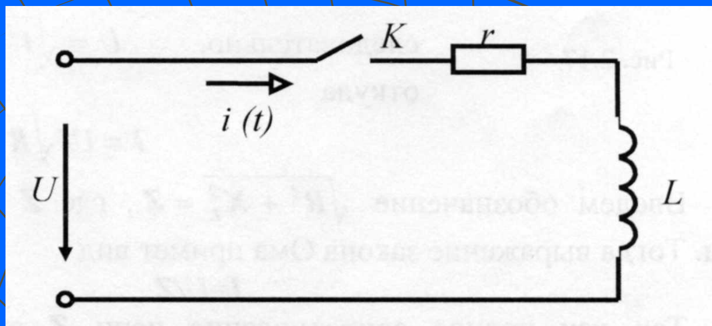
$$\tau = r \bullet C \quad \text{или} \quad \tau = L/r$$

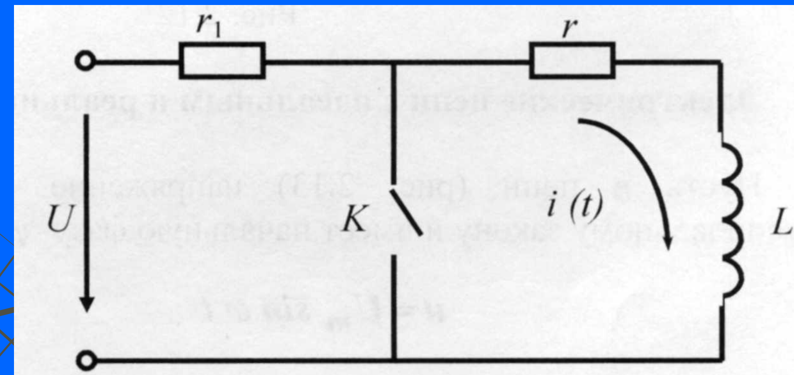


<u>**Пример:**</u> **если конденсатор с емкостью С = 100 мкФ разряжается через сопротивление г =100 Ом, то τ = 100 · 10^{-6-} ·100 = 0.01 с**

Если тот же конденсатор оставить заряженным и отключенным от остальной цепи, то он будет медленно разряжаться через свое сопротивление утечки. Пусть это сопротивление составляет 10^8 Ом. Тогда τ = 100 • 10^{-6} ·10^8 = 104 с = 27,8 час, т.е. конденсатор с такой хорошей изоляцией сохранит через сутки примерно одну треть своего начального заряда

$$i(t) = i_{уст}(t) + i_{CB}(t)$$





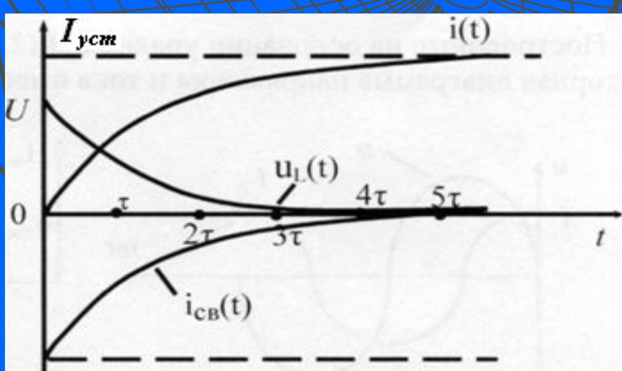
$$i(t) = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = I(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

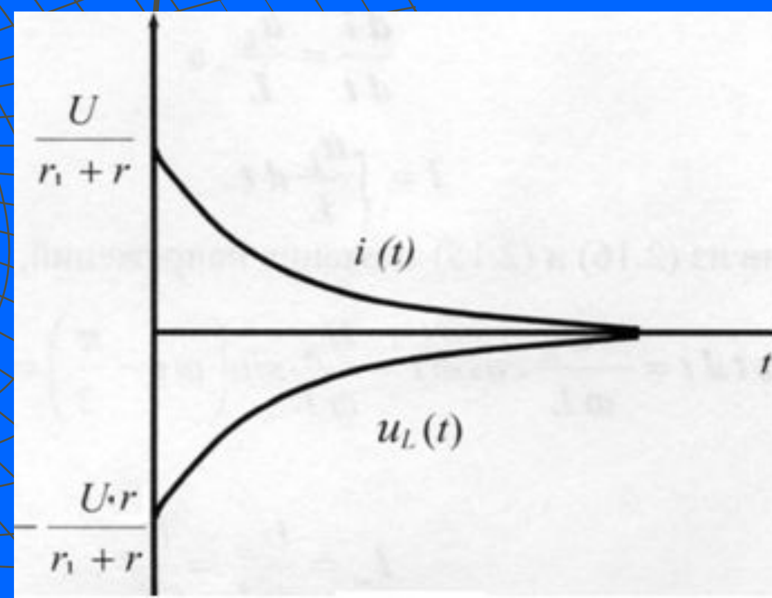
$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = U e^{-\frac{t}{\tau}},$$

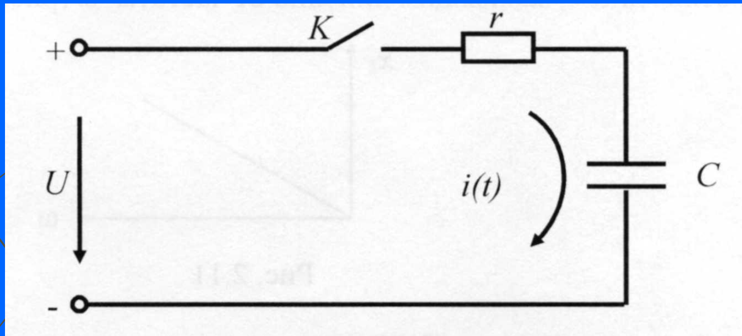
$$u_r(t) = r \cdot i(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

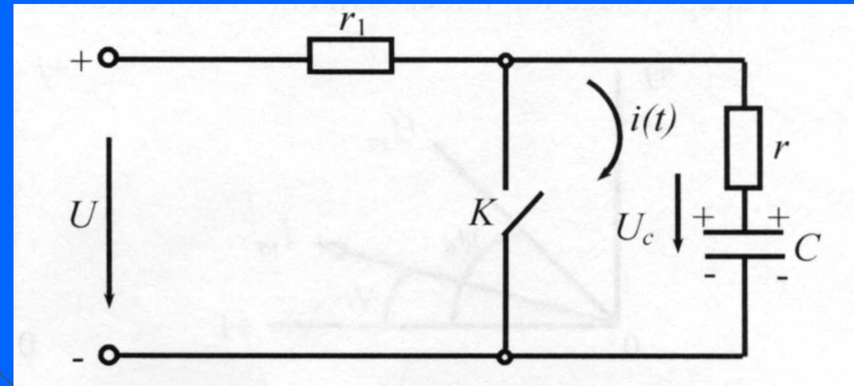
$$i(t) = \frac{U}{r_1 + r} e^{-\frac{r}{L}t},$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = -\frac{U \cdot r}{r_1 + r} e^{-\frac{r}{L}t}$$









$$u_C(t) = U - U e^{-\frac{t}{\tau}} = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

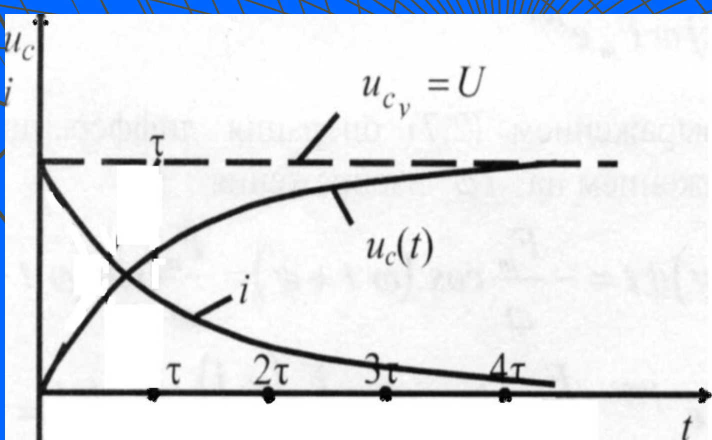
$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = -\frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} = I e^{-\frac{t}{\tau}},$$

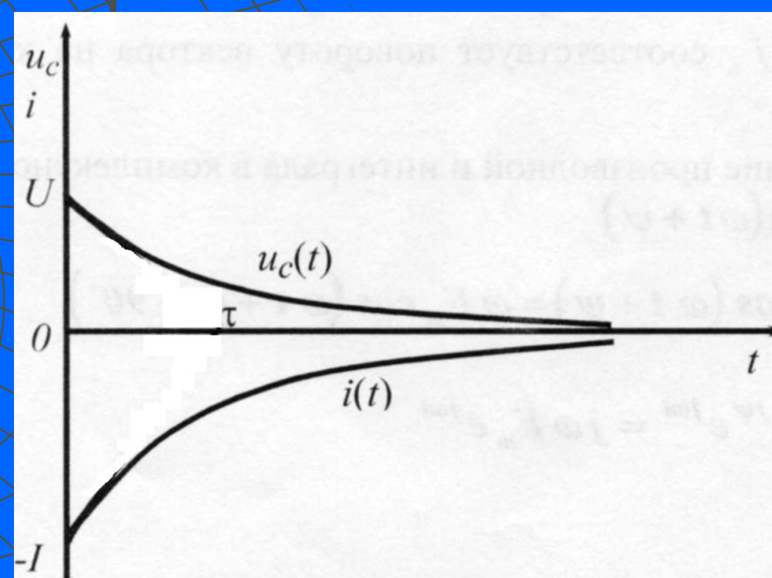
$$u_r(t) = r \cdot i(t) = U e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = -I e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_r(t) = r \cdot i(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$





Переходные процессы в R-L-C цепи

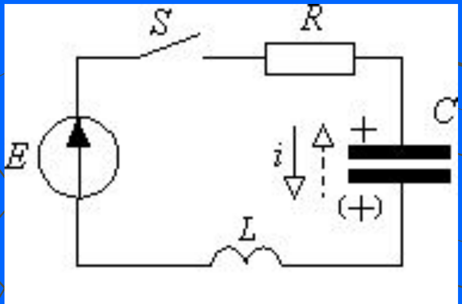


Рис. 1

Уравнение Кирхгофа для этой цепи после замыкания ключа S

$$u_L + u_R + u_C = e$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e$$

Возьмем производную по времени от обеих частей уравнения

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}$$

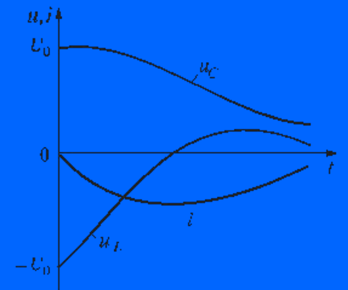
Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения,

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 + \delta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

Где

$$\delta = \frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}} = \frac{R}{\rho} \qquad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

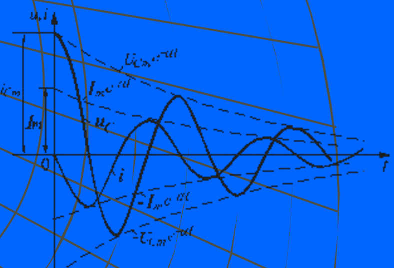
--- угловая частота, на которой в цепи рис. 1 возникает резонанс



Корнями этого характеристического уравнения являются

$$p_{1,2} = \omega_0\left(\frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4}}{2}\right)$$

корни характеристического уравнения являются функцией **затухания** δ и **резонансной частоты** ω_0, значения которых, в свою очередь, определяются параметрами цепи *R*, *L* и *C* . Они определяют характер изменения токов и напряжений в цепи (апериодический или периодическое затухание)



Содержание отчета.

В отчете по лабораторной работе отразить:

- тему и цель лабораторной работы;
- схему электрической цепи с обозначенными на ней контурами, узлами, направлениями обходов и т.д.;
- результаты расчета токов в ветвях с необходимыми математическими преобразованиями;
- результаты измерений токов в ветвях;
- выводы по работе.