Демонстрационная презентация курса математика

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m = n$

A – квадратная матрица

$m \neq n$

A – прямоугольная матрица

МАТРИЦЫ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{ik} = 0$$

нулевая матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k \end{cases}$$

E – единичная матрица

МАТРИЦЫ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

($a_{ik} = 0$ для всех $i \neq k$)
диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

матрица – столбец

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

матрица – строка

МАТРИЦЫ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$(a_{ij} = a_{ji},\ A = A^T)$$

симметрическая,
самосопряженная матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

транспонированная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

треугольная
матрица

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

A, B одинаковой размерности

$$A + B = C$$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

$A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = C$$

$$C = \lambda a_{ij} \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

$$A_{mn},\ B_{nk}$$

количество столбцов матрицы A = количеству строк матрицы B

$$A_{mn} \quad B_{nk} = C_{mk}$$

$$C_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} \cdot b_{lj}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3 \text{ —— } = \text{ —— } 3 \times 3$$

$$C_{11} = \sum_{l=1}^{3} a_{1l} \cdot b_{l1}$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

$$\Delta = det \quad A \neq 0$$

A – невырожденная (неособенная)

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E)$$

A – обратная матрица

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Матричный метод

Пусть $m = n$.

Система (1) может быть записана в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Решение этой системы имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$ (если $\Delta \neq 0$), где

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(A_{ij} – алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя)

ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Если $\Delta = det\ A \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение

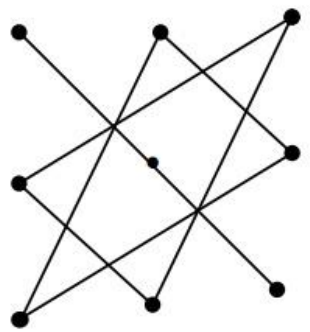
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ– определитель матрицы A, а Δi ($i = 1, 2, \ldots, n$) – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i–го столбца на столбец свободных членов.

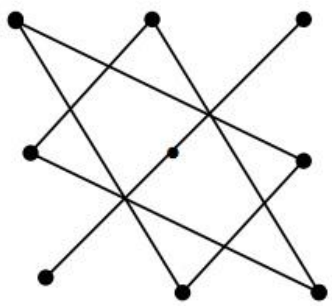
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-го и 3-го ПОРЯДКА

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$



со знаком «+»



со знаком «-»

О П Р Е Д Е Л И Т Е Л И

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из данного вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где $(i+j)$ – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Определитель квадратной матрицы n-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов

$$\boxed{\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \text{K} + a_{in}A_{in}}$$, где i – номер строки (столбца).

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СВОЙСТВА

Определитель равен нулю если выполнено одно из условий:

- все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю;
- определитель имеет две одинаковые строки (столбца);
- все элементы одной строки (столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки (столбца).