Лекция № 6.

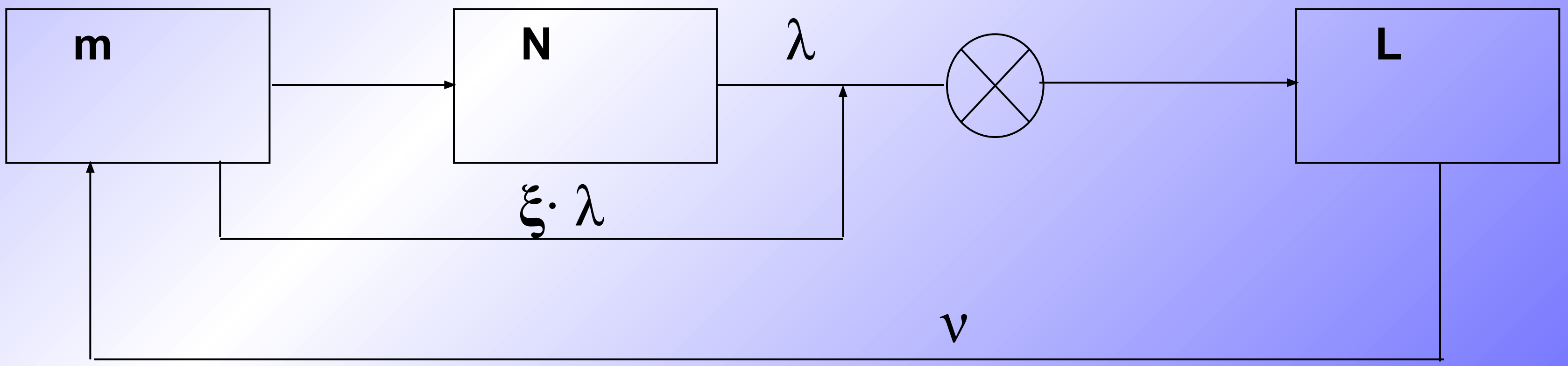
Дисциплина: Надежность и диагностика систем электроснабжения

<u>Тема</u>: расчёт коэффициента готовности восстанавливаемой резервированной системы , состоящей из однотипных элементов.

1. Описание системы.

Постановка задачи.

Рисунок 11.1 схемное изображение модели функционирования восстанавливаемой резервированной системы электрической части ЭС, состоящей из «N» рабочих и «m» резервных однотипных элементов



m- число резервных элементов системы;

N- число рабочих элементов системы;

L- число элементов обслуживающей системы;

λ [лямбда]- интенсивность отказов элементов системы;

ν [ню]- интенсивность восстановления отказавших элементов системы

ξ [кси]- коэффициент использования резерва.

ξ **ξ**=1, если резервирование горячее; **ξ**=0, если резервирование холодное (отсутствуют отказы в этом состоянии);

в общем случае: $0 <= \xi <= 1$

$\otimes$ очередь на востановление

- Появление отказов в системе будем рассматривать как простейший поток однородных событий, появляющихся со средней интенсивностью **λ**, рассматриваемой как параметр этого потока. Обслуживание рассматриваемой системы будем характеризовать показательным законом распределения времени восстановления с интенсивностью восстановления **ν**.
- Задача поставленная перед системой, выполняется группой из N элементов. При отказе любого из элементов этой группы, он мгновенно замещается резервным, а отказавший элемент отправляется на восстановление.
- Обслуживающая система состоит из L-элементов. При занятости всех обслуживающих элементов, отказавший элемент становится в очередь на восстановление.

После восстановления элемент возвращается в резерв с частотой **υ.**

- В общем случае могут отказывать и элементы, находящиеся в резерве с частотой $\xi*\lambda$. Тогда они также направляются на восстановление в обслуживающую систему.
- Следует отметить, что в данной задаче восстановление повышает надёжность системы в смысле увеличения её готовности к действию, а так же повышает вероятность безотказной работы системы в целом. Объясняется это следующим образом: чем быстрее происходит восстановление, тем более количество резервных элементов!

2. Математическое описание задачи.

- Суть задачи состоит в следующем: система выходит из строя если откажут m+1 элементов.
- Считаем, что система находится в состоянии Ек , когда число отказавших элементов равно К. Очевидно что в состояниях Е0, Е1,...,Еm система работоспособна. Состояние Еm+1 является состоянием отказа системы.
- Состояние Еm+2 ,...,Еs – считается невозможным, если невозможны новые отказы в отказавшей системе, где S – общее число однотипных элементов, циркулирующих в системе.
- При S>N + m, некоторые из элементов находятся в нерабочем состоянии (на ремонте или в очереди на ремонт).

- Предположим, что при отказе любого из элементов работающей группы, он замещается резервом. Это допущение учитывается при составлении таблицы группы технических средств для указания минимально необходимого количества технических средств в группе для обеспечения нормальной работы системы. Менее этого количества элементов опускаться нельзя, иначе наступит отказ группы и системы в целом.

Интенсивность отказа системы (из числа рабочих и резервных элементов), находящейся в состоянии Ек равна:

$$N\lambda + (m - k)\,\xi\,\lambda = n_k\,\lambda; \qquad (11.1)$$

Откуда:

$$n_k = N + (m - k)\,\xi; \qquad (11.2)$$

Где:

ξ λ – интенсивность отказа резервного элемента;

$$\mathbf{0 <= \xi <= 1;}$$

- Интенсивность восстановления равна **K ν,** если количество ремонтных бригад не менее **m+1** и **ν**, если в работе находится лишь одна бригада.
- Обозначим вероятность застать систему в произвольный момент времени **t** в состоянии **Eк** через **Pк(t)**.
- Для определения **Pк(t)** составляется система дифференциальных уравнений конечного порядка по следующему алгоритму:
- Берётся момент времени с малым приращением **Δt** и находится вероятность **Pк(t+Δt)**

В момент времени **t+Δt** система может находиться в состоянии **Ек** при следующих трёх условиях:

В момент времени **t** система находится в состоянии **Ек** и за время **Δt** не происходит никаких изменений с её элементами. Вероятность такого события равна:

$$Pк(t) * (1-n_k\lambda \Delta t)*(1-k \nu \Delta t) \qquad (11.3)$$

Где:

ξ – коэффициент использования резервного элемента;

n_k = N + (m - k) ξ – расчётная величина;

k – число отказов из **m** – резервных элементов;

($1 – n_k \lambda \Delta t$) – вероятность того, что за время **Δt** в системе не возникнет ни одного отказа;

($1 - k \nu \Delta t$) – вероятность того, что не один отказавший элемент за время **Δt** не будет восстановлен;

k ν – интенсивность восстановления, если количество ремонтных бригад не менее: **m+1**, и **ν –** если работает лишь одна ремонтная бригада;

В момент времени **t** система находится в состоянии **Ек-1**, а за время **Δt – переходит** в состояние **Ек.** Вероятность этого события равна:

$$\mathbf{P_{k-1}(t) * n_{k-1} * \lambda * \Delta t}, \quad \mathbf{(11.4)}$$

где: $\mathbf{n_{k-1} * \lambda * \Delta t}$ – вероятность отказа элемента системы;

В момент времени **t** система находится в состоянии $\mathbf{E_{к+1}}$, а за время **Δt – переходит** в состояние **Ек.** Вероятность этого события равна:

$$\boldsymbol{P_{k+1}(t) * (k + 1) * v * \Delta t} \quad \boldsymbol{(11.5)}$$

Где: **(k+1)** – число отказавших элементов системы.

Считаем, что вероятность отказа более одного элемента системы за время **Δt,** равна нулю!

Вероятность того, что к моменту **t+Δt** система перейдёт в состояние **Ек** любым (но только одним) из трёх вышеуказанных путей, определим по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_k(t+\Delta t)= P_k(t)*(1-n_k\ \lambda\ \Delta t)*(1-k\ \nu\ \Delta t)+ P_{k-1}(t)*n_{k-1}*\lambda*\Delta t+ P_{k+1}(t)*(k+1)*\nu*\Delta t \qquad (11.6)$$

Перенесем влево слагаемое $P_к(t)$ и разделим обе части уравнения на **Δt.** Взяв бесконечно малое приращение времени, то есть **Δt →0** получим равенство:

$$P'_k(t)= -P_к(t) * (n_k\ \lambda +k\nu)+ P_{k-1}(t) * n_{k-1} * \lambda+ P_{k+1}(t)* (k+1) * \nu \qquad (11.7)$$

Для определения коэффициента готовности системы в любой, произвольно выбранный момент времени **t,** необходимо вычислить вероятности пребывания системы в каждом из всех возможных её состояний: $\mathbf{P_0(t), P_1(t),\ldots,P_{m+1}(t)}$. Указанные вероятности описываются системой дифференциальных уравнений вида:

$$
\begin{cases}
P'_0(t) = -\, n_0\, \lambda\, P_0(t) + \nu\, P_1(t); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P'_k(t) = -\, (n_k\, \lambda + k\, \nu)\, P_k(t) + n_{k-1}\, \lambda\, P_{k-1}(t) + (k+1)\, \nu\, P_{k+1}(t); \qquad (11.8) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P'_m(t) = -\, (n_m\, \lambda + m\, \nu)\, P_m(t) + n_{m-1}\, \lambda\, P_{m-1}(t) + (m+1)\, \nu\, P_{m+1}(t); \\
P'_{m+1}(t) = -\, (m+1)\, \nu\, P_{m+1}(t) + n_m\, \lambda\, P_m(t);
\end{cases}
$$

Все события, описанные данной системой дифференциальных уравнений, являются **несовместными** (не могут иметь место одновременно) и определяют возможность пребывания технической системы в **любом возможном состоянии!**

Следовательно сумма вероятностей системы уравнений 11.8 равна единице (полная схема событий):

$$\sum_{k=0}^{m+1} P_k(t) = 1 \qquad (11.9)$$

Данная система дифференциальных уравнений может быть решена при различных начальных условиях, например: $\mathbf{P_0(0)=1; P_1(0)=0; P_{m+1}(0)=0.}$

Однако, для определения коэффициента готовности системы достаточно иметь решение при $\mathbf{t}\to\infty$ (для стационарного режима эксплуатации системы).

Согласно теореме Маркова при $\mathbf{t}\to\infty$, $\mathbf{P'_к=0}$, а $\mathbf{P_k(\infty) = P_k = const.}$

С учётом сказанного, система алгебраических уравнений, определяющая коэффициент готовности технической системы, получается из системы уравнений 11.8 и имеет вид:

$$
\begin{cases}
\nu P_1 = n_0 \lambda P_0; \\
2 \nu P_2 = (n_1 \lambda + \nu) P_1 - n_0 \lambda P_0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k \nu P_k = (n_{k-1} \lambda + [k-1] \nu) P_{k-1} - n_{k-2} \lambda P_{k-2}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\nu(m+1) P_{m+1} = (n_m \lambda + m \nu) P_m - n_{m-1} \lambda P_{m-1}; \\
0 = (m+1) \nu P_{m+1} - n_m \lambda P_m;
\end{cases}
\qquad (11.10)
$$

Из 11.10 с учётом 11.8 имеем:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{m} \frac{n_0 * n_1 * \ldots * n_{k-1}}{k!} * \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k} \qquad (11.11)$$

Где: P_0 – вероятность безотказной, работы системы: **k=0**;

$$P_k = \frac{n_0 * n_1 * \ldots * n_{k-1} * \lambda^k}{k! * \nu^k} * P_0 \qquad (11.12)$$

Определим коэффициент готовности, как вероятность застать в любой момент времени неработоспособными не более **m** элементов.

$$\pi(\infty) = \sum_{k=0}^{m} P_k = \frac{\sum_{k=0}^{m} \frac{\prod_{i=-1}^{k-1} n_i * \rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{\prod_{i=-1}^{k-1} n_i * \rho^k}{k!}} \qquad (11.13)$$

Здесь: $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ - коэффициент неисправности системы;

$\mathbf{N_{-1} = 1.}$

В заключение, проиллюстрируем зависимость функции готовности **π(t)** от значения коэффициента неисправности **ρ**:

Рисунок 11.2

Из анализа рисунка можно сделать вывод, что при увеличении **ρ** надежность системы снижается (в плане ее готовности к действию).

Вывод: <u>При увеличении ρ коэффициент готовности системы уменьшается.</u>

Рассмотрим некоторые частные случаи:

Случай 1. Резервирование горячее (рабочие и резервные элементы находятся в одинаковых условиях). Количество ремонтных бригад: $m+1$; очередь на ремонт отсутствует.

В этом случае: $\xi = 1$; $m = S-k$;

где: $S = N+m$; $0 <= k < m + 1$.

Используя формулы 11.12 и 11.11 получим:

$$P_k = \frac{\dfrac{S*(S-1)*...*(S-1+k)}{k!}*\rho^k}{\sum\limits_{k=0}^{m+1}\dfrac{S*(S-1)*...*(S-1+k)}{k!}*\rho^k} = \frac{C_s^k*\rho^k}{\sum\limits_{k=0}^{m+1}C_s^k*\rho^k}, \quad (11.14)$$

где: C_S^k - число сочетаний из **S** по **k,** можно определить по формуле:

$$C_S^k = \frac{S!}{k!*(S-k)!}$$

Таким образом в этом случае коэффициент готовности можно вычислить по формуле:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^{m} C_S^k * \rho^k}{\sum_{k=0}^{m+1} C_S^k * \rho^k} \qquad (11.15)$$

<u>Случай 2</u>. Если общее число однотипных элементов, которые циркулируют в рассматриваемой системе: **S = > N+m** и они одинаково могут отказывать в рабочем, нерабочем и резервном состояниях, то суммирование в знаменателе выражения 11.13 распространяется на все **S** – элементов и коэффициент готовности системы определяется выражением:

$$\pi(\infty) = \sum_{k=0}^{m} C_S^k \left(1 - \frac{\nu}{\lambda + \nu}\right)^k * \left(\frac{\nu}{\lambda + \nu}\right)^{S-k} \qquad (11.16)$$

Случай 3. Резервирование горячее, но работает лишь одна бригада и возможна очередь на ремонт. В этом случае коэффициенты ν в системе уравнений 11.10 везде равны единице, а $\xi = 1$; $n_k = S - k$;

По формулам 11.10 и 11.11 находим:

$$P_k = \frac{\frac{1}{(S-k)!} * \rho^k}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{(S-k)!} * \rho^k} \qquad (11.17)$$

Коэффициент готовности системы равен:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^{m} \frac{\rho^k}{(S-k)!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{\rho^k}{(S-k)!}} \qquad (11.18)$$

<u>Случай 4.</u> Резервирование холодное, работают **m +1** (или S) ремонтных бригад (очередь на ремонт отсутствует). В этом случае: $\xi = 0$; $nk = N$;

Если отказы в нерабочем состоянии не появляются, то коэффициент готовности системы равен:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^{m} \frac{(N * \rho)^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{(N * \rho)^k}{k!}} \qquad (11.19)$$

Если же элементы отказывают и в неработоспособном состоянии, то до отказов системы (до **m+1** – го отказа), отказы появляются из числа **N** – элементов, а после этого – из числа **S-k** – элементов, где **k** (число отказов) изменяется от **m+1** до **S.** В этом случае:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^{m} \frac{(N*\rho)^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{(N*\rho)^k}{k!} + \sum_{k=m+2}^{S} \frac{(S-k)^k * \rho^k}{k!}} \qquad (11.20)$$

Случай 5. Резервирование холодное, работает одна ремонтная бригада.
В этом случае: $\xi = 0$; $n_k = N$;
При отсутствии отказов в нерабочем состоянии, коэффициент готовности системы равен:

$$\pi(\infty) = \frac{1-(N*\rho)^{m+1}}{1-(N*\rho)^{m+2}} \qquad (11.21)$$

в случае отказов и в нерабочем состоянии коэффициент готовности системы равен:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^{m} (N * \rho)^k}{\sum_{k=0}^{m+1} (N * \rho)^k + \sum_{k=0}^{S} (S-k)^k * \rho^k} \tag{11.22}$$

Для закрепления теоретического материала предлагается самостоятельно рассмотреть количественный пример.

Исходные данные для расчета:

Пусть система состоит из двух рабочих (N=2) и двух резервных (m=2) элементов с параметрами λ= 0.1 1/ч, υ = 1 1/ч, ρ = λ/ υ = 0.1. Расчет произвести для варианта горячего резервирования: ξ =1 и при условии, что ограничения на ремонт отсутствуют.

Выводы: Для расчета коэффициента готовности системы можно использовать формулы, позволяющие производить расчеты без решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, что значительно упрощает практические инженерные расчеты.

Специально для кафедры ЭЭС
от доцента кафедры ЭЭС
Анисимова Олега Юрьевича
с наилучшими пожеланиями

2005 г.