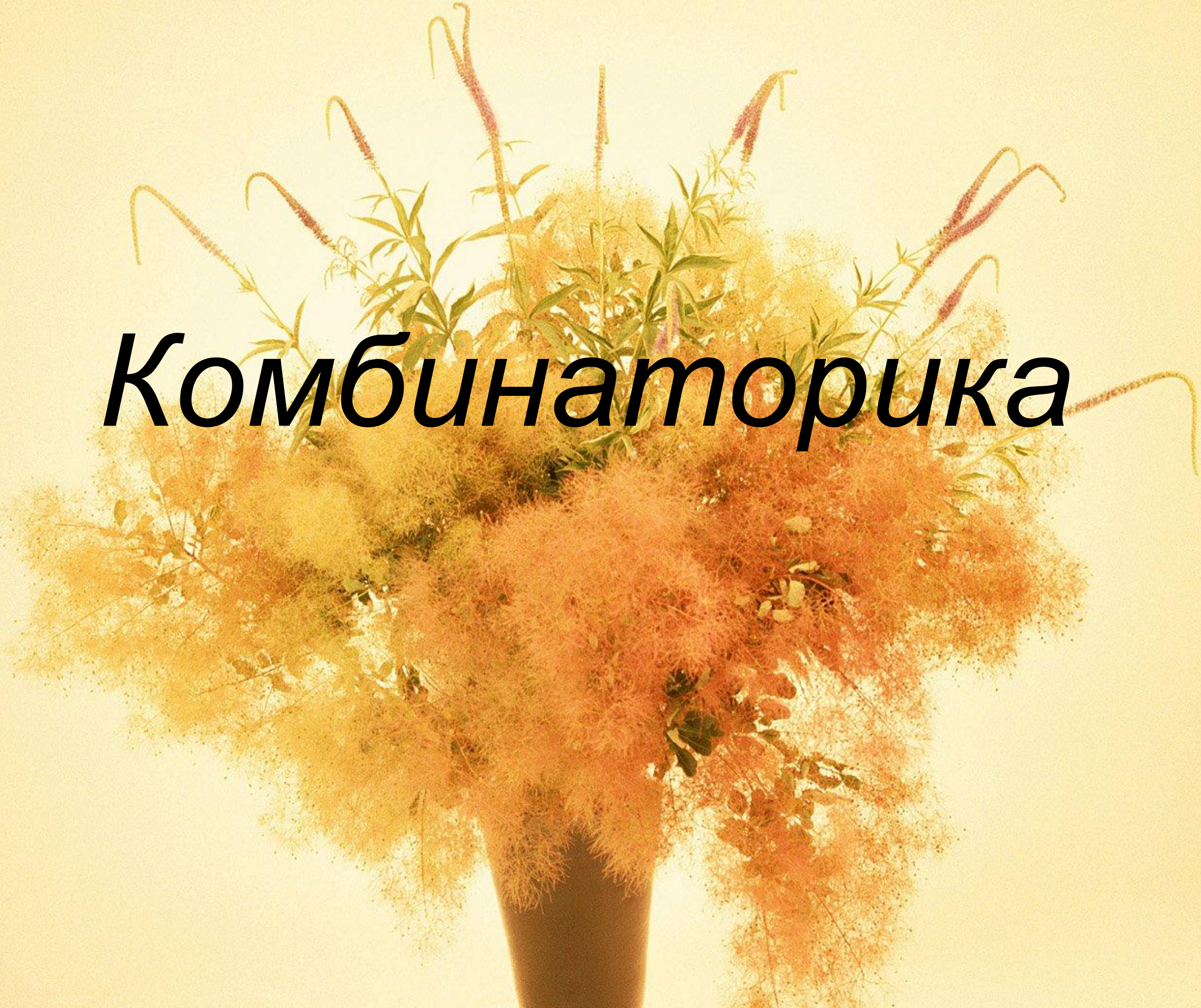
Комбинаторика



Основные понятия комбинаторики.

- Основными понятиями комбинаторики являются:
- *правило суммы,*
- *правило произведения,*
- *расстановки,*
- *перестановки,*
- *размещение,*
- *сочетание.*

Расстановки (n элементов)

- перестановки
  - перестановки с повторением
  - перестановки
- размещение
  - Размещение с повторением
  - размещение
- сочетание
  - сочетание с повторением
  - сочетание

- Опр.: Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных объектов, называется *комбинаторикой.*

Задачи комбинаторики очень тесно связаны с задачами линейного программирования.

Пример: сколько можно составить трехзначных номеров, не содержащих нуля?

Решение: составляю девять однозначных номеров: 1,2,..,9. Если взять набор из 10 цифр, написать любую из 9 кроме 0, то из каждого однозначного получится 9 двузначных: 9*9=81 двухместный номер. Тогда 81*9=729 трехзначных номеров без повторения.

Размещение с повторением

- Опр.: Пусть имеется множество из n-элементов. Из него выбираем подмножества, состоящие из k-элементов. При этом подмножества могут отличаться как самими элементами, так и порядком расположения элементов относительно друг друга. Назовем выбор таких подмножеств *k-размещением с повторениями*. Обозначение: $\overline{A}_n^k = n^k$

- Пример: для запирания сейфов в автоматических замках набирается секретное слово. Пусть имеется 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток можно совершить, не зная кода?
- Решение: $12^5 = 248832$, следовательно, неудачных попыток можно совершить 248831.

Общие правила комбинаторики

- Большинство задач комбинаторики сводятся к решению с помощью правила суммы и правила произведения.
- *Правило суммы.* Часто все известные комбинации разбиваются на классы, причем каждая комбинация входит только в один класс. В этом случае общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах.

- Пример: если некоторый объект А:m-способами, а В:n-способами, то выбор либо А, либо В можно совершить m+n-способами. При этом важно, чтобы комбинации не совпадали. Если такие совпадения есть, то m+n-k – число выбора, где k- количество совпадений.

- Часто при составлении комбинаций из этих элементов известно, сколькими способами можно выбрать первый элемент, и сколькими второй. При этом число выбора второго элемента не зависит от числа выбора первого.
- *Правило произведения:* Пусть первый элемент выбирается n способами, второй – m способами. Тогда пару можно выбрать m*n способами.

- *Обобщение:* Если выбираются не пары элементов, а комбинации из общего числа элементов, то приходим к задаче вида: сколько можно составить k-множеств, если
- 1-й элемент € n1;
- 2-й € n2;
- …
- n-й € nk.
- При этом две расстановки считаются различными, если хотя бы на одном месте стоят различные элементы. В этой ситуации имеем n1*n2*...*nk вариантов.

- Сложнее решаются задачи, в которых число выбора каждого последующего шага зависит от выбор на предыдущем шаге.
- Пример: сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать 2 кости, чтобы их можно было приложить друг к другу?
- Решение. Это можно сделать 28 способами, при этом 7 случаев выбора дубля, остальные 21 – различные числа. В первом случае 6 способов выбора второй кости, во втором – 12. По правилу произведения имеем 7*6=42 варианта выбора в первом случае, а во втором – 21*12=252 варианта. 42+252 = 294 варианта всего. Если не учитывать порядок выбора костей, то имеем 294/2=147 способов выбора.

- *Размещение без повторения.*
- Сколько можно составить размещений без повторений, если все входящие элементы различны?
- Имеется множество из n-элементов. Сколько из этих элементов можно составить подмножеств, состоящих из k-элементов? При этом подмножества различаются, если они отличаются хотя бы одним элементом. Получаем количество размещений: . На первом шаге имеем n-выборов, на втором – n-1, на пятом шаге – n-k+1 выбора. *Количество элементов выбора:*

$$A_n^k = n * (n-1) * \dots * (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Пример. Имеется 25 человек. Из них нужно выбрать старосту, культурга и профорга. Сколькими способами можно это сделать, если каждый человек занимал лишь одну должность?
- Решение: $A_{25}^{3} = 25 * 24 * 23 = 13800$ вариантов.

Перестановки без повторения.

- Опр.: Перестановки, в которые входят все элементы, но отличаются только порядком расположения. Такие перестановки называются *n-перестановки без повторения.*

- $P_n = n!$ еделению, 0!=1.
- Пример. Сколькими способами можно разместить за столом 10 гостей?
- Решение: P10=10!=3628800 вариантов.

Перестановки с повторениями

- Если некоторые переставляемые элементы одинаковы, то некоторые перестановки будут совпадать друг с другом, и общее количество перестановок получится гораздо меньше, чем предполагалось.

$$P(n_1, n_2, \dots n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$$

Сочетание.

- ***Числом сочетаний*** из n по m (n>=k) называется величина

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n * (n-1) \dots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

- Пример:

$$C_{64}^8 \frac{64!}{8! * (64-8)!} = \frac{64!}{8! * 56!} = 4328284968$$

Сочетания с повторениями.

- Имеются предметы n различных типов. Сколько k-комбинаций можно из них сделать, если не принимать во внимание порядок комбинаций?
- $$\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k! * (n-k)!} = C_{n+k-1}^k$$

Свойства сочетаний.

- ***1.*** $C_n^k = C_n^{n-k}$
- Пример: $C_{100}^{95} = C_{100}^{5}$
- Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! * (n-k)!} \leftrightarrow C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}$$

- ***2.*** $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$
- Доказательство: $\frac{(n-1)!}{(k-1)! * (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! * (n-1-k)!}$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} * \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)! * (n-k-1)!} * \frac{n}{(n-k) * k}$$

$$= \frac{n!}{k! * (n-k)!} = C_n^k$$

- **3.** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$
- Доказывается методом математической индукции.
- **4.** $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m$

- *Из формулы 4 выводятся соотношения:*

- 1. $$1 + 2 + \ldots + m = \frac{m * (m+1)}{2}$$
- 2. $$1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 4 + \ldots m(m+1) = \frac{m * (m+1) * (m+2)}{3}$$
- 3. $$1 * 2 * 3 + 2 * 3 * 4 + \ldots + m * (m+1) * (m+2) = \frac{m * (m+1) * (m+2) * (m+3)}{4}$$