Лекция №1
доц.Лаптева Надежда Александровна

Тема:Производная по направлению. Градиент и его свойства.

Скалярное поле и его геометрическое изображение

- Часть пространства (или все пространство), каждой точке P которой соответствует численное значение некоторой скалярной величины u, называется скалярным полем.
- Примерами скалярных полей являются поле распределения температуры в данном теле, поле распределения электрического потенциала и т.д.

- Во всех случаях будем предполагать, что скалярная величина u не зависит от времени, а зависит только от положения точки P в пространстве. Таким образом, u рассматривается как функция точки P, то есть $u = f(P)$.

Эта функция называется функцией поля. Если точка P имеет определенные координаты x, y, z, то $u = f(x, y, z)$.

Линии уровня и поверхности уровня

- Скалярное поле часто изображается геометрически с помощью так называемых поверхностей уровня или, в плоском случае, линий уровня.

- Поверхностью уровня называется множество всех точек пространства, в которых функция $u = f(x, y, z)$ имеет одно и то же значение C.

Уравнение поверхности уровня. Уравнение линии уровня.

- C=$f(x, y, z)$. Придавая C различные значения, получим семейство поверхностей уровня.

- Плоские скалярные поля изображаются геометрически с помощью линий уровня. Линии уровня в этом случае имеют вид C=$f(x, y)$.

Примеры

- 1. Построить линии уровня для плоского скалярного поля, заданного функцией

$$z = x - y$$

- 2. Построить поверхности уровня для скалярного поля, заданного функцией

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

Производная по направлению

- Производная по направлению l обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$

  и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = f_x\left(x, y, z\right)\cos\alpha + f_y\left(x, y, z\right)\cos\beta + f_z\left(x, y, z\right)\cos\gamma$$

- Здесь $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ направляющие косинусы.

- Заметим, что если производная по данному направлению положительна, то функция в этом направлении возрастает, если же производная отрицательная, то функция в этом направлении убывает. Можно сказать, что производная по направлению дает скорость изменения функции в этом направлении.

Пример

Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точке $P_1(1, 2, -1)$ по направлению от точки P_1 к точке $P_2(2, 4, -3)$

Решение. Находим вектор

$$\overrightarrow{P_1P_2} = i + 2j - 2k$$

и соответствующий ему единичный вектор

$$e = \frac{P_1P_2}{\left|P_1P_2\right|} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k$$

Таким образом, вектор e имеет следующие направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

- Теперь найдем частные производные функции

$$u = x^2 - 2xz + y^2$$

и их значения в точке $P_1(1,2,-1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(P_1)=4,\ \frac{\partial u}{\partial y}(P_1)=4,\ \frac{\partial u}{\partial z}(P_1)=-2.$$

Подставляя в формулу значения найденных частных производных и направляющих косинусов, получим искомую производную:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 4\left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{2}{3}\right) + (-2)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Градиент

При изучении скалярных полей рассматривается вектор, называемый **градиентом**, который обозначается $grad\ u$ и вычисляется

$$grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Между **градиентом функции** в данной точке и **производной по направлению** существует тесная связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Проекция вектора $grad\ u$ на единичный вектор $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ равна производной функции u по направлению l

$$pr_l\ grad\ u = \frac{\partial u}{\partial l}$$

Учитывая, что производная по направлению выражает скорость изменения скалярного поля в этом направлении, можно также сказать , что **проекция градиента на вектор равна скорости изменения поля в направлении этого вектора**.

Обозначим через φ угол между единичным вектором e и $grad\ u$.

Тогда

$$pr_l\ grad\ u = \left| grad\ u \right| \cos\varphi.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left| grad\ u \right| \cos\varphi.$$

Если направления векторов $\vec{e}$ и $\overrightarrow{grad\ u}$ совпадают, то производная по направлению

$$pr_l\ grad\ u = |grad\ u| \cos\varphi.$$

имеет наибольшее значение, равное

$$|grad\ u|.$$

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: **градиент есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания**.