Свойства числовых функций.

Функцию $y=f(x)$ называют возрастающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Другими словами, функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функцию $y=f(x)$ называют убывающей на множестве $X \subset D(f)$, если для любых точек x_1 и x_2 множества X таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Другими словами, функция убывает, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием монотонная функция, а исследование функции на возрастание или убывание называют исследованием функции на монотонность.

Если функция возрастает (или убывает) на своей области определения, то говорят, что функция возрастающая (убывающая).

Пример

Исследовать на монотонность функцию y=5-2x

Решение:

$f(x)=5-2x$

$$a > b$$
$$c \cdot a < c \cdot b, \text{если } c < 0$$

$x_1<x_2$

$-2x_1>-2x_2$

$5-2x_1>5-2x_2$

То есть $f(x_1)>f(x_2)$.

Из неравенства $x_1<x_2$ следует, что $f(x_1)>f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает на всей числовой прямой.

Пример

- Исследовать на монотонность функцию y=$x^3 + 2$

Решение:

f(x)=$x^3 + 2$

$x_1 < x_2$

$x_1^3 < x_2^3$

$x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2$

То есть $f(x_1) < f(x_2)$.

$$a > b$$
$$a^n > b^n$$

Из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, а это означает, что заданная функция возрастает на всей числовой прямой.

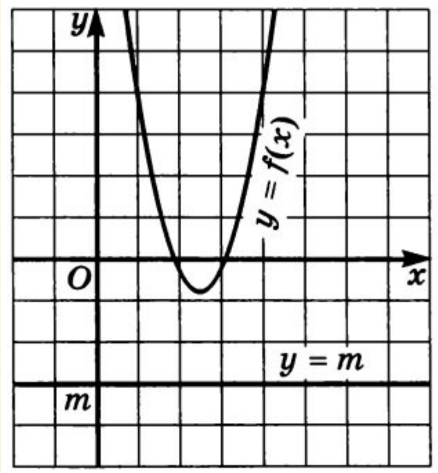
Функцию $y=f(x)$ называют ограниченной снизу на множестве $X\subset D(f)$, если все значения этой функции на множестве X больше некоторого числа, то есть если существует число m такое, что для любого значения $x\in X$ выполняется неравенство $f(x)>m$.

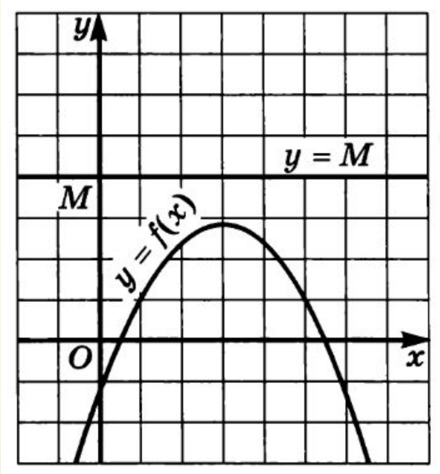
Функцию y=f(x) называют ограниченной сверху на множестве $X \subset D(f)$, если все значения этой функции на множестве X меньше некоторого числа, то есть если существует число M такое, что для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции сверху или снизу на всей области ее определения.

Если функция ограничена и сверху и снизу на всей области определения, то ее называют ограниченной.

Ограниченность функции легко читается по графику:





Пример

- Исследовать на ограниченность функцию:

y=$\sqrt{16-x^2}$

Решение:

По определению арифметического квадратного корня:

$$\sqrt{16-x^2} \geq 0$$

Это значит, что функция ограничена снизу.

С другой стороны 16-$x^2 \leq 16$, а поэтому

$$\sqrt{16 - x^2} \leq 4$$

$$a > b$$
$$\sqrt{a} > \sqrt{b}$$

Это означает, что функция ограничена сверху.

Итак, функция ограничена и сверху и снизу; или другими словами: ограниченная функция.

Число m называют наименьшим значением функции f(x) на множестве $X \subset D(f)$, если:

1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0)=m$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$

Наименьшее значение функции обозначают символом $y_{наим}$

- Число M называют **наибольшим значением функции $f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$,** если:

  1) существует точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0)=M$;

  2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$

Наибольшее значение функции обозначают символом $y_{наиб}$

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об поиске наименьшего или наибольшего значения функции на всей области ее определения.

Утверждения:

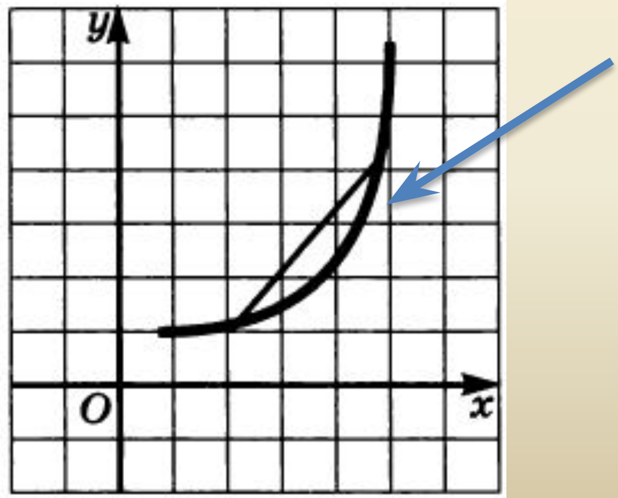
1) Если у функции существует $y_{наим}$, то она ограничена снизу.

2) Если у функции существует $y_{наиб}$, то она ограничена сверху.

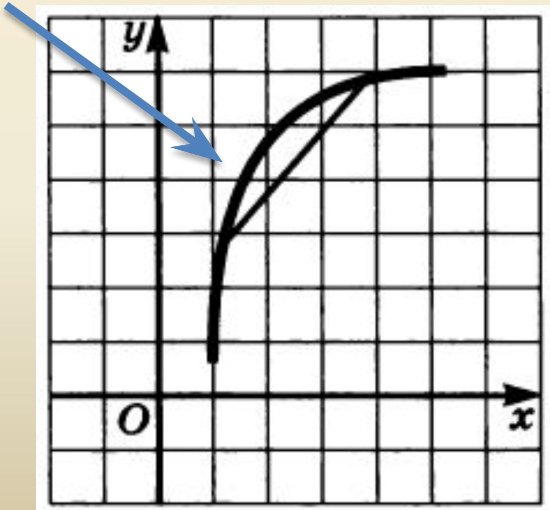
3) Если функция не ограничена снизу, то у нее не существует $y_{наим}$.

4) Если функция не ограничена сверху, то у нее не существует $y_{наиб}$.

Функция выпукла вниз на промежутке X⊂D(f), если, соединив любые две точки ее графика с абсциссами из X отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка



Функция выпукла вверх на промежутке $X \subset D(f)$, если, соединив любые две точки ее графика с абсциссами из X отрезком, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка



Если график функции f(x) на промежутке X не имеет точек разрыва (то есть представляет собой сплошную линию), то это значит, что функция f(x) непрерывна на промежутке X.

Замечание: Обсуждая последние два свойст-ва, мы будем пока по-прежнему опираться на наглядно-интуитивные представления. До-казательство этих свойств будет рассмотрено нами позже.

Функцию f(x), x∈X называют четной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x)=f(x)$$

Функцию f(x), x∈X называют нечетной, если для любого значения x из множества X выполняется равенство:

$$f(-x)=-f(x)$$

В определениях идет речь о значениях функции в точках -x и x. Тем самым предполагается, что функция определена и в точке x и в точке -x. Это значит, что точки x и -x одновременно принадлежат области определения функции. Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент -x, то такое множество называют симметричным множеством.

Например: отрезок [-5, 5]—симметричное множество, а отрезок [-4, 5]— не симметричное множество (в него входит число 5, но не входит противоположное ему -5)

Если функция $y=f(x)$, $x \in X$ четная или нечетная, то ее область определения X – симметричное множество.

Если же X – несимметричное множество, то функция $y=f(x)$, $x \in X$ не может быть ни четной ни нечетной.

Алгоритм исследования функции $y=f(x)$, $x \in X$ на четность.

1) Установить, симметрична ли область определения функции. Если нет, то объявить, что функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то перейти ко второму шагу алгоритма.
2) Составить выражение $f(-x)$.
3) Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:

   а) если $f(-x)=f(x)$, то функция четная;

   б) если $f(-x)=-f(x)$, то функция нечетная;

   в) если хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример

- Исследовать на четность функцию: $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$

Решение:

1. $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$ – симметричное множество

2. $f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$

3. Для любого значения х из области определения функции выполняется равенство f(-x)=f(x).

Таким образом, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ - четная функция

Пример

- Исследовать на четность функцию: $y = x^3 - \frac{3}{x^5}$

Решение:

1. $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$ – симметричное множество

2. $f(-x) = (-x)^3 - \frac{3}{(-x)^5} = -x^3 - \frac{3}{-x^5} = -\left(x^3 - \frac{3}{x^5}\right)$

3. Для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^3 - \frac{3}{x^5}$ – нечетная функция

Пример

- Исследовать на четность функцию: $y=\frac{x-4}{x^2-9}$.

Решение:

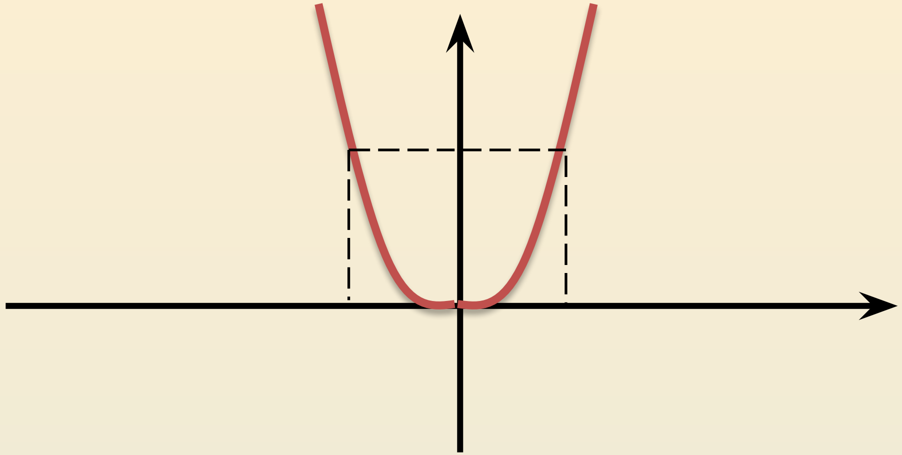
1. $D(f)=(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$ – симметричное множество.

2. $f(-x)=\frac{(-x)-4}{(-x)^2-9}=-\frac{x+4}{x^2-9}$

3. Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что, скорее всего, не выполняются ни тождество $f(-x)=f(x)$, ни тождество $f(-x)=-f(x)$. Например, $x=4$, $f(4)=0$, $f(-4)=-\frac{8}{7}$, то есть $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

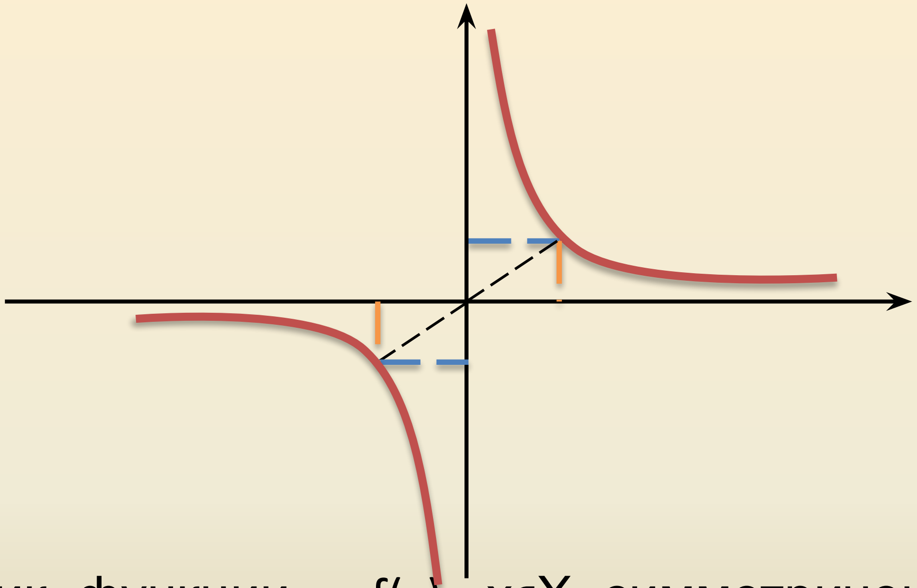
Таким образом, функция не является ни четной ни нечетной.

График четной функции симметричен относительно оси у.



Если график функции y=f(x), xϵX симметричен относительно оси ординат, то y=f(x), xϵX – четная функция.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



Если график функции y=f(x), xϵX симметричен относительно начала координат, то y=f(x), xϵX - нечетная функция

Прочитать функцию:

- ✔ Найти область определения функции D(f)
- ✔ Найти область значения функции E(f)
- ✔ Исследовать функцию на монотонность
- ✔ Исследовать функцию на ограниченность
- ✔ Найти наибольшее и наименьшее значение функции, если это возможно
- ✔ Исследовать функцию на четность