

Лекция № 6.

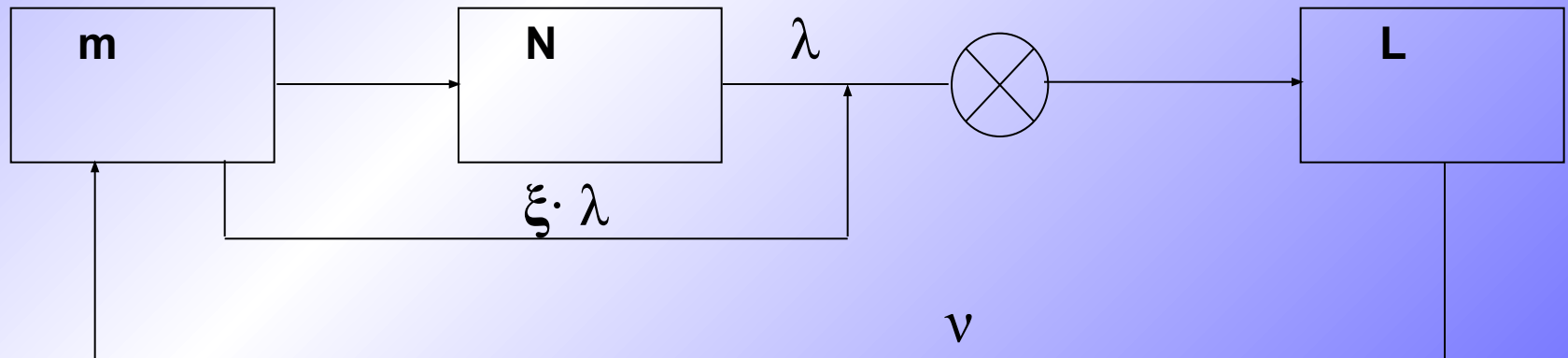
Дисциплина: Надежность и диагностика систем электроснабжения

Тема: расчёт коэффициента готовности восстанавливаемой резервированной системы , состоящей из однотипных элементов.

1. Описание системы.

Постановка задачи.

Рисунок 11.1 схемное изображение модели функционирования восстанавливаемой резервированной системы электрической части ЭС, состоящей из «N» рабочих и «m» резервных однотипных элементов



m- число резервных элементов системы;

N- число рабочих элементов системы;

L- число элементов обслуживаемой системы;

λ [лямбда]- интенсивность отказов элементов системы;

ν [ню]- интенсивность восстановления отказавших элементов системы

ξ [кси]- коэффициент использования резерва.

$\xi = 1$, если резервирование горячее; $\xi = 0$, если резервирование холодное (отсутствуют отказы в этом состоянии);

в общем случае: $0 \leq \xi \leq 1$

 очередь на восстановление

- Появление отказов в системе будем рассматривать как простейший поток однородных событий, появляющихся со средней интенсивностью λ , рассматриваемой как параметр этого потока. Обслуживание рассматриваемой системы будем характеризовать показательным законом распределения времени восстановления с интенсивностью восстановления ν .
 - Задача поставленная перед системой, выполняется группой из N элементов. При отказе любого из элементов этой группы, он мгновенно замещается резервным, а отказавший элемент отправляется на восстановление.
 - Обслуживающая система состоит из L -элементов. При занятости всех обслуживающих элементов, отказавший элемент становится в очередь на восстановление.
- После восстановления элемент возвращается в резерв с частотой ν .

- В общем случае могут отказывать и элементы, находящиеся в резерве с частотой $\xi * \lambda$. Тогда они также направляются на восстановление в обслуживаемую систему.
- Следует отметить, что в данной задаче восстановление повышает надёжность системы в смысле увеличения её готовности к действию, а так же повышает вероятность безотказной работы системы в целом. Объясняется это следующим образом: чем быстрее происходит восстановление, тем более количество резервных элементов!

2. Математическое описание задачи.

- Суть задачи состоит в следующем: система выходит из строя если откажут $m+1$ элементов.
- Считаем, что система находится в состоянии E_k , когда число отказавших элементов равно k . Очевидно что в состояниях E_0, E_1, \dots, E_m система работоспособна. Состояние E_{m+1} является состоянием отказа системы.
- Состояние E_{m+2}, \dots, E_s – считается невозможным, если невозможны новые отказы в отказавшей системе, где S – общее число однотипных элементов, циркулирующих в системе.
- При $S > N + m$, некоторые из элементов находятся в нерабочем состоянии (на ремонте или в очереди на ремонт).

- Предположим, что при отказе любого из элементов работающей группы, он замещается резервом. Это допущение учитывается при составлении таблицы группы технических средств для указания минимально необходимого количества технических средств в группе для обеспечения нормальной работы системы. Менее этого количества элементов опускаться нельзя, иначе наступит отказ группы и системы в целом.

Интенсивность отказа системы (из числа рабочих и резервных элементов), находящейся в состоянии E_k равна:

$$N\lambda + (m - k) \xi \lambda = n_k \lambda; \quad (11.1)$$

Откуда:

$$n_k = N + (m - k) \xi; \quad (11.2)$$

Где:

$\xi \lambda$ – интенсивность отказа резервного элемента;

$$0 \leq \xi \leq 1;$$

- Интенсивность восстановления равна $\mathbf{K} \nu$, если количество ремонтных бригад не менее $\mathbf{m}+1$ и ν , если в работе находится лишь одна бригада.
- Обозначим вероятность застать систему в произвольный момент времени \mathbf{t} в состоянии \mathbf{E}_k через $\mathbf{P}_k(\mathbf{t})$.
- Для определения $\mathbf{P}_k(\mathbf{t})$ составляется система дифференциальных уравнений конечного порядка по следующему алгоритму:
- Берётся момент времени с малым приращением $\Delta \mathbf{t}$ и находится вероятность $\mathbf{P}_k(\mathbf{t}+\Delta \mathbf{t})$

В момент времени $t+\Delta t$ система может находиться в состоянии E_k при следующих трёх условиях:

В момент времени t система находится в состоянии E_k и за время Δt не происходит никаких изменений с её элементами. Вероятность такого события равна:

$$P_k(t) * (1-n_k \lambda \Delta t) * (1-k v \Delta t) \quad (11.3)$$

Где:

ξ – коэффициент использования резервного элемента;

$n_k = N + (m - k) \xi$ – расчётная величина;

k – число отказов из m – резервных элементов;

$(1 - n_k \lambda \Delta t)$ – вероятность того, что за время Δt в системе не возникнет ни одного отказа;

$(1 - k v \Delta t)$ – вероятность того, что не один отказавший элемент за время Δt не будет восстановлен;

$k v$ – интенсивность восстановления, если количество ремонтных бригад не менее: $m+1$, и v – если работает лишь одна ремонтная бригада;

В момент времени t система находится в состоянии E_{k-1} , а за время Δt – переходит в состояние E_k . Вероятность этого события равна:

$$P_{k-1}(t) * n_{k-1} * \lambda * \Delta t, \quad (11.4)$$

где: $n_{k-1} * \lambda * \Delta t$ – вероятность отказа элемента системы;

В момент времени t система находится в состоянии E_{k+1} , а за время Δt – переходит в состояние E_k . Вероятность этого события равна:

$$P_{k+1}(t) * (k + 1) * \nu * \Delta t \quad (11.5)$$

Где: $(k+1)$ – число отказавших элементов системы.

Считаем, что вероятность отказа более одного элемента системы за время Δt , равна нулю!

Вероятность того, что к моменту $t+\Delta t$ система перейдет в состояние E_k любым (но только одним) из трёх вышеуказанных путей, определим по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P_k(t+\Delta t) = P_k(t) * (1 - n_k \lambda \Delta t) * (1 - kv \Delta t) + P_{k-1}(t) * n_{k-1} * \lambda * \Delta t + P_{k+1}(t) * (k+1) * v * \Delta t \quad (11.6)$$

Перенесем влево слагаемое $P_k(t)$ и разделим обе части уравнения на Δt . Взяв бесконечно малое приращение времени, то есть $\Delta t \rightarrow 0$ получим равенство:

$$P'_k(t) = -P_k(t) * (n_k \lambda + kv) + P_{k-1}(t) * n_{k-1} * \lambda + P_{k+1}(t) * (k+1) * v \quad (11.7)$$

Для определения коэффициента готовности системы в любой, произвольно выбранный момент времени t , необходимо вычислить вероятности пребывания системы в каждом из всех возможных её состояний: $P_0(t), P_1(t), \dots, P_{m+1}(t)$. Указанные вероятности описываются системой дифференциальных уравнений вида:

$$P'_0(t) = -n_0 \lambda P_0(t) + \nu P_1(t);$$

.....

$$P'_k(t) = - (n_k \lambda + k \nu) P_k(t) + n_{k-1} \lambda P_{k-1}(t) + (k+1) \nu P_{k+1}(t); \quad (11.8)$$

.....

$$P'_m(t) = - (n_m \lambda + m \nu) P_m(t) + n_{m-1} \lambda P_{m-1}(t) + (m+1) \nu P_{m+1}(t);$$

$$P'_{m+1}(t) = - (m+1) \nu P_{m+1}(t) + n_m \lambda P_m(t);$$

Все события, описанные данной системой дифференциальных уравнений, являются **несовместными** (не могут иметь место одновременно) и определяют возможность пребывания технической системы в **любом возможном состоянии!**

Следовательно сумма вероятностей системы уравнений 11.8 равна единице (полная схема событий):

$$(11.9) \quad \sum_{k=0}^{m+1} P_k(t) = 1$$

Данная система дифференциальных уравнений может быть решена при различных начальных условиях, например: $P_0(0)=1$; $P_1(0)=0$; $P_{m+1}(0)=0$.

Однако, для определения коэффициента готовности системы достаточно иметь решение при $t \rightarrow \infty$ (для стационарного режима эксплуатации системы).

Согласно теореме Маркова при $t \rightarrow \infty$, $P'_k = 0$, а $P_k(\infty) = P_k = \text{const}$.

С учётом сказанного, система алгебраических уравнений, определяющая коэффициент готовности технической системы, получается из системы уравнений 11.8 и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & \nu P_1 = n_0 \lambda P_0; \\
 & 2 \nu P_2 = (n_1 \lambda + \nu) P_1 - n_0 \lambda P_0; \\
 & \dots\dots\dots \\
 & k \nu P_k = (n_{k-1} \lambda + [k-1] \nu) P_{k-1} - n_{k-2} \lambda P_{k-2}; \quad (11.10) \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \nu(m+1) P_{m+1} = (n_m \lambda + m \nu) P_m - n_{m-1} \lambda P_{m-1}; \\
 & 0 = (m+1) \nu P_{m+1} - n_m \lambda P_m;
 \end{aligned}$$

Из 11.10 с учётом 11.8 имеем:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^m \frac{n_0 * n_1 * \dots * n_{k-1}}{k!} * \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k} \quad (11.11)$$

Где: P_0 – вероятность безотказной, работы системы: $k=0$;

$$P_k = \frac{n_0 * n_1 * \dots * n_{k-1} * \lambda^k}{k! * \nu^k} * P_0 \quad (11.12)$$

Определим коэффициент готовности, как вероятность застать в любой момент времени неработоспособными не более m элементов.

$$\pi(\infty) = \sum_{k=0}^m P_k = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{\prod_{i=-1}^{k-1} n_i * \rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{\prod_{i=-1}^{k-1} n_i * \rho^k}{k!}} \quad (11.13)$$

Здесь: $\rho = \frac{\lambda}{N_{-1} \nu}$ - коэффициент неисправности системы;

В заключение, проиллюстрируем зависимость функции готовности $\pi(t)$ от значения коэффициента неисправности ρ :

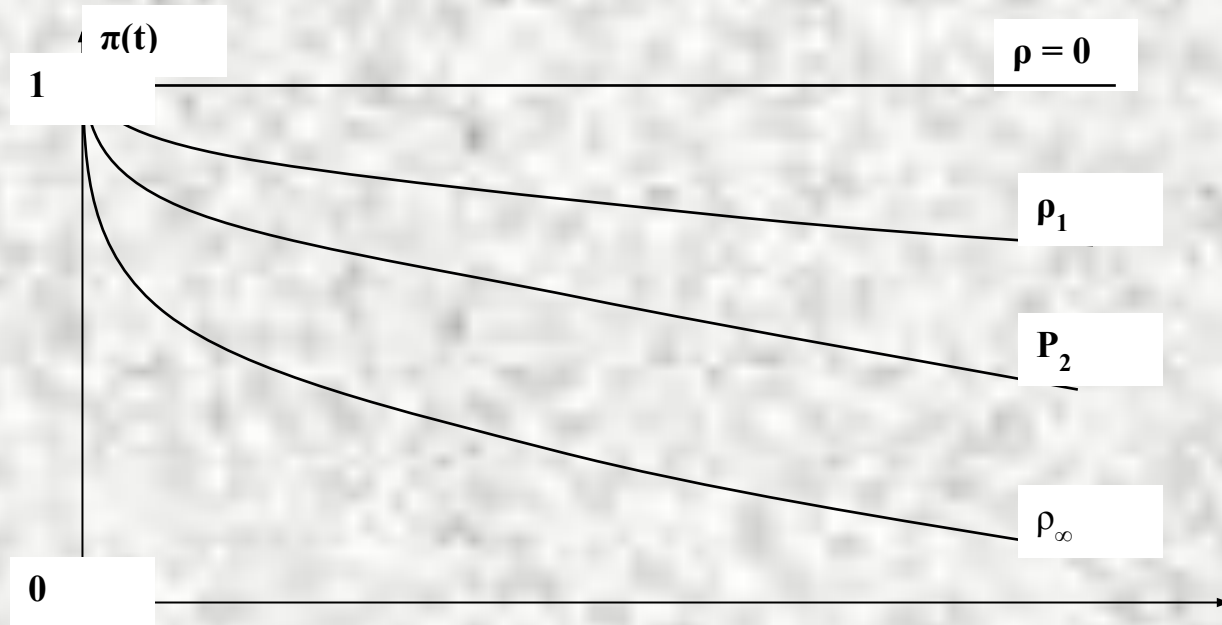


Рисунок 11.2

Из анализа рисунка можно сделать вывод, что при увеличении ρ надежность системы снижается (в плане ее готовности к действию).

Вывод: При увеличении ρ коэффициент готовности системы уменьшается.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

Случай 1. Резервирование горячее (рабочие и резервные элементы находятся в одинаковых условиях). Количество ремонтных бригад: $m+1$; очередь на ремонт отсутствует.

В этом случае: $\xi = 1$; $m = S-k$;

где: $S = N+m$; $0 \leq k < m + 1$.

Используя формулы 11.12 и 11.11 получим:

$$P_k = \frac{\frac{S * (S - 1) * \dots * (S - 1 + k)}{k!} * \rho^k}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{S * (S - 1) * \dots * (S - 1 + k)}{k!} * \rho^k} = \frac{C_S^k * \rho^k}{\sum_{k=0}^{m+1} C_S^k * \rho^k}, \quad (11.14)$$

где: C_S^k - число сочетаний из S по k , можно определить по формуле:

$$C_S^k = \frac{S!}{k! * (S - k)!}$$

Таким образом в этом случае коэффициент готовности можно вычислить по формуле:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^m C_S^k * \rho^k}{\sum_{k=0}^{m+1} C_S^k * \rho^k} \quad (11.15)$$

Случай 2. Если общее число однотипных элементов, которые циркулируют в рассматриваемой системе: $S = N + m$ и они одинаково могут отказывать в рабочем, нерабочем и резервном состояниях, то суммирование в знаменателе выражения 11.13 распространяется на все S – элементов и коэффициент готовности системы определяется выражением:

$$\pi(\infty) = \sum_{k=0}^m C_S^k \left(1 - \frac{\nu}{\lambda + \nu} \right)^k * \left(\frac{\nu}{\lambda + \nu} \right)^{S-k} \quad (11.16)$$

Случай 3. Резервирование горячее, но работает лишь одна бригада и возможна очередь на ремонт. В этом случае коэффициенты ν в системе уравнений 11.10 везде равны единице, а $\xi = 1$; $n_k = S - k$;
По формулам 11.10 и 11.11 находим:

$$P_k = \frac{\frac{1}{(S - k)!} * \rho^k}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{(S - k)!} * \rho^k} \quad (11.17)$$

Коэффициент готовности системы равен:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{(S-k)!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{\rho^k}{(S-k)!}} \quad (11.18)$$

Случай 4. Резервирование холодное, работают $m + 1$ (или S) ремонтных бригад (очередь на ремонт отсутствует). В этом случае: $\xi = 0$; $n_k = N$;
Если отказы в нерабочем состоянии не появляются, то коэффициент готовности системы равен:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{(N * \rho)^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{(N * \rho)^k}{k!}} \quad (11.19)$$

Если же элементы отказывают и в неработоспособном состоянии, то до отказов системы (до $m+1$ – го отказа), отказы появляются из числа N – элементов, а после этого – из числа $S-k$ – элементов, где k (число отказов) изменяется от $m+1$ до S . В этом случае:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{(N * \rho)^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{m+1} \frac{(N * \rho)^k}{k!} + \sum_{k=m+2}^S \frac{(S - k)^k * \rho^k}{k!}} \quad (11.20)$$

Случай 5. Резервирование холодное, работает одна ремонтная бригада.

В этом случае: $\xi = 0$; $n_k = N$;

При отсутствии отказов в нерабочем состоянии, коэффициент готовности системы равен:

$$\pi(\infty) = \frac{1 - (N * \rho)^{m+1}}{1 - (N * \rho)^{m+2}} \quad (11.21)$$

в случае отказов и в нерабочем состоянии коэффициент готовности системы равен:

$$\pi(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^m (N * \rho)^k}{\sum_{k=0}^{m+1} (N * \rho)^k + \sum_{k=0}^{S-2} (S - k)^k * \rho^k}$$

Для закрепления теоретического материала предлагается самостоятельно рассмотреть количественный пример.

Исходные данные для расчета:

Пусть система состоит из двух рабочих (N=2) и двух резервных (m=2) элементов с параметрами $\lambda = 0.1$ 1/ч, $\nu = 1$ 1/ч, $\rho = \lambda / \nu = 0.1$. Расчет произвести для варианта горячего резервирования: $\xi = 1$ и при условии, что ограничения на ремонт отсутствуют.

Выводы: Для расчета коэффициента готовности системы можно использовать формулы, позволяющие производить расчеты без решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, что значительно упрощает практические инженерные расчеты.

Специально для кафедры ЭЭС
от доцента кафедры ЭЭС
Анисимова Олега Юрьевича
с наилучшими пожеланиями

2005 г.