МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение высшего образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МГОУ)

Кафедра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики

Курсовая работа
по курсу: Элементарная математика

тема: **«*Методы и приемы решения дробно-рациональных уравнений, содержащих параметр*»**

Выполнил студент *11* группы *1* курса
Очной формы обучения
Физико-математического факультета
Кашина Анна Александровна

Научный руководитель:
ст. преподаватель
Высоцкая П.А.

Дата защиты: «07» июня 2018г.

Методы и приемы решения дробно-рациональных уравнений, содержащих параметр

* ***<u>Актуальность темы</u>***: так как в последние годы одним из номеров ЕГЭ является задача с параметром, в частности дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр, необходима отработка методов решения данных задач.

* ***<u>Цель работы</u>***: изучить методы и приемы решения дробно-рациональных уравнений с параметром.

* ***<u>Задачи</u>***: Рассмотреть различные определения дробно-рациональных уравнений с параметром;

Выделить основные методы и приемы решения дробно-рациональных уравнений с параметром;

Рассмотреть примеры решения дробно-рациональных уравнений с параметром.

Основные понятия

- Если обе части рационального уравнения или хотя бы одна из них являются дробными выражениями, и такое уравнение можно свести к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, причем дробь несократима, $Q(x) \neq 0$, то такое уравнение называется ***дробно-рациональным уравнением***.

Основные понятия

* ***Параметр*** - величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой. Она может принимать любые значения.

* Выделяют следующие ***виды параметризации дробно-рациональных уравнений***:

-Свободный член находится в числителе (например, $\frac{5x-a}{x-6} = 0$);

-Свободный член находится в знаменателе (например, $\frac{2}{x+2a} = 0$);

-Свободный член находится и в числителе, и в знаменателе (например, $\frac{5x-a}{x+2a} = 0$);

-Наличие коэффициента при переменной в числителе или знаменателе (например, $\frac{ax-2}{x+2a} = 0$).

Аналитический метод решения дробно-рациональных уравнений с параметром

* Основной частью аналитического метода решения задач является метод эквивалентных или равносильных преобразований. Данный подход основан на замене одного математического высказывания другим равносильным математическим высказыванием.
* Все равносильные преобразования уравнений выполняют на области допустимых значений (ОДЗ) заданного уравнения

Решение аналитическим методом дробно-рациональных уравнений с параметром, сводящихся к линейным:

* Решить уравнение

$$\frac{ax + 6 - x}{x^2 - 9} = 0.$$

* Решение: Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

* Перейдем к равносильному уравнению:

$ax + 6 - x = 0,$

$(a - 1)x = -6.$

* Рассмотрим два случая:

1) Если $a = 1$, то решений нет;

2) Если $a \neq 1$, то $x = -\frac{6}{a-1}$.

* Учитывая ОДЗ, получим:

$$-\frac{6}{a - 1} \neq -3 \text{ и } -\frac{6}{a - 1} \neq 3.$$

* Отсюда следует:

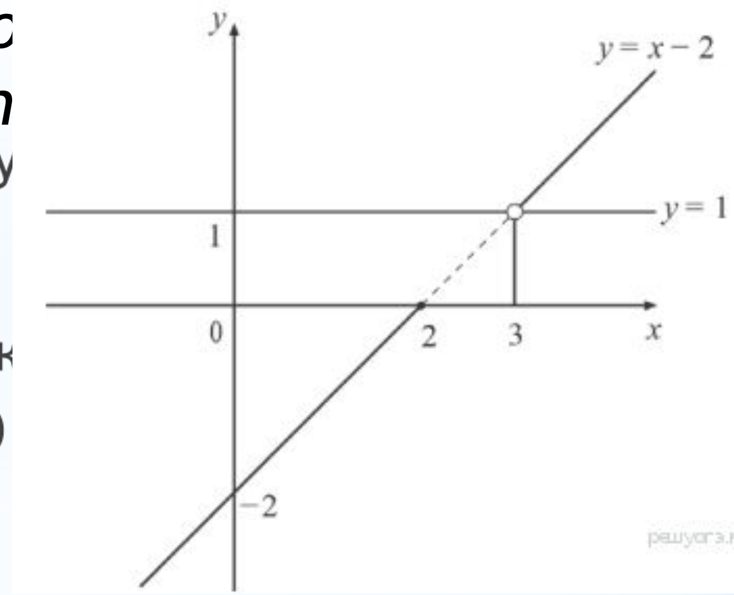
$$\begin{cases} a \neq 3, \\ a \neq -1. \end{cases}$$

* Ответ: $x = -\frac{6}{a-1}$ при $a \neq -1, a \neq 1$ и $a \neq 3$.

Графический метод решения дробно-рациональных уравнений с параметром

* Координатно-графический метод представляет искомые решения в виде геометрического места точек на координатной плоскости, Решение задачи в этом случае рассматривается как значение координаты, соответствующей искомой переменной, принадлежащей линии или области, задаваемой условием.
* Сам же процесс решения схематично выглядит так. Вначале строится графический образ, затем, пересекая полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси, «снимаем» нужную информацию.

Решение графическим мето ых уравнений с п



* *Пример* [12]: Найти число корней у параметра а: $a = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x-3}$
* Найдём область определения функ

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$; $x \epsilon (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$

и

$x - 3 \neq 0$

* Значит, функция определена при $x \epsilon (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.
* Учитывая область определения, построим график функции стоящей в правой части (рис.3)
*

$$y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x-3} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x-3} = x - 2$$

* Далее необходимо рассечь график семейством прямых $y = a$, найти точки пересечения и выписать ответ.
* при $a \leq 0$ и $a > 1$ уравнение имеет единственное решение;
* при $a \in (0; 1]$ решений нет.

Метод замены при решение дробно-рациональных уравнений с параметром

Метод замены заключается в формулировке исходного условия задачи в терминах новых переменных, существенно упрощающих процесс решения.

* *Пример* [10]: В зависимости от параметра a решить уравнение
* $(\frac{x}{x+1})^2 + (\frac{x}{x-1})^2 = a(a-1).$
* Решение: Рассмотрим ряд случаев:
* Если $a = 0$, то $x = 0$.
* Если $a = 1$, то $x = 0$.
* Если $0 < a < 1$, то решений нет.
* Возведем до полного квадрата:
* $(\frac{x}{x+1})^2 + (\frac{x}{x-1})^2 + 2 \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x}{x-1} - 2 \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x}{x-1} = a(a-1),$
* $(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1})^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} = a(a-1),$
* $(\frac{2x^2}{x^2-1})^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} = a(a-1).$
* Вводим замену $t = \frac{2x^2}{x^2-1}$. Тогда будем иметь уравнение:
* $t^2 - t = a^2 - a,$
* $t^2 - t - (a^2 - a) = 0.$
* Найдем его дискриминант:
* $D = 1 + 4(a^2 - a) = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2.$
* Находим корни:
* $\left[\begin{array}{l} t_1 = a, \\ t_2 = 1 - a. \end{array}\right.$
* Возвращаемся к «старой» переменной:
* $\left[\begin{array}{l} \frac{2x^2}{x^2-1} = a, \\ \frac{2x^2}{x^2-1} = 1 - a. \end{array}\right.$

* Рассмотрим уравнение $\frac{2x^2}{x^2-1} = a$:
* При $a = 0, x = 0$;
* При $a = 2$, решений нет;
* При $\frac{a}{a-2} > 0, a > 2, a < 0, x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a}{a-2}}$;
* При $0 < a < 2$, решений нет.
* Проверим, при каких значениях a будет выполняться $\frac{a}{a-2} = 1$:
* $a = a - 2$,
* $0 = -2$ (не имеет смысла).
* Значит, нет таких значений a, при которых $\frac{a}{a-2} = 1$.
* Рассмотрим уравнение
* $\frac{2x^2}{x^2-1} = 1 - a \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x^2 = \frac{a-1}{a+1}. \end{cases}$
* Исследуем уравнение $x^2 = \frac{a-1}{a+1}$:
* При $a = 1, x = 0$;
* При $a = -1$, решений нет;
* При $-1 < a < 1$, решений нет.
* Проверим, при каких значениях a будет выполняться $\frac{a-1}{a+1} = 1$:
* $a - 1 = a + 1$,
* $0 = 2$ (не имеет смысла).
* Значит, нет таких a, при которых $\frac{a-1}{a+1} = 1$.
* Проверим, сколько корней имеет уравнение $x^2 = \frac{a-1}{a+1}$ при $a = -2$:
* $x^2 = 3 \Rightarrow$ два действительных корня.
* Проверим, сколько корней имеет уравнение $x^2 = \frac{a-1}{a+1}$ при $a = -1$:
* $x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ два действительных корня.
* Ответ: при $a < -1, a > 2, x_{1,2} == \pm\sqrt{\frac{a}{a-2}}, x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$; при $-1 < a < 0, x_{1,2} == \pm\sqrt{\frac{a}{a-2}}$; при $a = 0, a = 1, x = 0$; при $0 < a < 1$, решений нет; при $1 < a < 2, x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$

Заключение

* В ходе исследовательской работы были изучены методы и приемы решения дробно-рациональных уравнений, содержащих параметр. На разных типах задач были рассмотрены аналитический, графический методы, а также метод замены переменной.

* Спасибо за внимание!