

**Соотношения между
тригонометрическими функциями одного
и того же аргумента.**

**МК№2
Преподаватель
Назарова Л.Н.**

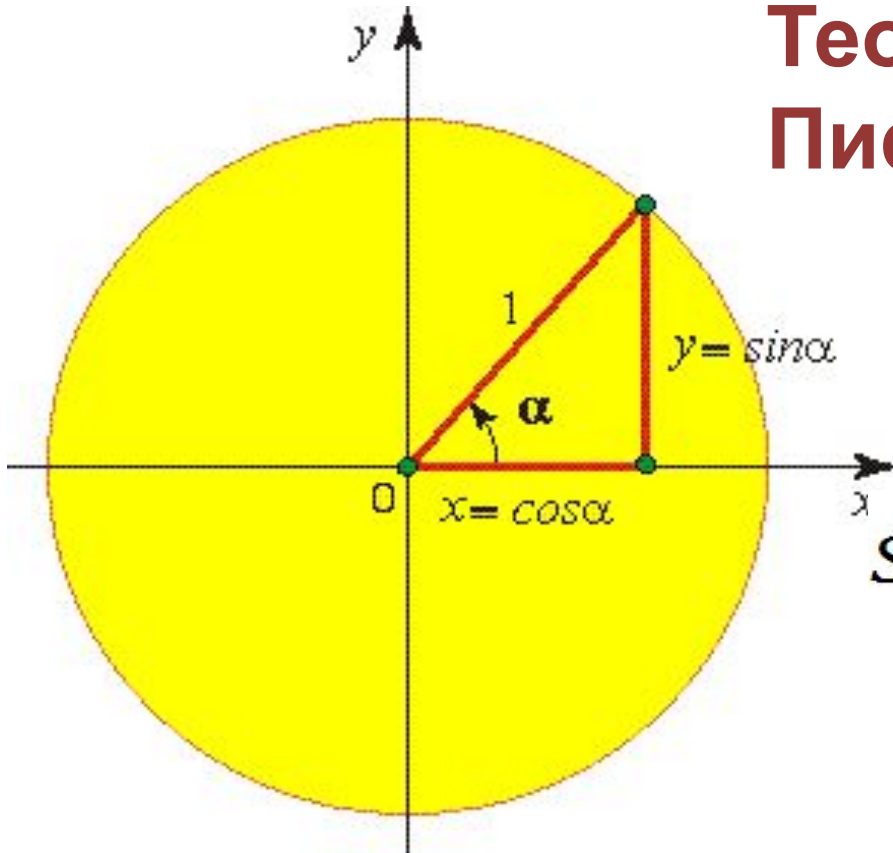
Теорема Пифагора

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

**Основное
тригонометрическое
тождество**



Пример 1: Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

$$\text{б) } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \sin \alpha = \frac{1}{2}?$$

*Решение: проверим выполнение
основного тригонометрического тождества:*

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Основное тригонометрическое тождество выполняется. Значит одновременно справедливы.

Пример 2: Найти значения тригонометрических функций числа α , зная, что $\sin \alpha = 0,6$ и

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Решение: т.к. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\alpha \in \text{II четвер}$, следовательно

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,6}{-0,8} = -\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -1\frac{1}{3}.$$

Выполнить самостоятельно:

1) $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

3) $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

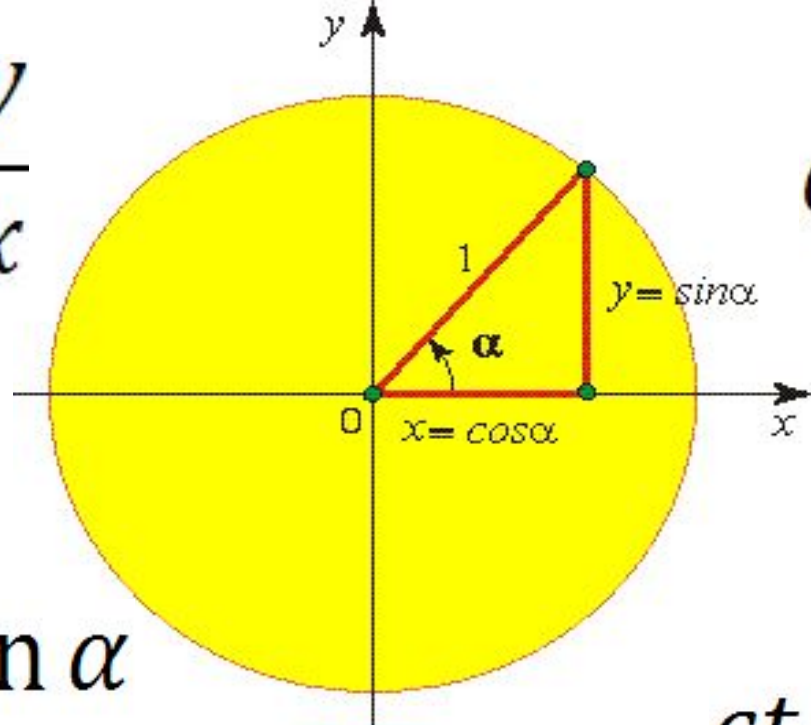
4) $\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

5) $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = 0,8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

6) $\sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

$$tg \alpha = \frac{y}{x}$$

$$ctg \alpha = \frac{x}{y}$$



$$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



$$tg \alpha \cdot ctg \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$



$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Основные тригонометрические тождества



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (2)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (4) \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (6)$$

Пример 3: Упростить:

$$\begin{aligned}\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \\ &= \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = \\ &= \sin^2 \alpha * 1 + \cos^2 \alpha = 1\end{aligned}$$

Упростить выражение:

1) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 2 \sin \alpha$;

2) $\cos \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$;

3) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$;

4) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}$.



Значения тригонометрических функций

α Функция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tga	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctga	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Функции двойного и тройного аргументов

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$4. \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$5. \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$6. \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Формулы сложения

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Функции половинного аргумента

$$1. \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$2. \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$4. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$5. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Формулы суммы и разности одноимённых функций

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$5. \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$6. \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$



Формулы преобразования произведения в сумму

$$1. \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$2. \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$3. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$