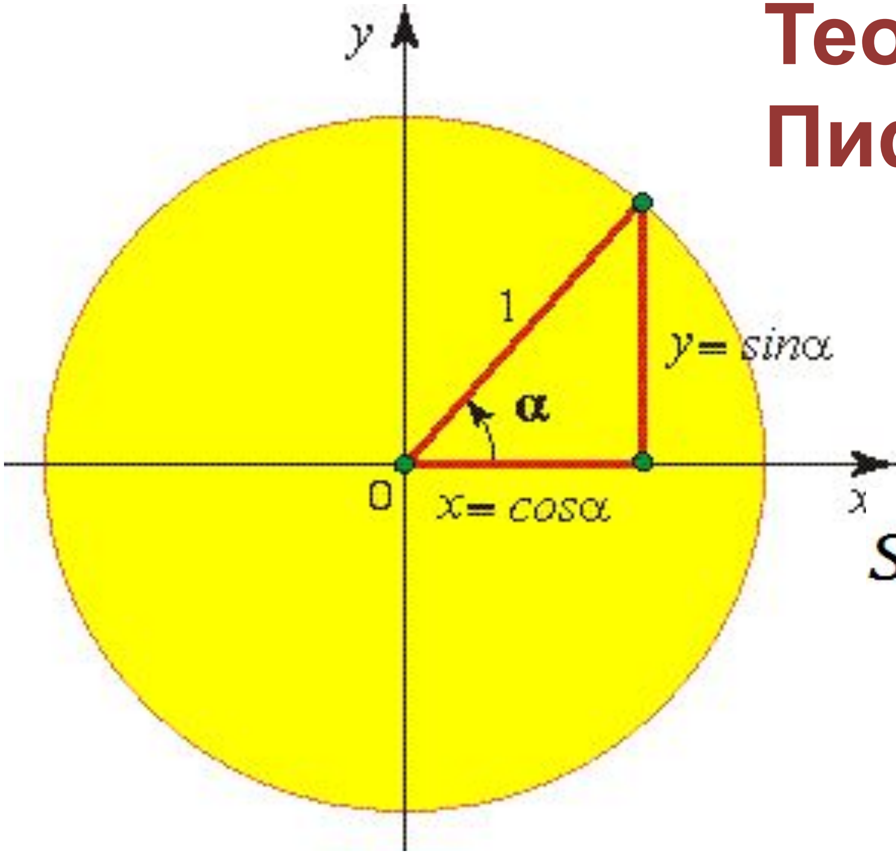
Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

МК№2
Преподаватель
Назарова Л.Н.



Теорема Пифагора

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Основное тригонометрическое тождество

Пример 1: Могут ли одновременно быть справедливы равенства:

$$б)\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \, и \sin\alpha = \frac{1}{2}?$$

Решение: проверим выполнение основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

Основное тригонометрическое тождество выполняется. Значит одновременно справедливы.

Пример 2: Найти значения тригонометрических функций числа α, зная, что sinα=0,6 и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$

$$\text{Решение: т.к.} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \text{ то } \alpha \in \text{ IIчIчетвер }, \text{следовательно}$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -0{,}8;$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -\frac{3}{4};$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -1\frac{1}{3}.$$

Выполнить самостоятельно:

1) $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha,$ если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

2) $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha,$ если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

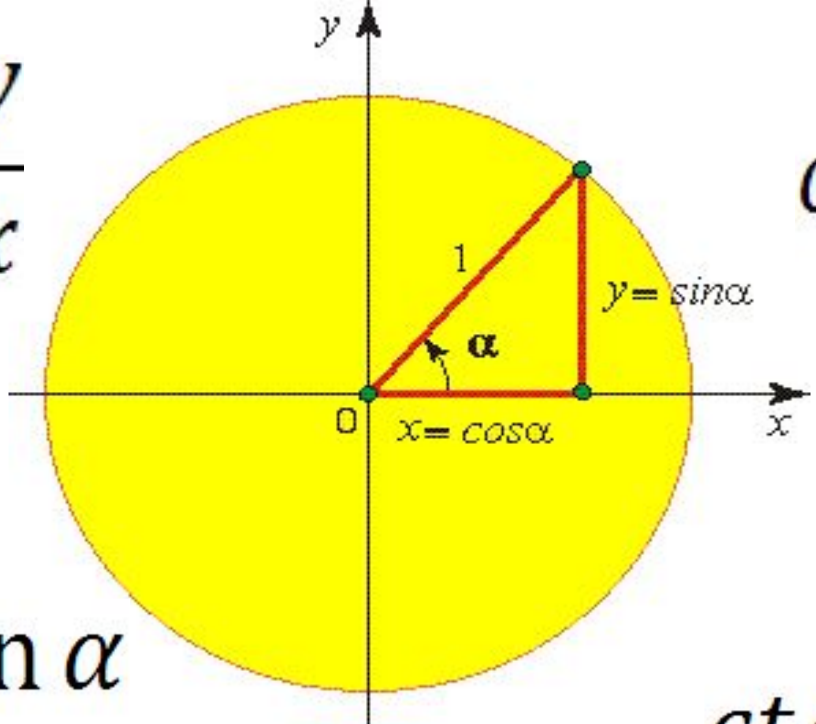
3) $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha,$ если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4) $\cos\alpha, \sin\alpha, ctg\alpha,$ если $tg\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

5) $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha,$ если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

6) $\sin\alpha, tg\alpha, \cos\alpha,$ если $ctg\alpha = -3$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

$$tg\,\alpha = \frac{y}{x}$$



$$ctg\,\alpha = \frac{x}{y}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1)$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (2)$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (3)$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (4)$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (5)$$

$$tg\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1 \qquad (6)$$

Пример 3:Упростить:

$$\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha * 1 + \cos^2\alpha = 1$$

Упростить выражение:

1) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;

4) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$.

Значения тригонометрических функций

α / Функция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Функции двойного и тройного аргументов

$$1. \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$3. tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$4. \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$5. \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$6. tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

Формулы сложения

$$1.\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$2.\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$3.\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$4.\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$5.\ tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$6.\ tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

Функции половинного аргумента

$$1.\ \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$2.\ \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$3.\ tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$4.\ tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$5.\ tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Формулы суммы и разности одноимённых функций

$$1.\ \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2.\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$3.\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$4.\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$5.\ tg\alpha \pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$6.\ ctg\alpha \pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$1.\ \sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$2.\ \sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$3.\ \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$