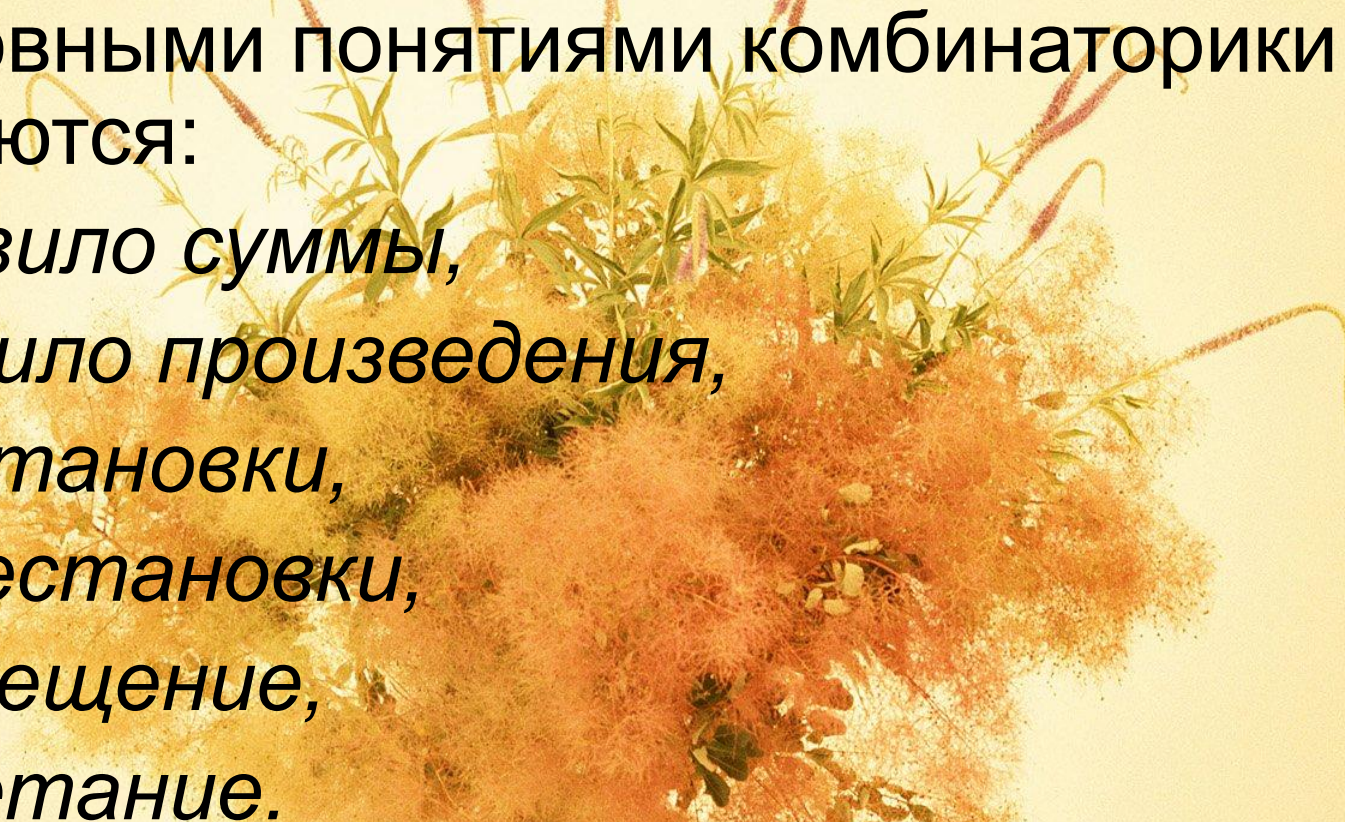




***Комбинаторика***



# Основные понятия комбинаторики.

- Основными понятиями комбинаторики являются:
  - *правило суммы,*
  - *правило произведения,*
  - *расстановки,*
  - *перестановки,*
  - *размещение,*
  - *сочетание.*
- 



Расстановки (n элементов)

перестановки

размещение

сочетание

перестановк  
и  
с  
повторением

Размещени  
е  
с  
повторение  
м

сочетание с  
повторение  
м

перестановки

размещени  
е

сочетание



- 
- Опр.: Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных объектов, называется *комбинаторикой*.



Задачи комбинаторики очень тесно связаны с задачами линейного программирования.

Пример: сколько можно составить трехзначных номеров, не содержащих нуля?

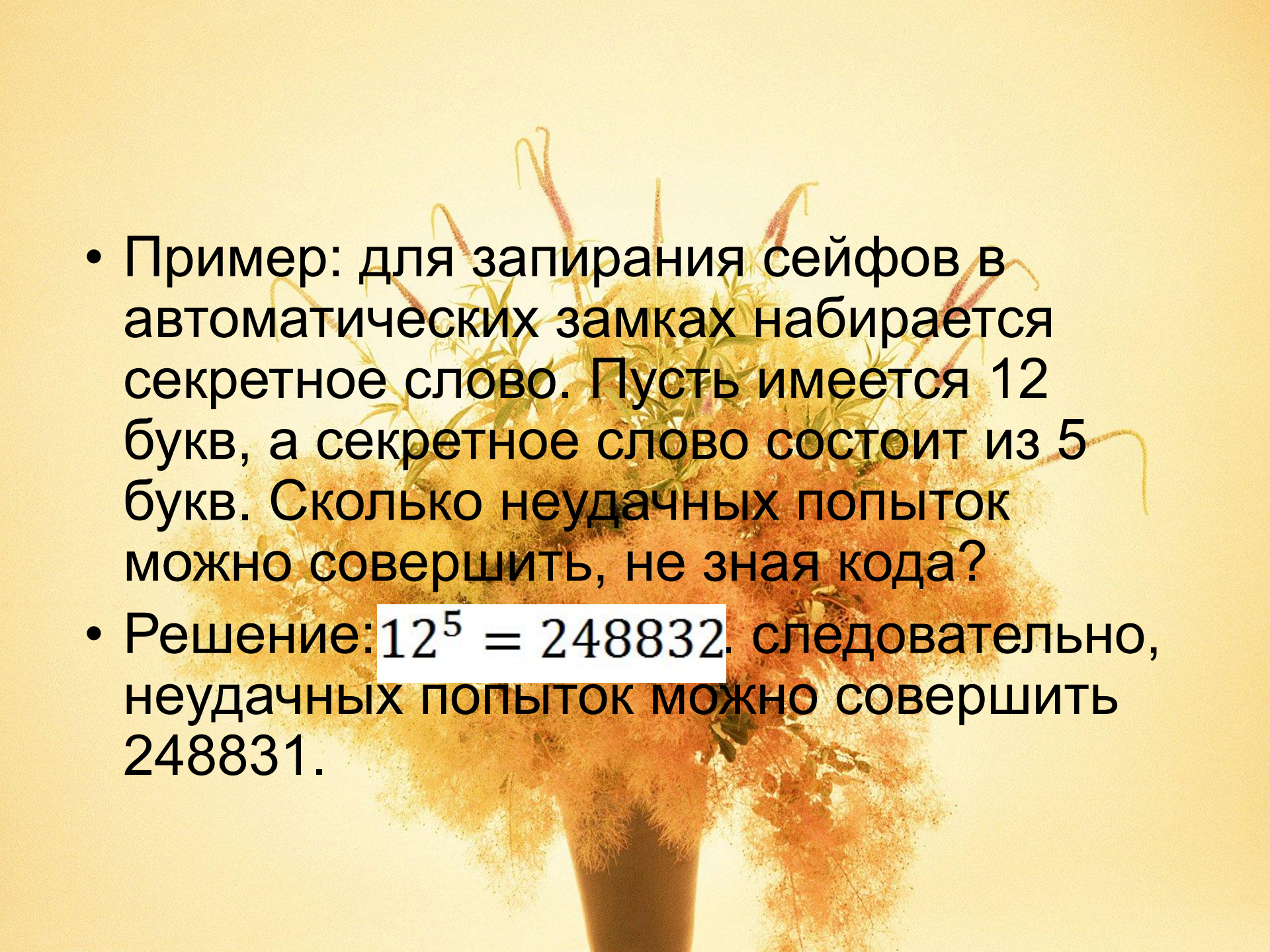
Решение: составляю девять однозначных номеров: 1,2,...,9. Если взять набор из 10 цифр, написать любую из 9 кроме 0, то из каждого однозначного получится 9 двузначных:  $9 \cdot 9 = 81$  двухместный номер. Тогда  $81 \cdot 9 = 729$  трехзначных номеров без повторения.



# Размещение с повторением

- Опр.: Пусть имеется множество из  $n$ -элементов. Из него выбираем подмножества, состоящие из  $k$ -элементов. При этом подмножества могут отличаться как самими элементами, так и порядком расположения элементов относительно друг друга. Назовем выбор таких подмножеств  *$k$ -размещением с повторениями*. Обозначение:  $A_n^k = n^k$



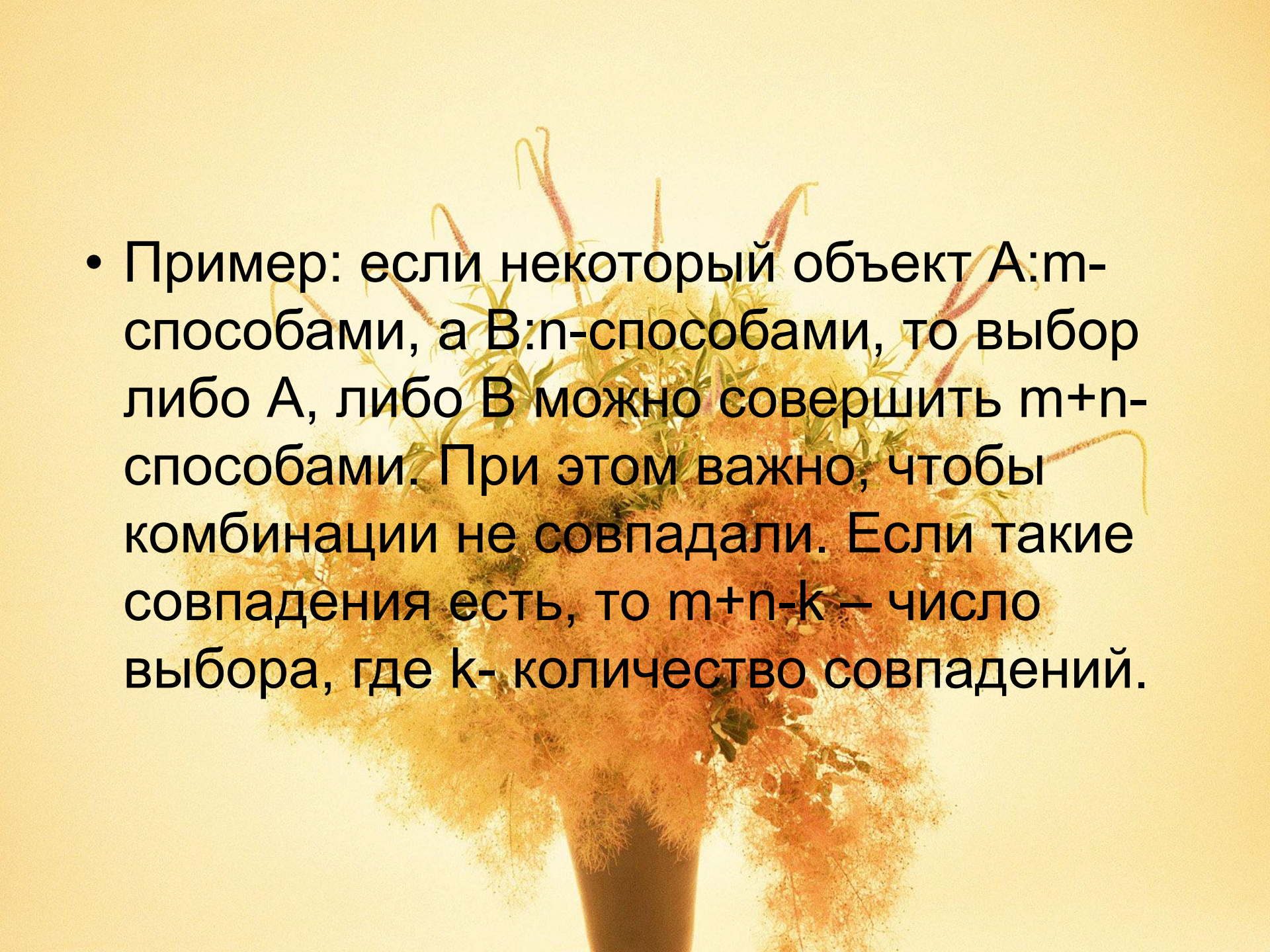
- 
- Пример: для записывания сейфов в автоматических замках набирается секретное слово. Пусть имеется 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток можно совершить, не зная кода?
  - Решение:  $12^5 = 248832$ . следовательно, неудачных попыток можно совершить 248831.



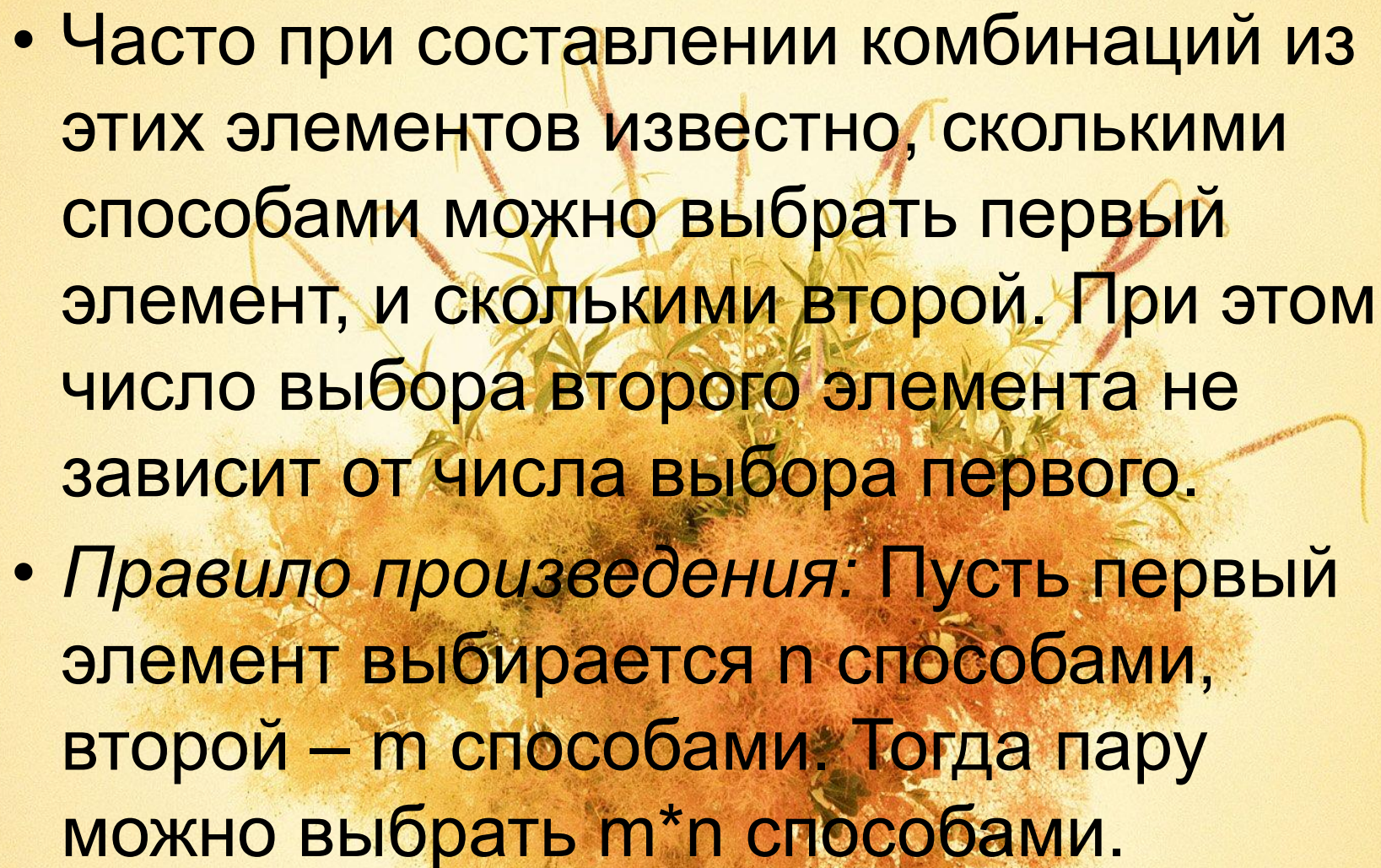
# Общие правила комбинаторики

- Большинство задач комбинаторики сводятся к решению с помощью правила суммы и правила произведения.
- *Правило суммы.* Часто все известные комбинации разбиваются на классы, причем каждая комбинация входит только в один класс. В этом случае общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах.

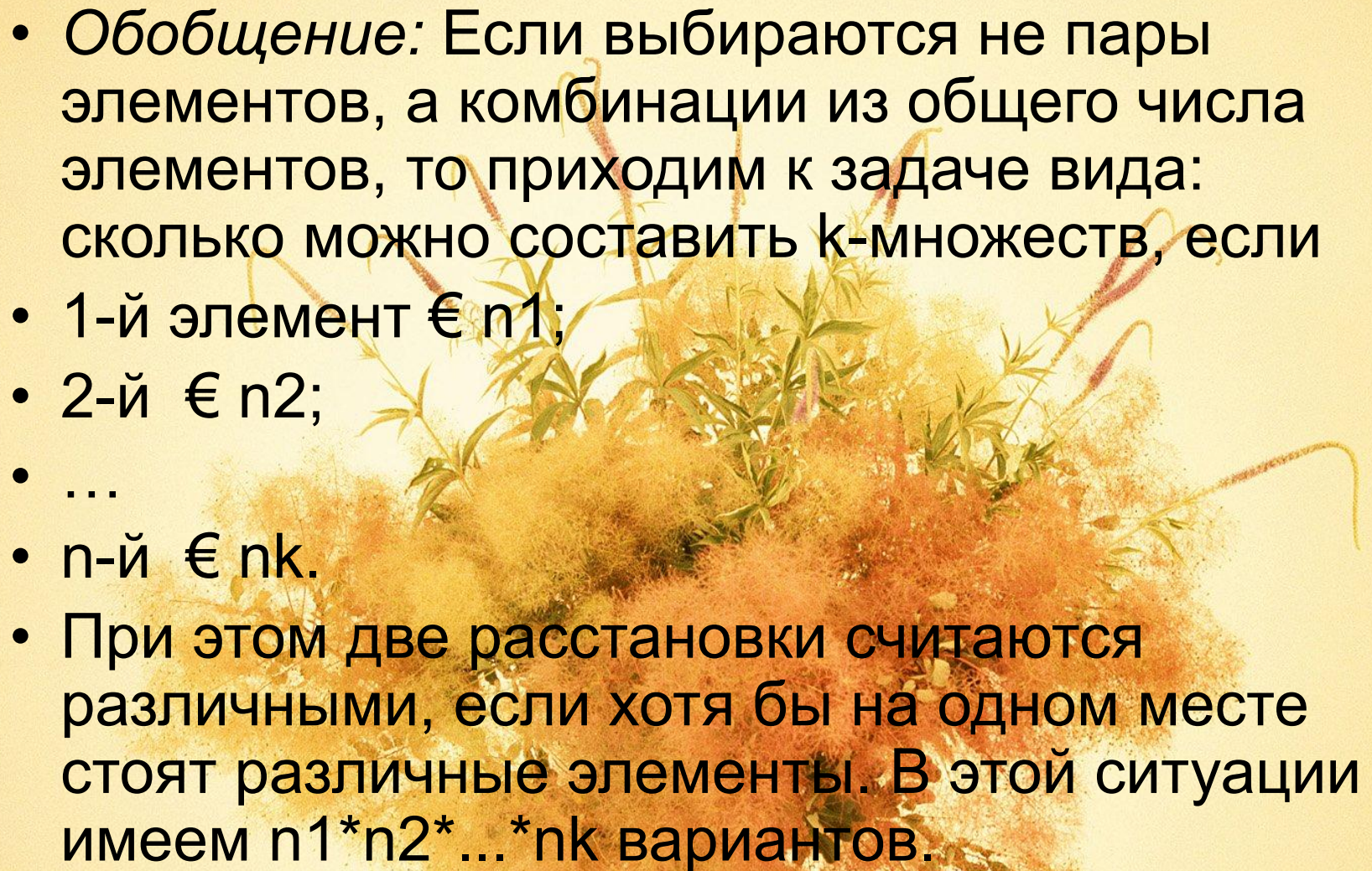


- 
- Пример: если некоторый объект  $A$ : $m$ -способами, а  $B$ : $n$ -способами, то выбор либо  $A$ , либо  $B$  можно совершить  $m+n$ -способами. При этом важно, чтобы комбинации не совпадали. Если такие совпадения есть, то  $m+n-k$  – число выбора, где  $k$ - количество совпадений.

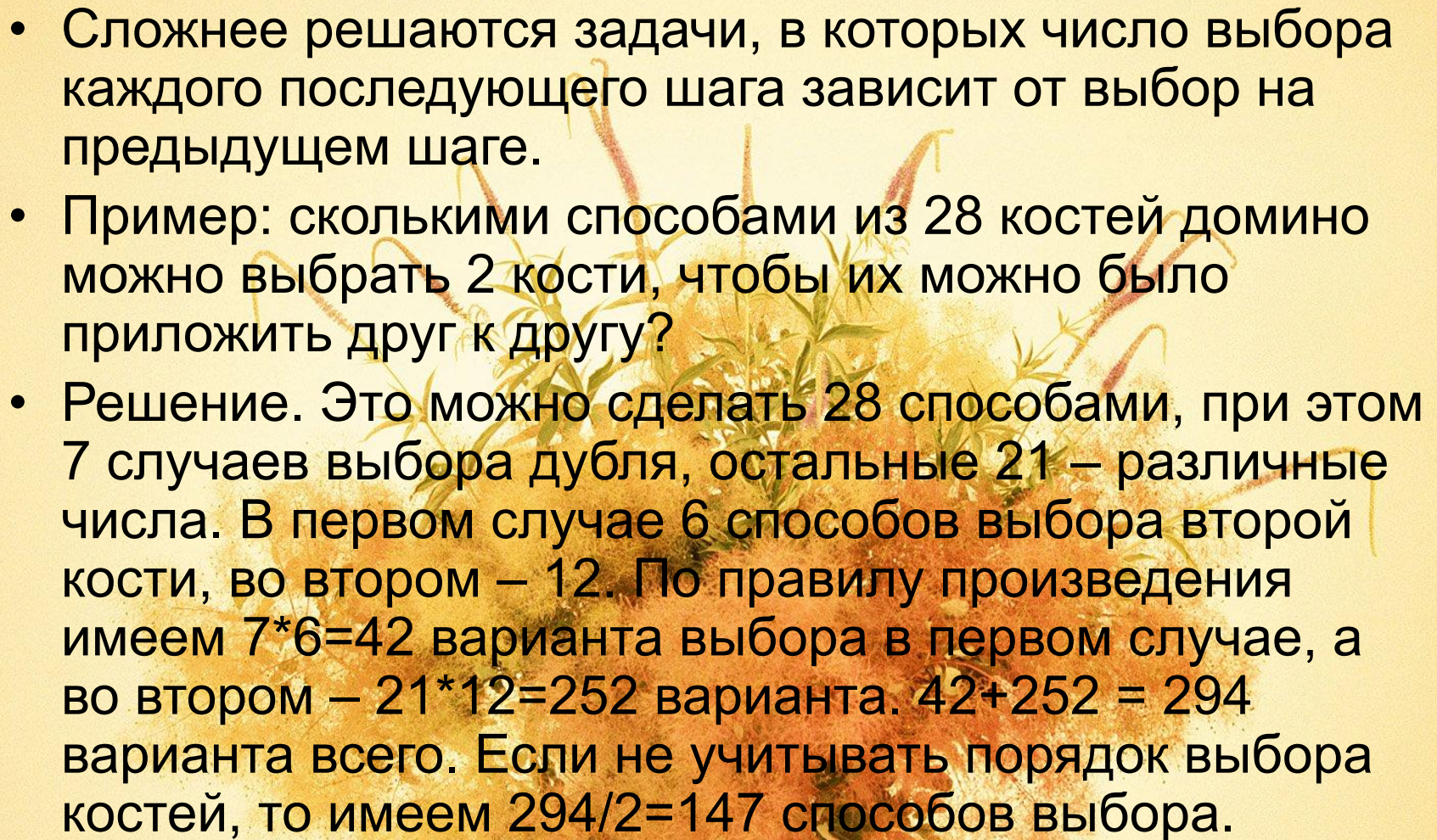


- 
- Часто при составлении комбинаций из этих элементов известно, сколькими способами можно выбрать первый элемент, и сколькими второй. При этом число выбора второго элемента не зависит от числа выбора первого.
  - *Правило произведения:* Пусть первый элемент выбирается  $n$  способами, второй –  $m$  способами. Тогда пару можно выбрать  $m \cdot n$  способами.



- 
- *Обобщение:* Если выбираются не пары элементов, а комбинации из общего числа элементов, то приходим к задаче вида: сколько можно составить  $k$ -множеств, если
    - 1-й элемент  $\in n_1$ ;
    - 2-й  $\in n_2$ ;
    - ...
    - $n$ -й  $\in n_k$ .
  - При этом две расстановки считаются различными, если хотя бы на одном месте стоят различные элементы. В этой ситуации имеем  $n_1 * n_2 * \dots * n_k$  вариантов.



- 
- Сложнее решаются задачи, в которых число выбора каждого последующего шага зависит от выбор на предыдущем шаге.
  - Пример: сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать 2 кости, чтобы их можно было приложить друг к другу?
  - Решение. Это можно сделать 28 способами, при этом 7 случаев выбора дубля, остальные 21 – различные числа. В первом случае 6 способов выбора второй кости, во втором – 12. По правилу произведения имеем  $7 \cdot 6 = 42$  варианта выбора в первом случае, а во втором –  $21 \cdot 12 = 252$  варианта.  $42 + 252 = 294$  варианта всего. Если не учитывать порядок выбора костей, то имеем  $294 / 2 = 147$  способов выбора.

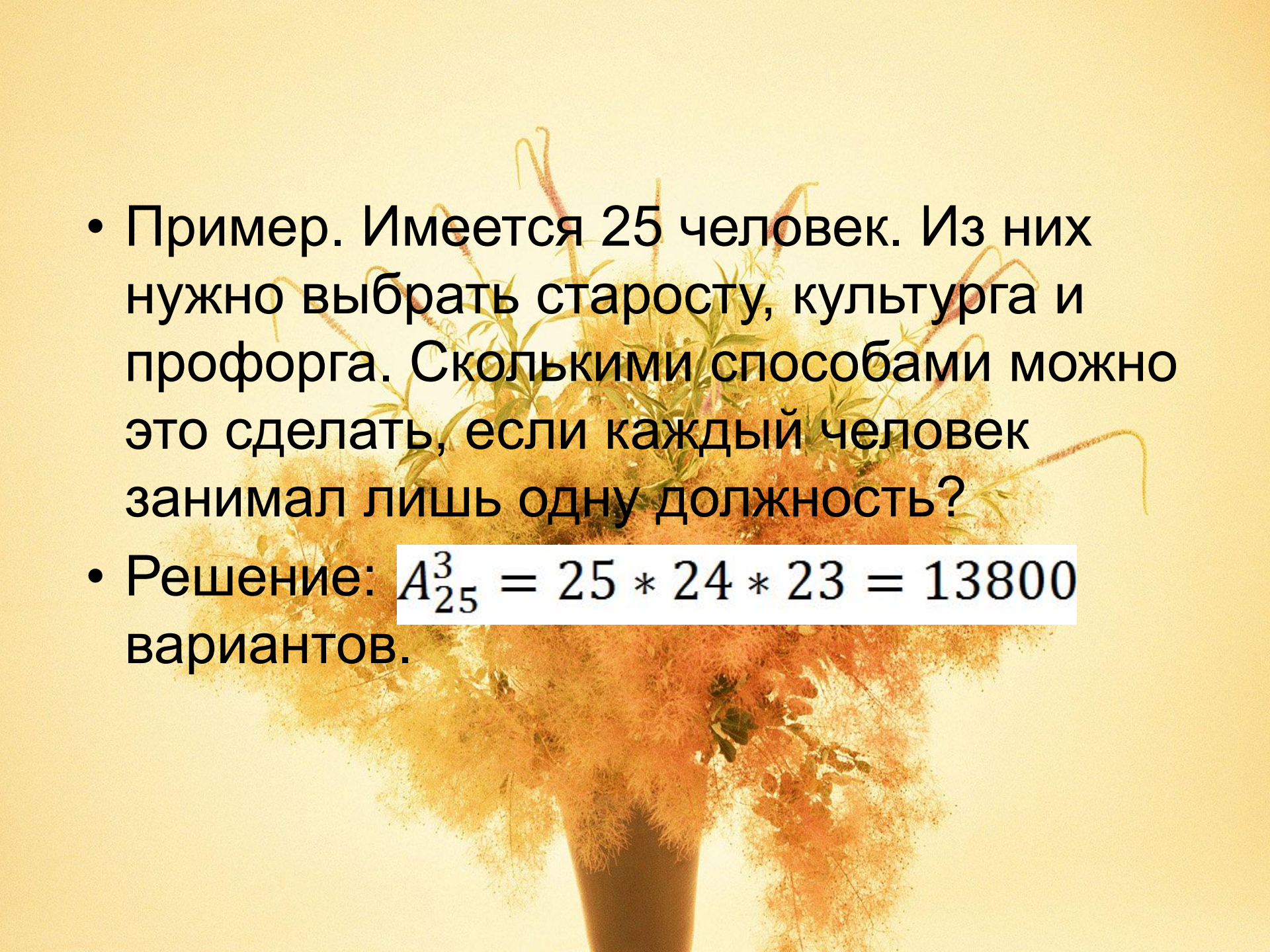


- *Размещение без повторения.*

- Сколько можно составить размещений без повторений, если все входящие элементы различны?
- Имеется множество из  $n$ -элементов. Сколько из этих элементов можно составить подмножеств, состоящих из  $k$ -элементов? При этом подмножества различаются, если они отличаются хотя бы одним элементом. Получаем количество размещений: . На первом шаге имеем  $n$ -выборов, на втором –  $n-1$ , на пятом шаге –  $n-k+1$  выбора.  
*Количество элементов выбора:*

$$A_n^k = n * (n - 1) * \dots * (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$



- 
- Пример. Имеется 25 человек. Из них нужно выбрать старосту, культурга и профорга. Сколькими способами можно это сделать, если каждый человек занимал лишь одну должность?
  - Решение:  $A_{25}^3 = 25 * 24 * 23 = 13800$  вариантов.



# Перестановки без повторения.

- Опр.: Перестановки, в которые входят все элементы, но отличаются только порядком расположения. Такие перестановки называются *n*-перестановки без повторения.
- $P_n = n!$  делению,  $0! = 1$ .
- Пример. Сколькими способами можно разместить за столом 10 гостей?
- Решение:  $P_{10} = 10! = 3628800$  вариантов.



# Перестановки с повторениями

- Если некоторые переставляемые элементы одинаковы, то некоторые перестановки будут совпадать друг с другом, и общее количество перестановок получится гораздо меньше, чем предполагалось.

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$$



# Сочетание.

- **Числом сочетаний** из  $n$  по  $m$  ( $n \geq k$ ) называется величина

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n * (n - 1) \dots (n - k + 1)}{k!} = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$$

- **Пример:**

$$C_{64}^8 = \frac{64!}{8! * (64 - 8)!} = \frac{64!}{8! * 56!} = 4328284968$$



# Сочетания с повторениями.

- Имеются предметы  $n$  различных типов. Сколько  $k$ -комбинаций можно из них сделать, если не принимать во внимание порядок комбинаций?

- $$\overline{C}_n^k = \frac{(k + n - 1)!}{k! * (n - k)!} = C_{n+k-1}^k$$



# Свойства сочетаний.

- 1.  $C_n^k = C_n^{n-k}$
- Пример:  $C_{100}^{95} = C_{100}^5$
- Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! * (n - k)!} \leftrightarrow C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n - k)! * k!}$$

- 2.  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

- Доказательство:

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)!}{(k-1)! * (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! * (n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k-1)!} * \left( \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)! * (n-k-1)!} * \frac{n}{(n-k) * k} \\ &= \frac{n!}{k! * (n-k)!} = C_n^k \end{aligned}$$



- **3.**  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

- Доказывается методом математической индукции.

- **4.**  $C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m$





- Из формулы 4 выводятся соотношения:

- 1.  $1 + 2 + \dots + m = \frac{m * (m + 1)}{2}$

- 2.  $1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 4 + \dots + m(m + 1) = \frac{m * (m + 1) * (m + 2)}{3}$

- 3.  $1 * 2 * 3 + 2 * 3 * 4 + \dots + m * (m + 1) * (m + 2)$   
 $= \frac{m * (m + 1) * (m + 2) * (m + 3)}{4}$